

Tagungsbericht

(15)

## G e o m e t r i e

22.-28. September 1963

Auch in diesem Jahr fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach wieder das Kolloquium über Geometrie statt, das nun schon auf eine langjährige Tradition zurückblicken kann. In den vergangenen Jahren sind zwar wiederholt Spezialtagungen über Teilgebiete der Geometrie (so über Grundlagen der Geometrie und diskrete Geometrie) abgehalten worden, und diese durchaus begrüßenswerte Tendenz zu speziellen Kolloquien wird sich künftig noch verstärken. Trotzdem empfanden die Teilnehmer übereinstimmend die Notwendigkeit, die große Geometrie-Tagung im bisherigen Rahmen fortzuführen, weil sie besonders geeignet ist, den Überblick über die weitverzweigte geometrische Forschung aufrecht zu erhalten.

Die Tagung stand wie in früheren Jahren unter der Leitung von Herrn Professor Dr. K. H. WEISE (Kiel) und war von den folgenden 38 Teilnehmern besucht:

BARNER, Prof. Dr. M. (Freiburg)	KUNLE, Prof. Dr. H. (Karlsruhe)
BARTHEL, Dr. W. (Saarbrücken)	LAUGWITZ, Prof. Dr. D. (Darmstadt)
BENZ, Dr. W. (Frankfurt/M.)	LINGENBERG, Dr. R. (Hannover)
BIERI, Dr. H. (Bern)	LENZ, Prof. Dr. H. (München)
BILINSKI, Prof. Dr. S. (Zagreb)	MEYER, P. (Braunschweig)
BLANUŠA, Prof. Dr. D. (Zagreb)	ROETHER, Dipl.-Math. D. (Berlin)
BÖHM, Dr. W. (Berlin)	SCHAAL, Dr. H. (Stuttgart)
BOL, Prof. Dr. G. (Freiburg)	SCHLENDER, Dr. B. (Kiel)
BRAUNER, Prof. Dr. H. (Stuttgart)	STEPHANIDIS, Dr. N. K. (Berlin)
DECUYPER, Prof. Dr. M. (Lille)	STRUBECKER, Prof. Dr. K. (Karlsruhe)
DEGEN, Dr. W. (Karlsruhe)	TOUSSAINT, M. (Karlsruhe)
EWALD, Dr. G. (Mainz)	UHL, A. (Karlsruhe)
GRÖBNER, Prof. Dr. N. (Innsbruck)	VALETTE, Prof. Dr. G. (Zuen, Belgien)
HEIL, E. (Darmstadt)	VOGEL, Dr. W. O. (Karlsruhe)
HELFENSTEIN, Dr. H. (Schwändili)	VOLK, Prof. Dr. O. (Würzburg)
HOSCHEK, J. (Darmstadt)	VOSS, Prof. Dr. K. (Zürich)
KARCHER, H. (Freiburg)	WALTER, Dr. R. (Freiburg)
KARZEL, Prof. Dr. H. (Hamburg)	WEIER, Dr. J. (Bonn)
KASTNER, G. (Darmstadt)	WEISE, Prof. Dr. K. H. (Kiel)



1963/64  
Math. Forschungsinstitut  
Oberwolfach  
E 20 1002

Tagesberichte

Geometrie

22.-28. September 1963

Auch in diesem Jahr fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach wieder das Kolloquium über Geometrie statt, das nun schon auf eine langjährige Tradition zurückblicken kann. In den vergangenen Jahren sind zwar wiederholt Spezialtagungen über Teilgebiete der Geometrie (so über Grundlagen der Geometrie und diskrete Geometrie) abgehalten worden, und diese durchaus begrüßenswerte Tendenz zu speziellen Kolloquien wird sich künftig noch verstärken. Trotzdem empfanden die Teilnehmer übereinstimmend die Notwendigkeit, die große Geometrie-Tagung im bisherigen Rahmen fortzuführen, weil sie besonders geeignet ist, den Überblick über die weitverbreitete geometrische Forschung aufrecht zu erhalten.

