Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht (12)

Approximationstheorie

4. bis 10. August 1963

Unter der Leitung von Herrn Professor Dr. P.L. Butzer (Aachen) fand im August 1963 in Oberwolfach eine Tagung über die Approximationstheorie statt. Es war die erste Tagung dieser mathematischen Disziplin im Oberwolfacher Institut. Insgesamt waren 27 Mathematiker anwesend, davon 14 aus dem Ausland. Von diesen kamen vier aus den Vereinigten Staaten, je zwei aus Frankreich, Holland und Ungarn, je einer aus Dänemark, England, Japan und Kanada. Herr Dr. Leindler (Szeged) mußte wegen Visumsschwierigkeiten absagen und Herr Professor Dr. H.G. Tillmann (Mainz) war kurzfristig verhindert.

In 18 Vorträgen mit anschließenden lebhaften Diskussionen wurden Approximationsprobleme von Funktionen einer und mehrerer reeller Veränderlicher und der komplexwertigen Funktionen behandelt, weiter in einer gesonderten Sitzung offene Probleme dieser Disziplin diskutiert. Eine Veröffentlichung der Tagungsberichte in Buchform von den Herausgebern Prof. Dr. P.L. Butzer, Prof. Dr. J. Korevaar und Prof. Dr. Malliavin im Birkhäuser-Verlag steht bevor.

Die Teilnehmer der Tagung waren die folgenden:

ALEXITS, G. - Budapest
BANG, Th.S.V. - Kopenhagen
BEHNKE, H. - Münster
BERENS, H. - Aachen
BRASS, H. - Hannover
BUTZER, P.L. - Aachen
COOPER, J.L.B. - Cardiff
ENDL, K. - Giessen
ERNST, D. - Aachen
FAVARD, J. - Paris
FREUD, G. - Budapest
GOES, G. - London (Ont.,Kanada)
GÖRLICH, E. - Aachen
GÜNZLER, H. - Göttingen
HILGERS, H. - Bonn
HIRSCHFELD, R. - Utrecht
KOREVAAR, J. - Madison (USA)
LORENTZ, G.G. - Syracuse (USA)
MALLIAVIN, P. - Paris
NESSEL, R.J. - Aachen
QUADE, W. - Hannover
RUNCK, P.O. - Würzburg
SCHOENBERG, I.J. - Philadelphia
SCHULTE, H. - Aachen
SCHURER, F. - Delft
SHAPIRO, H.S. - Ann Arbor
SUNOUCHI, G. - Sendai (Japan)

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Approximationstheorie

4. bis 10. August 1963

Unter der Leitung von Herrn Professor Dr. P.L. Butzer (Aachen) fand im August 1963 im Oberwolfach eine Tagung über die Approximationstheorie statt. Es war die erste Tagung dieser mathematischen Disziplin im Oberwolfacher Institut. Insgesamt waren 27 Mathematiker anwesend, davon 14 aus dem Ausland. Von diesen kamen vier aus den Vereinigten Staaten, je zwei aus Frankreich, Holland und Ungarn, je einer aus Dänemark, England, Japan und Kanada. Herr Dr. Leindler (Szeged) mußte wegen Visumschwierigkeiten absagen und Herr Professor Dr. H.G. Tillmann (Mainz) war kurzfristig verhindert.

In 18 Vorträgen mit anschließenden lebhaften Diskussionen wurden Approximationsprobleme von Funktionen einer und mehrerer reeller Veränderlicher und der komplexwertigen Funktionen behandelt, weiter in einer gesonderten Sitzung offene Probleme dieser Disziplin diskutiert. Eine Veröffentlichung der Tagungsberichte in Buchform von den Herausgebern Prof. Dr. P.L. Butzer, Prof. Dr. J. Korevaar und Prof. Dr. Malliavin im Birkhäuser-Verlag steht bevor.

Die Teilnehmer der Tagung waren die folgenden:

ALEXITS, G. - Budapest
BANG, Th.S.V. - Kopenhagen
BEHNKE, H. - Münster
BERENS, H. - Aachen
BRASS, H. - Hannover
BUTZER, P.L. - Aachen
COOPER, J.L.B. - Cardiff
ENDL, K. - Giessen
ERNST, D. - Aachen
FAVARD, J. - Paris
FREUD, G. - Budapest
GOES, G. - London (Ont.,Kanada)
GÖRLICH, E. - Aachen
GÜNZLER, H. - Göttingen

HILGERS, H. - Bonn
HIRSCHFELD, R. - Utrecht
KOREVAAR, J. - Madison (USA)
LORENTZ, G.G. - Syracuse (USA)
MALLIAVIN, P. - Paris
NESSEL, R.J. - Aachen
QUADE, W. - Hannover
RUNCK, P.O. - Würzburg
SCHOENBERG, I.J. - Philadelphia
SCHULTE, H. - Aachen
SCHURER, F. - Delft
SHAPIRO, H.S. - Ann Arbor
SUNOUCHI, G. - Sendai (Japan)

Im einzelnen wurden folgende Vorträge gehalten:

ALEXITS, G.: Über die Approximation im starken Sinne.

