1963, 13

Mathematisches Forschungsinstitut

Oberwolfach

Tagungsbericht

T o p o l o g i e

(13)

1. bis 6. Sept. 1963

Unter der Leitung der Herren Professoren A. DOLD (Heidelberg), D. PUPPE (Saarbrücken) und H. SCHUBERT (Kiel) fand vom 1. bis 6. September 1963 in Oberwolfach eine Tagung über Topologie statt. Sie sollte vor allem jüngeren europäischen "Topologen" Gelegenheit geben, ihre Arbeiten zur Diskussion zu stellen. Der Themenkreis der Vorträge war daher weit gezogen, und die Vielfalt der aufgeworfenen Fragen läßt sich mit wenigen Worten nicht umreißen, wie ein Blick in die Auszüge lehrt. Das Schwergewicht lag auf der eigentlichen algebraischen Topologie; daneben wurde jedoch auch über Probleme der mengentheoretischen Topologie, der Knotentheorie, der Differentialtopologie und der homologischen Algebra vorgetragen.

Die Tagung fand regen Zuspruch: Fünf Vorträge täglich wurde als übergenug empfunden; und viele Interessenten konnten aus Platzmangel nicht eingeladen werden. Allgemein wurde der Wunsch nach einer regelmäßigen Wiederholung des Zusammentreffens geäußert. Mit Recht, denn daß von fachlichen Gesprächen weitwirkende Anregungen ausgehen, ist unbestritten.

Teilnehmer:

M. ANDRÉ, Genf
F.W. BAUER, Frankfurt a.M.
E. BRIESKORN, Bonn
H.B. BRINKMANN, Saarbrücken
R. BROWN, Liverpool
H. CARTAN, Paris
H. DEBRUNNER, Bern
P. DEDECKER, Liège
M. DERUAZ, Zürich
T. tom DIECK, Saarbrücken
D. EPSTEIN, Cambridge
A. FREI, Zürich
M. FUCHS, Saarbrücken
G. GRIMEISEN, Stuttgart
G. HIRSCH, Brüssel
H. HOLMANN, Münster
L. HOROWITZ, Leiden
H. IBISCH, Tübingen
K. JÄNICH, Bonn
J. JAWOROWSKI, Warschau
F. KAMBER, Zürich
K. LAMOTKE, Bonn
S. MARDESIĆ, Zagreb
C. MORLET, Reims
M. MOSS, Hull
J.R. PORTEOUS, Liverpool
W. SHIH, Paris
E. STAMM, Zürich
B. STEER, Oxford
W. THÖNI, Zürich

Ph. TONDEUR, Zürich A.van de VEN, Leiden
I. VALDERRAMA, Brüssel E.C. ZEEMAN, Cambridge
C.T.C. WALL, Cambridge

Es folgen die von den Teilnehmern selbst verfaßten Zusammenfassungen ihrer Vorträge.

F.W. BAUER: Universelle Homotopiegruppen.

Bekanntlich gilt für Polyeder (C W - Komplexe) mit Basispunkt und entsprechenden Abbildungen der folgende Satz von J.H.C. WHITEHEAD: Es ist $f: X \longrightarrow Y$ genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn $\pi(f)$ ein Isomorphismus ist. Dabei ist $\pi(X) = \sum \pi_n(X)$. Für allgemeine Räume ist der Satz falsch. Es wir ein Funktor $\mathcal{M}: \mathfrak{K} \longrightarrow \mathcal{G}$ konstruiert ($\mathfrak{K}$ = Kategorie der normalen Räume, $\mathcal{G}$ = Kategorie der Gruppen), für den gilt:
1. Der Satz von WHITEHEAD für $\mathfrak{K}$
2. Es gibt einen Monomorphismus $\mu: \pi \longrightarrow \mathcal{M}$, so daß auf der Kategorie der Polyeder μ ein Isomorphismus ist.

Wesentlich für das Folgende ist die Konstruktion der Funktoren $\overline{W}, \overline{W}_K: \mathfrak{K} \longrightarrow \mathcal{V}$, wobei $\mathcal{V}$ die Kategorie der vollständigen Verbände mit 0- und 1-Element und die Abbildungen vereinigungstreu sind (keine Verbandshomomorphismen). Es ist $\overline{W}_K(X)$ der Verband der "zulässigen Untergruppen" von $\mathcal{M}(X)$, wobei $G \subset \mathcal{M}(X)$ zulässig heißt, wenn es ein $f \in \mathfrak{K}$, $f: T \longrightarrow X$ gibt, so daß $\mathcal{M}(f)\ \mathcal{M}(T) = G$ ist.