Die Tagung stand wie in früheren Jahren unter der Leitung von Herrn Professor Dr. K.H. WEISE (Kiel) und war von den folgenden 38 Teilnehmern besucht:

- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| KUNZE, Prof. Dr. H. (Karlsruhe)         | BARNER, Prof. Dr. M. (Freiburg)   |
| LAUGWITZ, Prof. Dr. D. (Darmstadt)      | BARTHEL, Dr. W. (Saarbrücken)     |
| LINGENBERG, Dr. R. (Hannover)           | BENZ, Dr. W. (Frankfurt/M.)       |
| LENZ, Prof. Dr. H. (München)            | BIERI, Dr. H. (Bern)              |
| MEYER, P. (Brannschweig)                | BILINSKI, Prof. Dr. S. (Zagreb)   |
| ROETHER, Dipl.-Math. D. (Berlin)        | BLANUŠA, Prof. Dr. D. (Zagreb)    |
| SCHAAL, Dr. H. (Stuttgart)              | BÖHM, Dr. W. (Berlin)             |
| SCHLINDER, Dr. B. (Kiel)                | BOL, Prof. Dr. G. (Freiburg)      |
| STEPHANIDIS, Dr. N.K. (Berlin)          | BRAUER, Prof. Dr. H. (Stuttgart)  |
| STRUBBECKER, Prof. Dr. K. (Karlsruhe)   | DECUYPER, Prof. Dr. M. (Lille)    |
| TOUSSAINT, M. (Karlsruhe)               | DEGEN, Dr. W. (Karlsruhe)         |
| UHL, A. (Karlsruhe)                     | EWALD, Dr. G. (Mainz)             |
| VALETTE, Prof. Dr. G. (Zürich, Belgien) | GRÖBNER, Prof. Dr. N. (Innsbruck) |
| VOGEL, Dr. W.O. (Karlsruhe)             | HEIL, E. (Darmstadt)              |
| VOJK, Prof. Dr. O. (Wurzburg)           | HELFENSTEIN, Dr. H. (Schwäbisch)  |
| VOSS, Prof. Dr. K. (Zürich)             | HOSCHER, J. (Darmstadt)           |
| WALTER, Dr. R. (Freiburg)               | KARCHER, H. (Freiburg)            |
| WEIER, Dr. J. (Bonn)                    | KARZEL, Prof. Dr. H. (Hamburg)    |
| WEISE, Prof. Dr. K.H. (Kiel)            | KASTNER, G. (Darmstadt)           |





In einem einleitenden Referat berichtete Herr VOLK (Würzburg) über die Bedeutung der Königsberger Mathematiker für die Entwicklung der Mathematik und insbesondere der Geometrie im 19. Jahrhundert.

Die einzelnen geometrischen Fachvorträge zeigten die gewohnte Vielfalt und streuten über den gesamten Bereich der Geometrie. Im Vordergrund standen wieder die Vorträge über die Differentialgeometrie und Kinematik der verschiedenen Gruppen. Gut vertreten waren daneben auch die Grundlagen der Geometrie; ferner wurde über konvexe Körper, algebraische Geometrie, über topologische Fragen u.a. referiert.

Die Tagungsteilnehmer machten regen Gebrauch von den einzigartigen Möglichkeiten der Diskussion und des Kontaktes im kleineren und größeren Kreis, die das Oberwolfacher Institut dank seiner Eigenart bietet und die den Erfolg der Tagung wesentlich mitbestimmen.

In ihren Grußworten an die Teilnehmer stellten Herr WEISE als Tagungsleiter und Herr BARNER als Institutsdirektor die traditionelle enge Verbundenheit der Geometer mit dem Oberwolfacher Institut heraus. Sie wiesen aber auch eindringlich darauf hin, daß das Institut in seinem gegenwärtigen Stadium des Ausbaus und der Weiterentwicklung auf die Mitarbeit der deutschen Mathematiker und seiner ausländischen Freunde angewiesen ist.

Kurze Zusammenfassungen der 22 gehaltenen Vorträge:

W. BARTHEL (Saarbrücken):

Zur Affingeometrie auf Mannigfaltigkeiten

Die BLASCHKEsche ("inhaltstreue") Affingeometrie des affinen Raumes soll ohne Bezug auf das Erlanger Programm entwickelt und auf Mannigfaltigkeiten übertragen werden. Dazu führen wir auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit zwei Strukturen ein: (1) eine Skalardichte  $f(x) \neq 0$  zur Volumenmessung, (2) einen symmetrischen linearen Zusammenhang  $\Gamma_{k h}^i(x)$ , der volumentreu ist (d.h. bei Parallelverschiebung eines Parallelotops bleibt dessen Volumen invariant). Auf einer Hyperfläche kann dann ein Maßtensor  $g_{\rho\sigma}$  und eine kubische Grundform  $a_{\rho\sigma\tau}$  definiert werden. Diese sind in  $\rho\sigma$  symmetrisch und genügen der Apolaritätsbedingung  $a_{\rho\sigma}{}^\rho = 0$ . Mittels des Affinnormalvektors

$$y^i = \frac{1}{n-1} (g^{\rho\sigma} D_\sigma x_\rho^i - a_\sigma{}^{\rho\sigma} x_\rho^i)$$

erhält man Ableitungsgleichungen in der vertrauten Form. Auf dieser Grundlage wird als Beispiel aus der affinen Hyperflächentheorie die

1. Variation des Affinareals untersucht.



In einem einleitenden Referat berichtete Herr VOLK (Würzburg) über die Bedeutung der Königsberger Mathematiker für die Entwicklung der Mathematik und insbesondere der Geometrie im 19. Jahrhundert.