In seinen Arbeiten hat G. Freud den Bernsteinschen Satz für allgemeine Orthogonalsysteme bewiesen. Und zwar sei $\{p_n(x)\}$ ein Orthogonalsystem unter der Gewichtsfunktion $\varrho(x)$ mit $0 < m \leq \varrho(x) \leq M$ auf $[a,b]$. Sei $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der Orthogonalreihe $f(x) \sim \sum c_n p_n(x)$. Ist $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$, dann gilt

$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} [f(x) - s_\nu(f;x)] = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

gleichmäßig in $[c,d] \subset (a,b)$.

Versteht man nun unter "Konvergenz im starken Sinne" die Konvergenz des Ausdrucks

$$h_n(f;x;p) = \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |f(x) - s_\nu(f;x)|^p \right\}^{1/p} \quad (p \geq 1),$$

dann lassen sich die obigen Aussagen wie folgt verschärfen:

Satz: Sei s_n die n-te Partialsumme eines Orthogonalsystems auf $[a,b]$ wie oben definiert, und sei $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ auf $[a,b]$.

i) Ist $p < 1/\alpha$, dann gilt $h_n(f;x;p) = O(n^{-\alpha})$ für alle $x \in [c,d] \subset (a,b)$.

ii) Ist $p = 1/\alpha$, so kann auch in einzelnen Punkten $x \in [c,d]$

$$h_n(f;x) \geq c\,\frac{\log^\alpha n}{n^\alpha}$$

für jedes n gelten.

BANG, Th.S.V.: A Nonlinear Extremal Problem and its Application to the Prime Number Theorem.

Seien $f(t)$, $g(t)$ reelle Funktionen der reellen Veränderlichen t, seien $\overline{\lim}|f| \leq A$, $\overline{\lim}|g| \leq B$, $\overline{\lim}|f'| \leq C$, $\overline{\lim}|g'| \leq D$ für $t \to \infty$. Dann können die Mittelwerte

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \left|\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dg(t)\right|, \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \left|\frac{1}{x} \int_0^x f(x-t)\, dg(t)\right|$$

trivialerweise nach oben abgeschätzt werden durch a = AD und b = BC. Die bestmögliche Abschätzung wird gegeben durch $a + b - \sqrt{a^2+b^2}$. Diese Aussage kann dazu benutzt werden, die Tauberschen Argumente im elementaren Beweisgang des Primzahlsatzes zu ersetzen. Auf den Raum der reellwertigen Funktionen, die für negative Argumente verschwinden, wird eine eineindeutige Transformation T in sich definiert

$$T\,F(x) = \sum_n \frac{1}{n} F(x - \log n)$$

mit der Eigenschaft $|T^{-1} F(x)| \leq T|F(x)|$. Dabei ist T mit der Primzahl-Theorie durch die Beziehung

$$T\{x F(x) + \int F(x-t) \ dw(t)\} = x \ T \ F(x)$$

mit $w(x) = \sum_{n \leq e^x} \frac{\Lambda(n)}{n}$ verknüpft. Setzt man $q(x) - x + c$ und $q^*(x) = 1/h \int_{x-h}^{x} q(t) \, dt$, so läßt sich hierüber mit den obigen Abschätzungen zeigen, daß $\overline{\lim} \, |q^*(x)| \leq 1$ und weiter $\lim q^*(x) = 0$ für $x \to \infty$ ist, woraus der Beweis des Primzahlsatzes erfolgt.

BERENS, H.: Über die beste Approximation von singulären Integralen, die vom Faltungstyp der Laplace-Transformation sind.

Sei $f(t) \in L\,(0,R)$ für jedes $R>0$, und sei $I_\rho(t) = \rho \int_0^t f(t-u)\, k(\rho u) \, du$ ein allgemeines singuläres Integral mit dem Parameter $\rho>0$ und dem Kern $k(u)$ mit der Eigenschaft (P): $k(u) \geq 0$ $(0 \leq u < \infty)$, $k \in L(0,\infty)$ Und $\int_0^\infty k(u) \, du = 1$. Wir bezeichnen mit $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$ und mit $\check{h}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dh(t)$ die Laplace-Stieltjes-Transformierte einer Funktion $h(t)$, die lokal von beschränkter Variation ist.