H. HOLMANN: Über Seifertsche Faserräume.

Die von H. SEIFERT in der Arbeit "Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, Acta Math. 6o (1933)" betrachteten Faserräume lassen sich so verallgemeinern, daß man mit ihnen weitgehend wie mit Faserbündeln rechnen kann. Während ein Bündel mit Faser F dadurch definiert ist, daß es lokal zu einem Produkt $F \times U$ isomorph ist, fordern wir von einem Seifertschen Faserraum, daß er lokal homomorphes Bild eines solchen Produktraumes ist, wobei der Homomorphismus noch einigen einschränkenden Bedingungen genügt. Ganz analog wie bei einem Bündel kann man eine Strukturgruppe einführen. Wie die Bündel lassen sich auch die Seifertschen Faserräume durch Elemente einer Kohomologiemenge eindeutig charakterisieren. Es gilt: L sei eine komplexe Liesche Transformationsgruppe des komplexen Raumes X. Die Zerlegung von X in L-Bahnen macht X genau dann zu einem holomorphen Seifertschen Faserraum über dem Bahnenraum X/L mit L als Faser und Strukturgruppe, wenn L eigentlich auf X operiert.

H. DEBRUNNER: Über den Zerfall von Verkettungen.

Disjunkte, lokal flach im R^k eingebettete (k-2)-Sphären S_i (i=1,...,n) bilden eine Verkettung $\mathfrak{V} = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. $\mathfrak{V}$ heißt zerfallend, falls es eine lokal flache (k-1)-Sphäre in R^k gibt, welche zu $\mathfrak{V}$ disjunkt ist und Punkte von $\mathfrak{V}$ in ihrem Innern und in ihrem Äußern enthält. Für $J \subset \{1,\dots,n\}$ sei $\mathfrak{V}_J$ die Teilverkettung $\bigcup_{i \in J} S_i$ von $\mathfrak{V}$. Das Zerfallsschema $\mathcal{S}$ von $\mathfrak{V}$ ist die Menge aller $J \subset \{1,\dots,n\}$, für welche $\mathfrak{V}_J$ nicht zerfällt; offenbar gilt

(1) $\emptyset \in \mathcal{S}$, $\{i\} \in \mathcal{S}$ für i = 1,...,n .

(2) $J \cup K \in \mathcal{S}$,falls $J, K \in \mathcal{S}$ und $J \cap K \neq \emptyset$.

Vom heuristischen Standpunkt aus hat 1892 H. BRUNN für k=3 untersucht, ob es bei beliebigen n zu jeder (1) und (2) erfüllenden Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\{1,\dots,n\}$ eine Verkettung von (k-2)-Sphären im R^k gibt, welche $\mathcal{S}$ als Zerfallsschema besitzt. Ich zeige, daß dies für $k > 3$ zutrifft. Als Spezialfall ergibt sich die Lösung von FOX's Problem Nr. 38 in Topology of Manifolds, Prentice-Hall 1962 (ed. M.K. FORT), S. 175.

E.C. ZEEMAN: Twisting spun knots.

The 4-dimensional POINCARÉ Conjecture is unsolved, and a likely looking counterexample was a homotopy 4-sphere constructed by MAZUR (Symmetric homology spheres, Ill.Jour.Math. 6 (1962) 245-25o). We prove that MAZURs example is in fact a true S^4.

The proof involves a smooth knot of S^2 in S^4 with group $\pi_1(S^4 - S^2) = Z \times G$, where Z=integers, and G= binary dodecahedral group (order 12o). This answers a question of FOX as to whether or not an S^2 knot in S^4 could have elements of even order. Moreover the complement is a fibre bundle over S^1 with bundle group Z_5 and fibre the punctured(=minus a point) dodecahedral space ($=S^3/G$). As a corollary the punctured dodecahedral space is embedded in S^4. The knot is constructed by spinning a trefoil knot (in the manner of ARTIN 1925), and twisting it 5 times as it spins. More generally any smooth S^{n-2} knot in S^n can be k-twist-spun to give a smooth S^{n-1} knot in S^{n+1} , whose complement is fibered over S^1, with fibre the punctured k-fold branched covering of S^n branched over S^{n-2}.

D. EPSTEIN: Diagrams are commutative.

Let $\mathfrak{A}$ be a category with a product $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \xrightarrow{\otimes} \mathfrak{A}$ which is a functor. We ask for conditions which make $\otimes$ commutative and

H. DEBRUNNER: Über den Zerfall von Verkettungen.

Disjunkte, lokal flach im R^k eingebettete $(k-2)$-Sphären $S_i\,(i=1,\ldots,n)$ bilden eine Verkettung $\mathfrak{V} = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. $\mathfrak{V}$ heißt zerfallend, falls es eine lokal flache $(k-1)$-Sphäre in R^k gibt, welche zu $\mathfrak{V}$ disjunkt ist und Punkte von $\mathfrak{V}$ in ihrem Innern und in ihrem Äußern enthält. Für $J \subset \{1,\ldots,n\}$ sei $\mathfrak{V}_J$ die Teilverkettung $\bigcup_{i\in J} S_i$ von $\mathfrak{V}$. Das Zerfallsschema $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{V}$ ist die Menge aller $J \subset \{1,\ldots,n\}$, für welche $\mathfrak{V}_J$ nicht zerfällt; offenbar gilt

(1) $\phi \in \mathfrak{S}$, $\{i\} \in \mathfrak{S}$ für $i = 1,\ldots,n$.