Die einzelnen geometrischen Fachvorträge zeigten die gewohnte Vielfalt und streuten über den gesamten Bereich der Geometrie. Im Vordergrund standen wieder die Vorträge über die Differentialgeometrie und Kinematik der verschiedenen Gruppen. Gut vertreten waren daneben auch die Grundlagen der Geometrie; ferner wurde über konvexe Körper, algebraische Geometrie, über topologische Fragen u. a. referiert.

Die Tagungsteilnehmer machten regen Gebrauch von den einseitigen Möglichkeiten der Diskussion und des Kontaktes im kleineren und größeren Kreis, die das Oberwolfacher Institut dank seiner Eigenart bietet und die den Erfolg der Tagung wesentlich mitbestimmen.

In ihren Grußworten an die Teilnehmer stellten Herr WEISE als Tagungsleiter und Herr BARNER als Institutsdirektor die traditionelle enge Verbundenheit der Geometer mit dem Oberwolfacher Institut heraus. Sie wiesen aber auch eindringlich darauf hin, daß das Institut in seinem gegenwärtigen Stadium des Ausbaus und der Weiterentwicklung auf die Mitarbeit der deutschen Mathematiker und seiner ausländischen Freunde angewiesen ist.

Kürze Zusammenfassungen der 22 gehaltenen Vorträge:

W. BARTHEL (Sasrielken):  
Zur Affingeometrie auf Mannigfaltigkeiten

Die BLASCHKEsche ("Inhaltstreue") Affingeometrie des affinen Raumes soll ohne Bezug auf das Erlanger Programm entwickelt und auf Mannigfaltigkeiten übertragen werden. Dazu führen wir auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit zwei Strukturen ein: (1) eine Skalarfunktion  $f(x) \neq 0$  zur Volumenmessung, (2) einen symmetrischen linearen Zusammenhang  $\Gamma_{ik}^j(x)$ , der volumentreu ist (d. h. bei Parallelverschiebung eines Parallelotops bleibt dessen Volumen invariant). Auf einer Hyperfläche kann dann ein Maßtensor  $g_{ik}$  und eine kubische Grundform  $\alpha_{ijk}$  definiert werden. Diese sind in  $g_{ik}$  symmetrisch und genügen der Apolaritätsbedingung  $\alpha_{ijk} = 0$ . Mittels des Affinormalvektors

$$v^i = \frac{1}{n-1} (\epsilon_{ijk} D^k x^j - \alpha_{ijk} x^j)$$

erhält man Ableitungsgleichungen in der verputzten Form. Auf dieser Grundlage wird als Beispiel aus der affinen Hyperflächenentheorie die 1. Variation des Affinraums untersucht.





W.BENZ (Frankfurt/M.):

Zur Geometrie über dem SCHMIEDEN-LAUGWITZ-Ring

Jedem kommutativen, formal-reellen Ring  $f$  mit 1-Element wird eine affine Parallelstruktur mit Nachbarelementen  $\sum(f)$  so zugeordnet, daß  $\sum(f)$  zur klassischen affinen Ebene resp. zur HJELMSLEVschen Geometrie der Wirklichkeit führt, wenn  $f$  der Körper der reellen Zahlen resp. der Ring der dualen Zahlen über dem Körper der reellen Zahlen ist. Die Nachbarrelation stellt sich als transitiv heraus genau dann, wenn  $f$  Stellenring ist.

Der wichtige Fall, daß  $f$  der Ring der  $\Omega$ -rationalen Zahlen  $P^\Omega$  (SCHMIEDEN, LAUGWITZ, Math. Zeitschr. 69 (1958), 1-39) ist (hier liegt kein Stellenring vor), wird im Rahmen allgemeinerer Betrachtungen auf Verknüpfungs-, Winkel-, Orthogonalitätseigenschaften untersucht. Die Automorphismengruppe von  $\sum(P^\Omega)$  wird bestimmt.

H.BIERI (Bern):

Neue Mitteilungen über extremale konvexe Rotationskörper

Ausgehend von der Integraldarstellung der Maßzahlen eines beliebigen konvexen Rotationskörpers im  $R_3$

$$M = \pi^2 a + \pi \int_0^\pi (a - r) \sin^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$F = 2\pi a^2 + \int_0^\pi (a^2 - r^2) \sin \alpha \cdot \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \int_0^\pi (a^3 - r^3) \cdot \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

konnte H.HADWIGER, Bern, zwei einparametrische Scharen von linearen Ungleichungen aufstellen, welche die Grundlage für die vollständige Lösung des Problems der extremalen Rotationskörper bilden.