Existiert ein $Q(u)$ von beschränkter Variation in $(0,\infty)$, $Q(\infty) = 1$, so daß

$$(*) \qquad \frac{1}{A} \left(\frac{s}{\rho}\right)^{-\gamma} [1 - \hat{k}(s/\rho)] = \check{Q}(s/\rho) \qquad (\text{Re } s \geq 0, \ \rho > 0)$$

für ein gewisses $\gamma (0 < \gamma \leq 1)$ mit $A > 0$, dann lassen sich die folgenden Approximationsaussagen machen: Seien $e^{-ct} f$, $e^{-ct} l \in L\,(0,\infty)$ für jedes $c > 0$, habe k die Eigenschaft (P) und es existiere (*) für ein $0 < \gamma \leq 1$. Für (a) und (b) sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) (i) $\|e^{-ct} \{\rho^\gamma (f - I_\rho) - l\}\| = o(1) \quad (\rho \uparrow \infty)$,

(ii) $A \, s^\gamma \hat{f}(s) = \hat{l}(s) \quad (\text{Re } s > 0)$,

(iii) $f(t) = \frac{1}{A} \int_0^t \frac{(t-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \, l(u) \, du$ f.ü.

(b) (i) $\|e^{-ct} \{f - I_\rho\}\| = O(\rho^{-\gamma}) \quad (\rho \uparrow \infty)$

(ii) es existiert eine Funktion $F(t)$ lokal von beschränkter Variation $t \geq 0$, $\int_0^\infty e^{-ct} |dF(t)| < \infty$, $c > 0$, mit $A \, s^\gamma \hat{f}(s) = \check{F}(s)$ (Re $s > 0$).

Entsprechende Sätze gelten für den L_p-Fall, $1 < p < \infty$.

BRASS, H.: Grundmengen in normierten Räumen.

In einem normierten Raum R heisst eine Menge $\{x_i \mid x_i \in R, i \in I\}$ Grundmenge (Gm), wenn ihre lineare abgeschlossene Hülle gleich R ist. Zwei Sätze über Gmn wurden bewiesen.

(1) Sei $\{x_i \mid i = 1,2,\dots\}$ eine beschränkte Gm in R. Dann ist $\{y_i \mid i = 1,2,\dots\}$ mit $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} x_k$ eine Gm in R, falls die Matrix $\{\alpha_{ik}\}$ $i,k = 1,2,\dots$ "regulär" ist, d.h., falls das homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung hat. (2) Sei $x(\lambda)$ eine vektorwertige Funktion in R, die in einem Gebiet G analytisch is[t]. Ist $\{x(\tilde{\lambda}_i) \mid \tilde{\lambda}_i \in G\}$ eine Gm in R, dann ist die Behauptung auch richtig für $\{x(\lambda_i) \mid \lambda_i \in G$ und ein Häufungspunkt der $\lambda_i \in G\}$. Weiter wurden einige Sätze über topologische Eigenschaften von Gm formuliert.

BUTZER, P.L.: Integraltransformationsmethoden in der Approximationstheorie.

Verschiedene Methoden zur Untersuchung des Anfangs- und Randverhalten[s] von Lösungen partieller Differentialgleichungen und entsprechende Approximationsaussagen wurden betrachtet.

Als Beispiel dient die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0)$$

mit der Anfangstemperaturverteilung $f(x)$. Bekanntlich gilt für die Lösung

$$W(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \exp(-u^2/4t)\, du$$

mit $f \in L_p(-\infty,\infty)$, $1 \leq p \leq 2$,

$$\lim_{t \downarrow 0} \|f(x) - W(x;t)\|_p = 0.$$

Mit der Fourier-Transformation läßt sich weiter zeigen:

Satz: Sei $f \in L_p(-\infty,\infty)$, $1 < p \leq 2$. Die folgenden Behauptungen sind untereinander äquivalent.

a) $\| W(x,t) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{t^j}{j!} f^{(2j)}(x) \|_p = o\left(\frac{t^r}{r!}\right) \quad (t \downarrow 0)$,

wo $f^{(i)}$ $(i=0,1,2,\dots, 2r-3)$ absolut stetig sind und $f^{(2r-2)} \in L_p(-\infty,\infty)$

b) $f^{(i)}$ $(i=0,\dots,2r-1)$ sind absolut stetig und $f^{(2r)} \in L_p(-\infty,\infty)$;

c) $\|f(x+h) - \sum_{j=0}^{2r-1} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x)\|_p = o\left(\frac{h^{2r}}{(2r)!}\right) \quad (h \to 0)$;

d) $\|\Delta_{2h}^{2r} f(x)\|_p = O(h^{2r}) \quad (h \to o)$.