(2) $J \cup K \in \mathfrak{S}$, falls $J, K \in \mathfrak{S}$ und $J \cap K \neq \phi$.

Vom heuristischen Standpunkt aus hat 1892 H. BRUNN für $k=3$ untersucht, ob es bei beliebigen n zu jeder (1) und (2) erfüllenden Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\{1,\ldots,n\}$ eine Verkettung von $(k-2)$-Sphären im R^k gibt, welche $\mathfrak{S}$ als Zerfallsschema besitzt. Ich zeige, daß dies für $k > 3$ zutrifft. Als Spezialfall ergibt sich die Lösung von FOX's Problem Nr. 38 in Topology of Manifolds, Prentice-Hall 1962 (ed. M.K. FORT), S. 175.

E.C. ZEEMAN: Twisting spun knots.

The 4-dimensional POINCARÉ Conjecture is unsolved, and a likely looking counterexample was a homotopy 4-sphere constructed by MAZUR (Symmetric homology spheres, Ill.Jour.Math. 6 (1962) 245–250). We prove that MAZURs example is in fact a true S^4.

The proof involves a smooth knot of S^2 in S^4 with group $\pi_1(S^4-S^2) = Z \times G$, where Z=integers, and G= binary dodecahedral group (order 120). This answers a question of FOX as to whether or not an S^2 knot in S^4 could have elements of even order. Moreover the complement is a fibre bundle over S^1 with bundle group Z_5 and fibre the punctured (=minus a point) dodecahedral space $(=S^3/G)$. As a corollary the punctured dodecahedral space is embedded in S^4. The knot is constructed by spinning a trefoil knot (in the manner of ARTIN 1925), and twisting it 5 times as it spins. More generally any smooth S^{n-2} knot in S^n can be k-twist-spun to give a smooth S^{n-1} knot in S^{n+1}, whose complement is fibered over S^1, with fibre the punctured k-fold branched covering of S^n branched over S^{n-2}.

D. EPSTEIN: Diagrams are commutative.

Let $\mathfrak{A}$ be a category with a product $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \xrightarrow{\otimes} \mathfrak{A}$ which is a functor. We ask for conditions which make $\otimes$ commutative and associative. Obviously we need to have natural equivalences $A \otimes B \xrightarrow{\tau} B \otimes A$ and $A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\alpha} (A \otimes B) \otimes C$. We also require that any diagram made by bracketing $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ in any way and applying α and τ, is commutative. We prove that this is true, if $\tau^2 = 1$ and the following diagrams are commutative:

$$
\begin{tikzcd}
 & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dl, "\alpha"'] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[d, "1 \otimes \alpha"] \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "\alpha \otimes 1"] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[ll, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes C & A \otimes (B \otimes C) \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "1 \otimes \tau"] \\
C \otimes (A \otimes B) \arrow[u, "\tau"] \arrow[d, "\alpha"] & A \otimes (C \otimes B) \arrow[d, "\alpha"] \\
(C \otimes A) \otimes B \arrow[r, "\tau \otimes 1"'] & (A \otimes C) \otimes B
\end{tikzcd}
$$

C.T.C. WALL: An obstruction to finiteness of CW-complexes.

Since a CW-structure is useful in describing a space, it is important to know when such a structure can be replaced by a simpler one on a homotopy equivalent space. The following problem is due to MILNOR: Has each CW-complex, dominated by a finite complex, the homotopy type of a finite complex? We answer: No! Consider the following conditions on a CW-complex X:

(F) $\pi = \pi_1(X)$ is finitely presented, $\Lambda = Z[\pi]$ is noetherian, and all $H_i(\tilde{X})$ are finitely generated Λ-modules.

(C) π and all $H_i(\tilde{X})$ are countable.

(nD) For $i > n$, $H_i(\tilde{X}) = o$, and $H^{n+1}(X; \mathcal{B}) = o$ for all coefficient bundles $\mathcal{B}$.

Theorem: X has the homotopy type of a CW-complex K which, if (F) holds, has finite type; if (C) holds, is countable; if (nD) holds and $n \geq 3$, is n-dimensional. Except, if (F) and (nD) hold, there is an obstruction in the projective class group $K^o(\Lambda)$, depending only on the homotopy type of X, to K being finite. The obstruction takes all values for each $(n-1)$-type of X.