Gilt (a), so ist:

$$\lim_{t \downarrow o} \left\| \frac{r!}{t^r} \left\{ W(x,t) - \sum_{j=o}^{r-1} \frac{t^j}{j!} f^{(2j)}(x) \right\} - f^{(2r)}(x) \right\|_p = 0 .$$

COOPER, J.L.B.: Umkehrformeln der Fourierschen Transformation, Approximations- und Interpolationskerne.

Sei $F \in L_{p'}(-\infty,\infty)$, $\int k(u,v;\lambda) F(v)\,dv$ eine Abbildung von $L_{p'}$ in L_p. Seien $k_1(t,v;\lambda)$, $k_2(u,t;\lambda)$ die Fouriertransformierten von k bezüglich der ersten bzw. der zweiten Variablen. Sind k_1 oder k_2 Approximationskerne, dann ist k Kern einer Umkehrtransformation für die Fouriertransformation.

Sei $f \in L_{p'}(-\infty,\infty)$, $f^*_\lambda(n) = \int k^*(n,v;\lambda) F(v)\,dv$ eine Abbildung von $L_{p'}$ in L_p, k^*_1 und k^*_2 seien die Fouriertransformierten von k. Sind

$\lambda^{-1/p'} \; k^*_1(u/\lambda, v;\lambda)$ Kern einer Approximationsformel auf $L_{p'}$ und

$\lambda^{1/p} \; k^*_2([\lambda t], v;\lambda)$ Kern einer Interpolationsformel, konvergiert weiter

$$\lambda^{1/p'} \sum k^*_2(m,v;\lambda) \; \varphi(\tfrac{m}{\lambda}) \;\longrightarrow\; \varphi(v)$$

schwach auf jedem kompakten Intervall für stetige φ mit kompaktem Träger, dann bildet $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{1/p} \; f_\lambda([\lambda t])$ eine Umkehrformel für die Fouriertransformation.

Weiter sind Aussagen über den Grad der Approximation möglich: Hat das Approximationsverfahren mit dem Kern k_1 (oder k^*_1) eine bestimmte Ordnung für gegebene Funktionsklassen, dann hat das Verfahren mit dem Kern k_2 (oder k^*_2) dieselbe Ordnung für die Fouriertransformierten der Klasse.

Aussagen dieser Art wurden weiterhin auf lokal kompakten Abelschen Gruppen verallgemeinert.

FAVARD, J.: Zwei Probleme: 1. Vergleich von Summationsprozessen; 2. Funktionalanalytischer Inhalt des Gibbsschen Phänomens.

1. Dieses Problem wird speziell durch Vergleich zweier Summationsprozesse in der Theorie der Fourier-Reihen behandlet. Es sei $f(x) \in C_{2\pi}$, $s_n(f;x)$ die Dirichletsche Partialsumme von f (Prozess D) und $\sigma_n(f;x)$ das Fejer-Mittel (Prozess F).

i) Die $\sigma_n(f;x)$ konvergieren gleichmäßig gegen f(x) für $n \to \infty$, diese Aussage ist falsch für die $s_n(f;x)$ i.a..

ii) Der Prozess F wird saturiert von der Ordnung O(1/n), während dem Prozess D keine Saturationsordnung zugeordnet werden kann.

iii) Ist $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(0<\alpha<1)$, dann approximiert der Prozess F von einer besseren Ordnung als der Prozess D $(D \prec F)$; ist dagegen $f' \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(0<\alpha<1)$, dann gilt $F \prec D$.

Die Frage ist: Existiert eine lineare Mannigfaltigkeit in $C_{2\pi}$, für deren Elemente gilt D = F, d.h.,

$$\frac{\|s_n(f) - f\|}{\|\sigma_n(f) - f\|} \doteq O \quad (1).$$

2. Seien E und F zwei Banach-Räume, $\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von linearen, stetigen Transformationen von E in F, und sei

$$\sup_{x\in E}\left\{\sup_n \frac{\|U_n(x)\|_F}{\|x\|_E}\right\} = M \quad (<+\infty).$$

Welche hinreichenden Bedingungen müssen an E, F und die Folge $\{U_n\}$ gestellt werden, so Daß ein $x_o \in E$ existiert mit

$$\sup_n \frac{\|U_n(x_o)\|_F}{\|x_o\|_E} = M.$$

FREUD, G.: <u>Über höhere lokale Differentialquotienten reeller Funktionen.</u>

Man nennt eine in einer Umgebung von x_o definierte reellwertige Funktion f(x) der reellen Variablen x an der Stelle x_o lokal r-mal differenzierbar, falls

(i) $f(x_o + h) = f(x_o) + \sum_{k=1}^{r} \frac{h^k}{k!} f^{[k]}(x_o) + o(|h|^r)$ für $h \to 0$ gilt.

Von A. Denjoy wurde folgender allgemeine Begriff eingeführt, welcher auch die Riemannschen Derivierten (vgl. z.B. P.L. Butzer, 1961) enthält:

Es seien $\alpha_o, \ldots, \alpha_r$ fest gewählte reelle Zahlen und h eine reelle Veränderliche,

$$\omega(t) = (t-\alpha_o) \ldots (t-\alpha_r) \text{ und}$$

$$\varphi_r(h,x) \equiv \varphi_r(h,x;\alpha_i;f) = \sum_{k=o}^{r} \frac{1}{\omega'(\alpha_k)} f(x+\alpha_k h).$$

Der (von den α_i abhängige) r-te verallgemeinerte Differentialquotient ist definiert durch:

$$f^{\{r\}}(x_o) = \lim_{h\to o} \frac{r!}{h^r} \varphi_r(h,x_o).$$

Aus (i) folgt die Existenz von $f^{\{r\}}(x_o) = f^{[r]}(x_o)$, unabhängig von α_i, aber nicht umgekehrt. Es wird gezeigt, daß (i) mit

$$\text{(ii)}\begin{cases} \varphi_r(h,x) = \frac{h^r}{r!} f^{[r]}(x_o) + [|h|^r + |x-x_o|^r]\, \epsilon_1(h,x), \\ \lim\limits_{\substack{h\to o \\ x\to x_o}} \epsilon_1(h,x) = 0 \end{cases}$$

gleichwertig ist. Der Beweis erfolgt durch approximationstheoretische Methoden.

GÜNZLER, H.: Approximation durch Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Sei eine Folge $\Lambda = \{\lambda_n\}$ (n = 0, ± 1, ± 2,...) von komplexen Zahlen gegeben. Wann ist das System $\{h(x,\lambda_n)\}$ total, bildet es eine Basis, etc.... in den Räumen $L_p(I)$, I kompakt, wobei $h(x,\lambda)$ eine Lösung der Differentialgleichung $L_a h = \lambda^2 h$, $L_a = (d/dx)^2 - a(x)$, ist. Für $a(x) = 0$, $h(x,\lambda) = e^{\lambda x}$, ist die Frage befriedigend geklärt (L. Schrot).

Der allgemeine Fall wird mittels eines Transmutationsoperators B hierauf zurückgeführt: Ist I ein beschränktes Intervall, $a(x) \in L_1(I)$, so kann mittels einer hyperbolischen Differentialgleichung die Existenz eines Operators B bewiesen werden mit

(i) B ist ein stetiger Isomorphismus von $L_p(I)$, $1 \leq p < \infty$, in sich.

(ii) Für alle auf I zweimal stetig differenzierbaren Funktionen gilt $L_a B\varphi = B L_o \varphi$ $(L_o = (d/dx)^2)$.

(iii) Mit $\psi = B\varphi$ gilt $\psi(x_o) = \varphi(x_o)$; $\psi'(x_o) = \varphi'(x_o)$, wenn x_o der Mittelpunkt von I ist.

Ist also $\{\lambda_n\}$ gegeben. Das System $\{h(x,\lambda_n)\}$ ist genau dann total, bildet eine Basis, etc... in $L_p(I)$, wenn $e^{\lambda_n x}$ total ist, eine Basis bildet, etc... in $L_p(I)$.

KOREVAAR, J.: Approximation by Polynomials whose Zeros lie in a given Set.

R sei eine abgeschlossene Menge der komplexen Ebene. D sei eine offene Menge, deren Komplement zusammenhängend ist und den unendlich fernen Punkt enthält. Man approximiert durch R-Polynome, das sind solche, deren Nullstellen in R liegen. Es wird gefordert, daß die Approximation gleichmäßig auf jeder kompakten Untermenge von D ist.

R nennt man eine polynomiale Approximationsmenge genau dann, wenn alle nullstellenfreien, holomorphen Funktionen in D approximiert werden. Ergebnisse sind bekannt für den Fall, daß D die ganze Ebene ist und R polynomiale Approximationsmenge ist (regulärer Fall) oder nicht (singulärer Fall). (Siehe: Studies in Math. Analysis and Related Topics, Stanford, 1962, pp. 183-190). Neuere Ergebnisse sind: 1. ein Beweis, daß jede beschränkte Menge D ihren Rand als polynomiale Approximationsmenge besitzt. 2. Eine Beschreibung der approximierbaren Funktion, wenn R eine beliebige radiale Menge ist. 3. Ergebnisse über die induzierte Konvergenz, wenn R eine Halbebene ist. 4. Ergebnisse über die Nullstellenverteilung der Partialsummen von Potenzreihen.