C. MORLET: Les structures différentiables d'une variété linéaire par morceau.

Il s'agit d'une suite au papier de MILNOR "Microfibrés et structures différentiables". MAZUR a démonstré (Séminaire IHES, Paris

1962) que les groupes Γ_i étaient les groupes d'homotopie d'un complexe Γ. Je voudrais parler de ces resultats, et ajouter que l'on a le théorème de classification suivant: Si on note $\Gamma(V)$ l'ensemble des classes des structure différentiables sur une variété linéaire par morceau V, on a un isomorphisme (
$\Gamma(V) \xrightarrow{\cong} \pi_0(V,\Gamma)$.

B STEER: A Geometric Definition of the Generalized Invariant of HOPF.

Let $\alpha \in \pi_n(S^p \vee S^q)$, and let $f : S^n \longrightarrow S^p \vee S^q$ be a representative which is differentiable except in a neighbourhood of $f^{-1}(a)$, where a is the base-point. Let $x \in S^p \setminus a$, $y \in S^q \setminus a$ be points at which f is transverse-regular. Then $f^{-1}(x) = V$ and $f^{-1}(y) = W$ are disjoint framed differentiable submanifolds of S^n.

Let $M,N \subset S^n \times I$ be framed differentiable submanifolds such that

1. $\partial M = V \times 0 \cup V' \times 1$
   $\partial N = W \times 0 \cup W' \times 1$
2. M,N intersect $\partial(S^n \times I)$ transversally
3. V', W' are separated by an equator in $S^n \times 1$.

Arrange that M,N intersect transversally. Then $P = M \cap N$ is a framed submanifold of $S^n \times I \subset S^{n+1}$. We apply the THOM-PONTRJAGIN construction to the manifold P with this framing and receive an element $h'(\alpha) \in \pi_{n+1}(S^{p+q})$. We verify that h' is a well-defined homomorphism from $\pi_n(S^p \vee S^q)$ to $\pi_{n+1}(S^{p+q})$. It is our candidate for the definition of HOPF Invariant. If h denotes the HILTON-HOPF invariant and E suspension we have $h' = (-1)^q Eh$.

G. HIRSCH: Homology and POSTNIKOV Systems.

Let $E \longrightarrow B$ be a fibering with fibre $K(\pi,n)$. If one could compute the cohomology of E, knowing the cohomology of B and the k-invariant, it would be possible to determine recursively the terms of the POSTNIKOV system (i.e., the homotopy groups) of a given space X, by choosing the terms $K(\pi,n)$ and k-invariant in such a way, that the cohomology of the resulting fibre space conincides with the cohomology of X in dimension n+1.

In some cases (when $H^*(X;Z_p)$ is a (truncated) polynomial algebra; when X is an H-space) the cohomology of E can be computed. The simplest example of theorems one uses: If $H^*(B;Zp)$ is a pol.alg.,

and the transgression of the fundamental class of the fibre is a linear combination of generators of $H^*(B;Z_p)$, then $H^*(E;Z_p)$ is a pol.alg., generated by generators of the kernel and the cokernel of the transgression.

It is easy to compute this kernel and cokernel if B is an EILENBERG-MacLANE-space by applying the ADEM-CARTAN relations; at the next stages the computation requires the knowledge of the action of the STEENROD algebra on the cohomology of the base, and this involves in general higher order operations; this can be achieved in some cases.
Applications: A new proof of the periodicity theorem of BOTT and the Theorem of BOREL-HIRZEBRUCH for the homotopy of the unitary group.

T. tom DIECK: Über Kohomologie-Operationen in der K-Theorie.

Sei $k(X) = [X, Z \times B_U]$; B_U klassifiz. Raum der unendlichen unitären Gruppe; T maximaler Torus von U; $j\colon B_T \subset B_U$. Nach ATIYAH-HIRZEBRUCH ist

$$Z[[\sigma_1, \sigma_2, \ldots]] \cong k(B_U) \xrightarrow{j^*} k(B_T) \cong Z[[\mu_1, \mu_2, \ldots]]$$

wobei j_* injektiv und $j_*\sigma_k$ = k-te elementarsymmetr.Fkt. in den $\mu_1, \mu_2, \ldots$. Es gilt:

a) $x \in [B_U, o \times B_U]$ additiv $\Longleftrightarrow$ $j^* x = \sum_{k=1}^{\infty} P(\mu_k)$, wobei $P(\mu)$ Potenzreihe in μ.
b) x additiv und multiplikativ $\Longleftrightarrow$ x ist eine der ADAMSschen Operationen ψ^k.
c) Die Operationen vom Grade eins sind alle trivial.
d) $\pi(B_U, B_U) \longrightarrow \pi(U,U)$ ist surjektiv. Der Kern besteht genau aus den zusammengesetzten Elementen.
e) Teil a) gestattet, die Wirkung des BOTTschen Isomorphismus auf alle Operationen zu berechnen.

$[\ ,\ ]$ ist die freie, $\pi(\ ,\ )$ die punktierte Homotopiemenge.