LORENTZ, G.G.: <u>Polynomials with Positive Coefficients.</u>

Sei f(x) eine stetige, positive Funktion auf $[0,1]$. Existiert $f^{(r)}(x)$ ($r = 1,2,\dots,$) und hat den Stetigkeitsmodul $\omega_r(h)$, dann läßt sich f(x) durch Polynome $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k(1-x)^{n-k}$, $a_k > 0$ von der folgenden Ordnung approximieren:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C_r[\Delta_n(x)]^r \omega_r(\Delta_n(x)),$$

wobei $\Delta_n(x) = \max\left(\sqrt{x(1-x)/n},\ 1/n\right)$ ist. Ist $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$, also $\omega_r(h) = O(|h|^{\alpha})$, dann ist diese Ordnung die bestmögliche, was man durch verschärfte Bernsteinsche Ungleichungen für die Ableitungen der Polynome P_n beweisen kann. Über diese Ungleichungen läßt sich ebenso die Saturationsklasse der Bernsteinpolynome bestimmen.

MALLIAVIN, P.: <u>Some Topics on Approximation by Sums of Exponentials.</u>

1. Totalitätsradius. Sei Λ eine Folge von komplexen Zahlen, und $R(\Lambda) = \sup\{a \mid \{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ vollständig in } L_p(-a,a)\}$. Zusammen mit A. Beurling hat der Vortragende $R(\Lambda)$ wie folgt charakterisiert: Für $t > 0$ sei $n_\lambda(t)$ die Anzahl der λ mit $|\arg\lambda| \leq \pi/2$, $|\lambda| < t$, und für $t < 0$ $(-n_\lambda(t))$ die der λ mit $|\arg\lambda - \pi| < \pi/2$, $|\lambda| \leq -t$. Λ heißt streng meßbar und von strenger Dichte a, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |n_\Lambda(t) - at| \frac{dt}{1+t^2} < \infty .$$

Setzt man $a = D_s(\Lambda)$, dann wird eine max. strenge Dichte definiert durch $D_{M,s}(\Lambda) = \inf_{\Lambda^*} D_s(\Lambda^*)$, Λ^* streng meßbar $\Lambda^* \supset \Lambda$, und entsprechend $D_{m,s}(\Lambda) = \sup_{\Lambda^{**}} D_s(\Lambda^{**})$, Λ^{**} streng meßbar $\Lambda^{**} \subset \Lambda$.
Satz: $R(\Lambda) = \pi D_{M,s}(\Lambda)$, falls $\sum |\mathrm{Im}\ 1/\lambda| < \infty$. Ist $\sum |\mathrm{Im}\ 1/\lambda| = \infty$, dann ist $R(\lambda) = \infty$.

2. Lokal im Mittel periodische Funktionen. Ist $f \in C(I)$, dann heißt f periodisch im μ-Mittel (μ ist ein Maß mit kompaktem Träger auf der reellen Achse), wenn $\int f(x-t)\, d\mu(t) = 0$ für jedes x mit $x - s(\mu) \subset I$. Es gilt: f kann approximiert werden gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall in I durch Exponentialpolynome, die zu den Nullstellen von $\hat{\mu}$ gehören.

3. Verallgemeinerte Quasi-Analytizität. Ist $\omega(x)$ meßbar, $\omega(x) > 0$, $\omega(x)$ gerade. Existiert ein $f(x)$ mit Träger enthalten in $[-\epsilon, \epsilon]$, so daß $|f(x)| \leq \exp(-\omega(x))$? Die Frage kann bejaht werden, falls mit $\sigma(x) = \omega(x)/x$ $\int_1^\infty \sigma(x) \frac{dx}{x} < \infty$ ist und falls $\sigma(x)$ eine harmonische Erweiterung in $\mathrm{Im}\ z > 0$ hat, die ein endliches Dirichlet-Integral besitzt.

NESSEL, R.J.: Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von de la Vallee Poussin.

Es sei $C_{2\pi}$ der Raum der auf der ganzen reellen Achse stetigen, 2π-periodischen Funktionen und $E_n[f]$ die beste Approximation, gemessen in der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, an $f(x) \in C_{2\pi}$ aus der Menge der trigonometrischen Polynome mit Ordnung $\leq n$. Ist $\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x+\nu h)$, so bezeichnet man als den verallgemeinerten Stetigkeitsmodul k-ter Ordnung den Ausdruck $\omega_k(f;\delta) = \sup_{x;|h|\leq\delta} |\Delta_h^k f(x)|$. Es wurde der folgende Satz bewiesen:

Gegeben sei eine reelle Funktion $\Omega(x) \neq 0$ mit den Eigenschaften: (i) $\Omega(x) \geq 0$ für $x \geq a$, wobei $a \geq 2$ eine feste ganze Zahl ist; (ii) $\Omega(x_1) \geq \Omega(x_2)$ für $x_2 \geq x_1 \geq a$; (iii) $\lim_{x\to\infty} \Omega(x) = 0$; (iv) $\int_a^\infty \frac{\Omega(x)}{x} dx < \infty$. Des weiteren sei $\varphi(x)$ für $x \geq a$ eine reelle, positive, monoton fallende Funktion mit $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$. Kann man $f(x) \in C_{2\pi}$ für jedes $n \geq 1$ durch trigonometrische Polynome der Ordnung $\leq n$ so approximieren, daß $E_n[f] \leq \varphi(n) \frac{\Omega(n)}{n^r}$ gilt, wobei r eine nichtnegative ganze Zahl ist, so folgt, daß die r-te Ableitung $f^{(r)}(x)$ existiert und stetig ist. Weiterhin genügt der

verallgemeinerte Stetigkeitsmodul k-ter Ordnung von $f^{(r)}(x)$ für jedes δ mit $0 < \delta < a^{-2}$ der Relation:

$$\omega_k(f^{(r)};\delta)=O[\delta^k \int_a^{a/\sqrt{\delta}} x^{k-1}\,\Omega(x)\,dx + \varphi\left(\frac{a}{\sqrt{\delta}}\right)\{\delta^k \int_a^{a/\delta} x^{k-1}\,\Omega(x)\,dx +$$

$$+ \int_{1/\delta}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x}\,dx\}].$$

RUNCK, P.O.: <u>Über die Konvergenzgeschwindigkeit linearer Operatoren in Banach-Räumen.</u>

In der Funktionalanalysis gibt der Satz von Banach-Steinhaus notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz einer Folge von linearen Operatoren $L_n (\to L)$. Hierzu ist u.a. notwendig, daß die Folge der Normen der linearen Operatoren $\|L_n\|$ beschränkt ist. Diese Bedingung ist oft nicht erfüllt. Man konstruiert nun Unterräume, in denen die Folge der Normen bezüglich des Unterraumes beschränkt ist. Jetzt kann der Satz von Banach-Steinhaus angewandt werden. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenzgeschwindigkeit hängen ab:

1. Von dem Wachstum von $\|L_n - L\|$,
2. von der Approximationsgüte der dichten Menge, die gewisse Nebenbedingungen erfüllen muß, die von den Operatoren L_n abhängen.

SCHOENBERG, I.J.: <u>Zwei ungelöste Probleme der Approximationstheorie.</u>

1. Die Größenordnung der Diskrepanz mod 1.

Es bedeute Q das Quadrat $\{0 \leq x,\ y \leq 1\}$ und $P_\nu = (x_\nu, y_\nu)$ $(\nu = 1,2,\dots,N)$ seien Punkte in Q. Falls $(x,y) \in Q$ so bedeute $S_N(x,y)$ die Anzahl der P_ν, welche den Bedingungen $x_\nu < x$, $y_\nu < y$ genügen. Sei $D_N(P_\nu) = \max\limits_{(x,y)} |S_N(x,y) - N\,xy|$ die sog. Diskrepanz der Folge $\{P_\nu\}$ und $\Delta_N = \inf\limits_{P_\nu} D_N(P_\nu)$, wobei das Infimum über alle Folgen $\{P_\nu\}$ bei festem N zu nehmen ist.

K.F. Roth (1954) bewies: $\Delta_N > C_2 \sqrt{\log N}$. Allgemein gilt für den k-dimensionalen Fall: $\Delta_N > C_k (\log N)^{(k-1)/2}$. In einer Arbeit hat J.H. Halton (1960) die Vermutung ausgesprochen, daß durch diese Größenordnung das Divergenzverhalten für $N \to \infty$ bestimmt werde, was jedoch kürzlich von H. Gabai für k = 2 widerlegt wurde. Die Frage bleibt also weiterhin offen.

2. Zum Haarschen Satz im komplexen Gebiet. Sei S ein kompakter Hausdorff-Raum, $\mathbb{C}(S)$ der Raum der in S stetigen, komplexwertigen Funktionen. Seien $f_1(x),\dots, f_n(x)$ gegebene lineare unabhängige Elemente aus $\mathbb{C}(S)$ mit der Eigenschaft, daß sich jedes $f(x)\in \mathbb{C}(S)$ eindeutig durch $\sum_1^n a_\nu f_\nu(x)$ im Sinne der besten Approximation approximieren läßt. Falls (i) $n > 1$ und (ii) der Raum S dem Raum eines endlichen Polyeders homöomorph ist, dann läßt sich S homöomorph in die Ebene R_2 einbetten. Frage: Läßt sich die Voraussetzung (ii) streichen?

SCHURER, F.: On Linear Positive Operators.