W. SHIH: <u>On the multiplicative sequence of HIRZEBRUCH.</u>

The relation between the multiplicative sequence and the elementary symmetric functions [1] can be explained by the ring of endomorphisms $\mathcal{E}_H$ of the functor of HIRZEBRUCH: H, which maps each commutative graded algebra with unit $A = \sum_{i \geq 0} A^i$ (over a fixed ring Λ) to the multiplicative subgroup of $\prod_{i \geq 0} A^i$ which consists of

the elements whose o-component is the unit of A.

Theorem: There is one and only one bijective map Ψ: $\mathcal{E}_H \xrightarrow{\cong} \tilde{\Lambda}[[t]]$ from the ring of endomorphisms $\mathcal{E}_H$ onto the subset of power series $\tilde{\Lambda}[[t]]$ with coefficients in Λ whose o-component is the unit, such that Ψ satisfies the condition $(\Psi^{-1}(f))_{\Lambda[t]}(1+t) = f$, where $\Lambda[t]$ is the polynomial algebra. Moreover Ψ transforms the addition of two endomorphisms of H into the product of the corresponding power series, and the composition of two endomorphisms into the operation defined by the elementary smmetric functions.

The module of the group (resp. ring) morphisms of the GROTHENDIECK functor into the composition of H with the cohomology, over the ring $\mathcal{E}_H$, is determined by ATIYAH-HIRZEBRUCH (resp. by tom DIECK).

[1] F. HIRZEBRUCH: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.

H. IBISCH: <u>Über die Spektralfolge relativer Faserungen.</u>

Relative Faserungen sind (grob gesprochen) Faserräume, deren Fasern in verschiedenen Homotopieäquivalenzklassen liegen können. Eine Hindernistheorie für (eine Klasse) solcher Faserungen stammt von M.-H. SCHWARTZ, Bull.Soc.Math.France 88(196o). In der Arbeit "Homotopieeigenschaften relativer Faserungen" MZ 81(1963) wurden Homotopieeigenschaften solcher Räume angegeben. Der angekündigte Vortrag beschreibt den Anfang einer Spektraltheorie für relative Faserungen, und zwar für Faserungen mit lokaler Produktstruktur, deren Basis ein simplizialer Komplex ist. Die klassische Methode von EILENBERG aus dem Sém. CARTAN 5o/51 wird in geeigneter Weise modifiziert und liefert den ersten Spektralterm (ungefähr als direkte Summe der Teilbündelterme) und exakte Sequenzen, welche Beziehungen zwischen den Homologiegruppen der Teilbündel-Basen, denen der Fasern und dem 2. Spektralterm liefern.

R.M.F. MOSS: <u>Products and Secondary Products in the ADAMS Spectral Sequence.</u>

Both the cohomology of the STEENROD algebra and the stable homotopy ring have primary and secondary multiplicative structures. The ADAMS spectral sequence links these two rings together and it is desirable that a way should be found to trace the secondary product behaviour through the sequence. Massey product behaviour in spectral sequences is complicated by various

factors and rather stringent conditions are necessary in order to obtain the behaviour expected. These conditions are satisfied in important parts of the ADAMS sequence. Both the product and secondary product theorems can be proved in the more general sequences where the product in Ext is the YONEDA product and the composition product is used in homotopy.

H.B. BRINKMANN: <u>Zur fromalen Konstruktion der ADAMSschen Spektralfolge.</u>

Die ADAMSsche Spektralfolge läßt sich in jeder stabilen Kategorie mit hinreichend vielen "projektiven" ("injektiven") Objekten begründen (D. PUPPE). Sei $\mathcal{T}$ eine stabile Kategorie, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ seien graduierte abelsche Kategorien. l, k, t seien kovariante Funktoren wie in

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "k"'] & \mathfrak{A} \arrow[d, "t"] \\ & \mathfrak{B} \end{tikzcd}$$

mit: l, k führen stabile (exakte) Dreiecke in exakte Dreiecke über (Homologie), t ist additiv und rechtsexakt. $\rho : k \longrightarrow tl$ sei eine natürliche Transformation. Existiert in $\mathcal{T}$ zu jedem X eine Abbildung $g: Q \longrightarrow X$, so daß $lQ \longrightarrow lX$ surjektiv, lQ projektiv und für jedes $Y \in \mathcal{T}$ die natürliche Transformation $\hom_{\mathcal{T}}(Q,Y) \longrightarrow \hom_{\mathfrak{A}}(lQ,lY)$ $(f \longrightarrow lf)$ isomorph ist (i.e. hinreichend viele "projektive" = l-projektive) und ist $\rho Q: lQ \longrightarrow tkQ$ isomorph, so erhält man eine "ADAMSsche Spektralfolge" mit $E_2X =$ = LtlX (L = Linksderivierter) und einer natürlichen Filterung von X. In Spezialfällen (Anwendungen) können Aussagen über die Konvergenz gemacht werden.