Sei D ein abgeschlossenes und beschränktes Gebiet im m-dimensionalen Euklidischen Raum R_m mit Punkten $X = \{x_1,\dots,x_m\}$. Der Vortragende untersucht zunächst das Konvergenzverhalten gewisser lin.pos. Operatoren $L_N\{f;X\}$ gegen $f(X)$ an solchen Punkten $X \in D$, an denen die zweiten partiellen Ableitungen $f_{x_i,x_k}(X)$ existieren, und stellt, einen Satz auf der Art, wie er zuerst von E.V. Voronovskaja für Bernstein-Polynome bewiesen wurde. Danach wird ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion lin.pos. Operatoren $L_n(f;x)$ auf $[0,R]$ angegeben mit der Eigenschaft $\lim L_n(f;x) = f$ gleichmäßig für $f = 1,x,x^2$. Die $L_n(f;x)$ haben die Gestalt

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi_n^{(k)}(x)\, x^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (n = 1,2,\dots)$$

wo die $\varphi_n(x)$ bestimmte Eigenschaften haben. Ein spezielles $\varphi_n(x)$ wird z.B. durch $\varphi_n(x) = \exp\{1/p((1-x)^p - 1)\}\cdot(1-x)^{n-1}$ $(n = 1,2,\dots)$ auf $[0,1]$ gegeben. (p ist eine fest positive ganze Zahl).

SHAPIRO, H.S.: Polynomial Approximation in Several Variables.

Sei K eine kompakte Menge im k-dimensionalen Euklidischen Raum E_k. Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf K mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(t)$. Es ist bekannt, daß Polynome $P_n(x) = P_n(x_1,x_2,\dots,x_k)$ vom Grad $\leq n$ existieren, für die gilt: $|f(x) - P_n(x)| < C(k)\,\omega(1/n)$.
D.J. Newman und der Autor haben folgenden Satz bewiesen:
Sei B_k die Einheitskugel in E_k. Dann existiert ein Polynom $P_n(x)$ vom Grad $\leq n$, so daß für alle $x \in B_k$ gilt

$$|f(x) - P_n(x)| < A\,\omega(k/n + k).$$

Das Kolmogoroff-Lorentzsche Verfahren liefert als eine untere Schranke für die Approximation $1/12\ \omega(k/n+k)$. Weiter läßt sich aus obigem Satz für den Einheitskubus aus E_k eine Approximation von $< A\,\omega(k^{3/2}/n+k)$ herleiten, jedoch ist eine untere K-L-Schranke unbekannt. Wohingegen für das Tetraeder ($x_i \geq 0$, $\sum x_i \leq 1$) eine untere K-L-Schranke $\omega(\sqrt{k}/n+k)$ bekannt ist, jedoch nicht, ob ein $P_n(x)$ vom Grade $\leq n$ existiert, das von der angegebenen Ordnung approximiert.

SUNOUCHI, G.: <u>On the Saturation in the Theory of Best Approximation.</u>

Es wird die Fourierreihe $\sum A_k(x)$ von $f(x)$ und der Approximationsprozess $P_n(x,f) = \sum g_k(n)\ A_k(x)$ betrachtet. Man erhält die folgenden Sätze, die aus Übersichtsgründen für den C-Fall formuliert werden:

Satz 1: Sei
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-g_k(n)}{\varphi(n)\,\psi(k)} = c \neq 0.$$

Es gilt:

1. $\|f(x) - P_n(x,f)\| = o\{\varphi(n)\}$ genau dann, wenn $f(x) = \text{const.}$

2. Aus $\|f(x) - P_n(x,f)\| = O\{\varphi(n)\}$ folgt, daß die formale trig. Reihe $\sum \psi(k)\ A_k(x)$ Fourierreihe einer Funktion $l \in L_\infty(-\pi,\pi)$.

3. Umgekehrt folgt für $l \in L_\infty(-\pi,\pi)$, falls
$$\frac{1-g_k(n)}{\varphi(n)\ \psi(n)}$$
ein (L_∞, L_∞)-Multiplikator ist gleichmäßig in n,
$\|f(x) - P_n(x,f)\| = O\{\varphi(n)\}$.

Zur Frage der besten Approximation und der Saturation:

Satz 2: Sei $T_n(x,f)$ ein lineares trig. Approximationspolynom der Ordnung n für die Funktion f. Seien 1. $\|T_n(x,f)\| \leq M_1\|f\|$

2. $\|f(x) - T_n(x,f)\| = M_2\ n^{-\rho}\,\|f^{[\rho]}\|$, wobei $f^{[\rho]} \sim \sum k^{\rho}\ A_k(x) \in$ $\in L_\infty(-\pi,\pi)$. Dann gilt $E_n[f] = O\ (n^{-\alpha})$ genau dann, wenn $\|f(x) - T_n\ (x,f)\| = O\ (n^{-\alpha})$ mit $0 < \alpha < \rho$.

Auch lokale Saturationsprobleme wurden untersucht.

H. Schulte (Aachen)