Literatur: D. PUPPE, On the formal structure of stable homotopy theory, Colloquium on Algebraic Topology, August 1 - 1o, 1962, Aarhus Universitet.

P. DEDECKER: <u>Non-abelian Categories.</u>

Let G and H be two non-commutative groups. Then the set Hom(G,H) of homomorphisms $G \longrightarrow H$ is not a group but contains a privileged element: the trivial homomorphism. To a short exact sequence $e \longrightarrow H' \xrightarrow{i} H \xrightarrow{j} H'' \longrightarrow e$ corresponds an exact sequence of based sets $* \longrightarrow \mathrm{Hom}(G,H') \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(G,H) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}(G,H'')$ with i^* injective.

One discusses the following problems:

(i) when do two elements in Hom(G,H) have the same image in Hom(G,H")?

(ii) when is an element in Hom(G,H") be in the image of j_* ? As for (ii), one defines a set Ext(G,H') containing a family of privileged (neutral) elements and a special (zero) element, and a

map δ : Hom(G,H") $\longrightarrow$ Ext(G,H'). An element of Hom(G,H") is in the image of j* iff its δ-image is neutral in Ext(G,H'). The elements of Ext(G,H') correspond actually to some extensions of G with kernel H': the "neutral" elements are associated to split (inessential) extensions and the "zero"element to the direct product. Moreover the sequence admits a prolongation

$$\ldots \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}(G,H") \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}(G,H') \xrightarrow{i_1} \mathrm{Ext}(G,H) \xrightarrow{j_1} \mathrm{Ext}_{\Sigma}(G,H")$$

which is exact in an appropiate sense. For further details: P. DEDECKER, Le foncteur Hom non abélien (to appear in C.R.Acad. Sci. Paris).

M. ANDRÉ: Diverses homotopies.

Dans la catégorie des complexes semi-simpliciaux avec base, notée $\mathcal{K}$ il est possible de définir d'une manière directe les groupes relatifs $\pi_i(\omega)$ pour un morphisme ω quelconque avec des suites exactes de triples. Tout foncteur covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{K}$ donne à $\mathcal{C}$ des groupes absolus et relatifs avec suites exactes. Un premier exemple est l'homotopie classique (ECKMANN-HILTON) avec une généralisation des groupes relatifs: $\Pi_i(\hat{\alpha}, \beta)$ où $\hat{\alpha}$ est l'injection du but de α dans le cône d'application de α, avec des suites exactes faisant intervenir les deux variables. Un deuxième exemple est l'homotopie dite compacte, où $\Pi^c(X,K(G,n)) \cong \check{H}^n(X,G)$, cohomologie de ČECH avec les recouvrements finis seulement, X étant normal.

R. BROWN: The Category of k-Spaces.

Let the category K of k-sapces and continuous maps be invested with the weak product $X \times Y$; the weak compact-open topology on the space X^Y of continuous functions $X \longrightarrow Y$; and the weak relative topology on a subset $A \subset X$. Then for spaces and maps in K we have:

1. If A, B are subspaces of X, Y, then $A \times B$ is a subspace of $X \times Y$.
2. If f, g are identification maps, then $f \times g$ is an identification map.
3. The natural map $X^{Z \times Y} \longrightarrow (X^Y)^Z$ is a homeomorphsm.
4. The natural map $(X \times Y)^Z \longrightarrow X^Z \times Y^Z$ is a homeomorphism.

As is well known, 2. and 3. are false for the category S of all spaces and continuous maps with the usual product and function space. Little is lost in restricting attention to K, since there is a functor $k : S \longrightarrow K$ preserving products, subspaces and (very often) function spaces.

map δ : Hom(G,H") $\longrightarrow$ Ext(G,H'). An element of Hom(G,H") is in the image of j^* iff its δ-image is neutral in Ext(G,H'). The elements of Ext(G,H') correspond actually to some extensions of G with kernel H': the "neutral" elements are associated to split (inessential) extensions and the "zero"element to the direct product. Moreover the sequence admits a prolongation

$$\ldots \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}(G,H") \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}(G,H') \xrightarrow{i_1} \mathrm{Ext}(G,H) \xrightarrow{j_1} \mathrm{Ext}_2(G,H")$$

which is exact in an appropriate sense. For further details:
P. DEDECKER, Le foncteur Hom non abélien (to appear in C.R.Acad. Sci. Paris).

M. ANDRÉ: Diverses homotopies.

Dans la catégorie des complexes semi-simpliciaux avec base, notée $\mathcal{K}$ il est possible de définir d'une manière directe les groupes relatifs $\pi_1(\omega)$ pour un morphisme ω quelconque avec des suites exactes de triples. Tout foncteur covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{K}$ donne à $\mathcal{C}$ des groupes absolus et relatifs avec suites exactes. Un premier exemple est l'homotopie classique (ECKMANN-HILTON) avec une généralisation des groupes relatifs: $\pi_1(\hat{\alpha}, B)$ où $\hat{\alpha}$ est l'injection du but de α dans le cône d'application de α , avec des suites exactes faisant intervenir les deux variables. Un deuxième exemple est l'homotopie dite compacte, où $\pi^c(X,K(G,n)) \cong H^n(X,G)$, cohomologie de ČECH avec les recouvrements finis seulement, X étant normal.

R. BROWN: The Category of k-Spaces.

Let the category K of k-sapces and continuous maps be invested with the weak product $X \times Y$; the weak compact-open topology on the space X^Y of continuous functions $X \longrightarrow Y$; and the weak relative topology on a subset $A \subset X$. Then for spaces and maps in K we have:

1. If A, B are subspaces of X, Y, then $A \times B$ is a subspace of $X \times Y$.
2. If f, g are identification maps, then $f \times g$ is an identification map.
3. The natural map $X^{Z \times Y} \longrightarrow (X^Y)^Z$ is a homeomorphem.
4. The natural map $(X \times Y)^Z \longrightarrow X^Z \times Y^Z$ is a homeomorphism.

As is well known, 2. and 3. are false for the category S of all spaces and continuous maps with the usual product and function space. Little is lost in restricting attention to K, since there is a functor k : S $\longrightarrow$ K preserving products, subspaces and (very often) function spaces.

An alternative way of stating these results is that the functions of convenience in topology are not the continuous functions, but the functions continuous on compact subsets.

J.W. JAWOROWSKI: On mappings of manifolds that are local homeomorphisms outside some point.

Theorem: Let M be a connected closed compact n-manifold different from the projective plane P^2 and let $f: M \longrightarrow M$ be a continuous mapping such that $f(M-a) \subset M-a$, where $a \in M$ is some point, and $f|M-a$ is a local homeomorphism. Then f is a homeomorphism. This theorem is false for the projective plane P^2. For $n > 2$ the result is related to the paper of P.T. CHURCH & E. HEMMINGSEN "Light open mappings on n-manifolds", Duke Math.J.27 (1960), p. 527-536.

S. MARDEŠIĆ: ε-mappings and inverse limits of polyhedra.

Let ε be an open covering of X and $f: X \longrightarrow Y$ a mapping. We say that f is an ε-mapping, provided it is onto and for each $y \in Y$ the set $f^{-1}(y)$ is contained in some member U of ε. Let π be a class of compact polyhedra P. We say that X is π-like, provided for every covering ε of X there is an ε-mapping $f: X \longrightarrow P$ of X onto some member P of π. Let $[\pi]$ denote the class of all π-like HAUSDORFF compact spaces. Clearly, $\pi \subseteq [\pi]$. Example: If π is the class of polyhedra of dimension $\leq n$, then $[\pi]$ is the class of HAUSDORFF compact spaces of covering dimension $\leq n$. If π contains only connected polyhedra, then the following theorems hold good.

Theorem 1: Metric π-like continua X are the same as limits of inverse sequences $\{P_i ; \varkappa_{ij}\}$, i,j = 1,2,3,..., of polyhedra $P_i \in \pi$.

Theorem 2: π-like continua X are the same as limits of inverse systems $\{Q_\alpha ; \varkappa_{\alpha\alpha'}\}$ of metric π-like continua Q_α, and therefore, double iterated limits of polyhedra from π.

G. GRIMEISEN: Das Produkt topologischer Räume in einer Theorie der Limesräume.

Gegeben sei eine Familie $(E_d, \tau_d)_{d \in D}$ topologischer Räume. Es sei f eine Abbildung in das cartesische Produkt $\underset{d \in D}{P} E_d$ der Mengen E_d und $\mathfrak{A}$ ein Filter über dem Definitionsbereich def f von f, ferner τ eine Topologie von PE_d. Mit $A(f, \mathfrak{A}, \tau)$ bezeichnen wir folgende Aussage: Ein Element g von PE_d ist dann und nur dann

An alternative way of stating these results is that the functions of convenience in topology are not the continuous functions, but the functions continuous on compact subsets.

J.W. JAWOROWSKI: <u>On mappings of manifolds that are local homeomorphisms outside some point.</u>

<u>Theorem</u>: Let M be a connected closed compact n-manifold different from the projective plane P^2 and let $f: M \longrightarrow M$ be a continuous mapping such that $f^{-1}(M-a) \subset M-a$, where $a \in M$ is some point, and $f|M-a$ is a local homeomorphism. Then f is a homeomorphism.
This theorem is false for the projective plane P^2. For $n > 2$ the result is related to the paper of P.T. CHURCH & E. HEMMINGSEN "Light open mappings on n-manifolds", Duke Math.J.27 (1960), p. 527-536.

S. MARDEŠIĆ: <u>$\mathcal{E}$-mappings and inverse limits of polyhedra.</u>

Let $\mathcal{E}$ be an open covering of X and $f: X \longrightarrow Y$ a mapping. We say that f is an $\mathcal{E}$-mapping, provided it is onto and for each $y \in Y$ the set $f^{-1}(y)$ is contained in some member U of $\mathcal{E}$. Let π be a class of compact polyhedra P. We say that X is π-like, provided for every covering $\mathcal{E}$ of X there is an $\mathcal{E}$-mapping $f: X \longrightarrow P$ of X onto some member P of π. Let $\{\pi\}$ denote the class of all π-like HAUSDORFF compact spaces. Clearly, $\pi \subseteq \{\pi\}$. Example: If π is the class of polyhedra of dimension $\leq n$, then $\{\pi\}$ is the class of HAUSDORFF compact spaces of covering dimension $\leq n$. If π contains only connected polyhedra, then the following theorems hold good.
Theorem 1: Metric π-like continua X are the same as limits of inverse sequences $\{P_i : \pi_{ij}\}$, $i,j = 1,2,3,\dots$, of polyhedra $P_i \in \pi$.
Theorem 2: π-like continua X are the same as limits of inverse systems $\{Q_\alpha : \pi_{\alpha\alpha'}\}$ of metric π-like continua Q_α, and therefore, double iterated limits of polyhedra from π.

G. GRIMEISEN: <u>Das Produkt topologischer Räume in einer Theorie der Limesräume.</u>

Gegeben sei eine Familie $(E_d, \mathcal{T}_d)_{d \in D}$ topologischer Räume. Es sei f eine Abbildung in das cartesische Produkt $\underset{d \in D}{P} E_d$ der Mengen E_d und $\mathfrak{A}$ ein Filter über dem Definitionsbereich def f von f, ferner $\mathcal{T}$ eine Topologie von PE_d. Mit $A(f, \mathfrak{A}, \mathcal{T})$ bezeichnen wir folgende Aussage: Ein Element g von PE_d ist dann und nur dann

Limespunkt von f bezüglich $\mathfrak{A}$ und τ, wenn für alle $d \in D$ die d-te Projektion $pr_d g$ von g Limespunkt ist von $pr_d \circ f$ bezüglich $\mathfrak{A}$ und τ_d. Bekanntlich ist die Aussage $A(f, \mathfrak{A}, \tau)$ genau dann für alle f und alle $\mathfrak{A}$ richtig, wenn τ das Produkt der Topologien τ_d im Sinne BOURBAKIs ist. Damit ergibt sich eine Möglichkeit, die Produkttopologie durch eine Invarianzforderung für den Limesoperator einzuführen (vgl. hierzu eine Bemerkung von J.L. KELLEY, General Topology, New York 1955, p.73). Sachgemäßer erscheint es, zunächst ein Produkt von Limesräumen (s. etwa G. CHQQUET, Ann. Univ.Grenoble 23 (1948)) einzuführen und daran - auf Grund eineindeutiger Beziehungen zwischen Limes- und topologischen Räumen - die Theorie der Produkttopologie anzuknüpfen. Für die Behandlung des Produkts nichtidempotenter Topologien erweist sich dieser Weg als nützlich.

M. FUCHS: Verallgemeinerte Homotopiehomomorphismen.

Die Konstruktion universeller Prinzipalquasifaserungen zu jedem H-Raum (DOLD-LASHOF, Ill.J.of Math. 13, 1959, p.285-305) induziert einen Funktor B in die Kategorie $\mathcal{T}$ der bogenzshgd. topol. Räume mit nicht ausgeartetem Grundpunkt und Homotopieklassen grundpunkttreuer Abbildungen. Am besten wählt man als Ausgangskategorie dieses Funktors eine Kategorie $\mathcal{H}$, die als Objekte die H-Räume und als Morphismen sog H- Morphismen (Homotopieklassen von verallgemeinerten H-Homomorphismen) besitzt. Die Kategorie der H-Räume und Homotopieklassen von Homomorphismen $\mathcal{G}$ kann durch einen Funktor J in $\mathcal{H}$ abgebildet werden, der auf den Objekten die Identität ist. Mit Hilfe der Konstruktion des Schleifenraumes erhält man ferner einen Funktor $\Omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{G}$. Es gilt: $J\Omega B \sim 1_{\mathcal{H}}$ und $BJ\Omega \sim 1_{\mathcal{T}}$, falls man alle Objekte auf HAUSDORFF-Räume vom Homotopietyp eines abzählbaren CW-Komplexes einschränkt. Daraus folgt: B ist ein bijektiver Funktor. Ferner folgt: In $\mathcal{H}$ ist jeder H-Raum äquivalent zu einer topologischen Gruppe.

T. tom Dieck (Saarbrücken)