Für Halbkörper (Äquatorradius am Rand) lauten dieselben:

I  $3 \sin^2 \alpha \cdot V - 2a \cdot \sin \alpha \cdot F + a^2 M \leq \varphi(a, \alpha, b, \beta)$

II  $\sin^2 \alpha \cdot V - a \cdot \sin \alpha \cdot F + a^2 M \geq \psi(a, \alpha, \beta, b)$ ,

wobei  $a, b$  die beiden Randradien,  $\alpha, \beta$  die beiden Randwinkel bedeuten.

In beiden Fällen gilt das Gleichheitszeichen für die Klasse der abgestumpften Kappenkörper der Kugellinse mit ihren mannigfachen Ausar-



Jedem kommutativen, formal-reellen Ring  $\mathbb{F}$  mit 1-Element wird eine af-  
 fine Parallelstruktur mit Nachbarelementen  $\sum(\mathbb{F})$  so zugeordnet, daß  
 $\sum(\mathbb{F})$  zur klassischen affinen Ebene resp. zur HELMSELSVASCHEN Geometrie  
 der Wirklichkeit führt, wenn  $\mathbb{F}$  der Körper der reellen Zahlen resp. der  
 Ring der dualen Zahlen über dem Körper der reellen Zahlen ist. Die Nach-  
 barrelation stellt sich als transitiv heraus genau dann, wenn  $\mathbb{F}$  Steifen-  
 ring ist.

Der wichtige Fall, daß  $\mathbb{F}$  der Ring der  $\mathbb{Q}$ -rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  (SCHWIE-  
 DEN, LAUGWITZ, Math. Zetschr. 69 (1958), 1-39) ist (hier liegt kein Steif-  
 lenring vor), wird im Rahmen allgemeinerer Betrachtungen auf Verknüp-  
 fungs-, Winkel-, Orthogonalitätseigenschaften untersucht. Die Automor-  
 phismengruppe von  $\sum(\mathbb{Q})$  wird bestimmt.

H. BIRRI (Bern):  
Neue Mittelungen über extreme konvexe Rotationskörper

Ausgehend von der Integraldarstellung der Maßzahlen eines beliebigen  
 konvexen Rotationskörpers im  $\mathbb{R}^3$

$$M = \int_0^\pi \left( a - r \sin^2 \alpha \right) \frac{da}{\cos^2 \alpha} + \pi a^2$$

$$F = \int_0^\pi \left( a^2 - r^2 \sin^2 \alpha \right) \frac{da}{\cos^2 \alpha} + 2\pi a r^2$$

$$V = \int_0^\pi \left( \frac{\pi}{2} a^3 - r^2 a \right) \frac{da}{\cos^2 \alpha}$$

konnte H. HADWIGER, Bern, zwei einparametrische Scharen von linearen Un-  
 gleichungen aufstellen, welche die Grundlage für die vollständige Lö-  
 sung des Problems der extremalen Rotationskörper bilden.

Für Halbkörper (Äquatorradius am Rand) lauten dieselben:

- I  $3 \sin^2 \alpha \cdot V - 2a \cdot \sin \alpha \cdot F + a^2 M \geq 0(a, \alpha, b, a)$
- II  $\sin^2 \alpha \cdot V - a \cdot \sin \alpha \cdot F + a^2 M \geq 0(a, \alpha, b, a)$

wobei  $a, b$  die beiden Randradien,  $\alpha, \beta$  die beiden Randwinkel bedeuten.

In beiden Fällen gilt das Gleichheitszeichen für die Klasse der abge-  
 stumpften Kappenkörper der Kugelkapseln mit ihren mannigfachen Ausar-  
 tungsformen und nur für diese Körper.





I konnte durch Fallenlassen von Bedingungen über  $b$  und  $\beta$  reduziert werden auf

$$I' \quad 3 \sin^2 \alpha \cdot V - 2a \cdot \sin \alpha \cdot F + a^2 M \leq \bar{\varphi}(a, \alpha)$$

Die zugehörigen Extremalkörper sind diesmal die Kappenkörper der Kugellinse. Für II muß eine Reduktion noch geleistet werden.

Für Nichthalbkörper sind Modifikationen anzubringen. Die endgültige Lösung des genannten Problems wird jetzt nur noch Eliminationen erfordern, dürfte aber doch noch erhebliche technische Schwierigkeiten bieten.

W. BOHM (Berlin):

St. BILINSKI (Zagreb):

Vektoren in der hyperbolischen Ebene

Durch Einführung gewisser imaginärer Vektoren, die formal analytisch definiert sind, kann man mit Hilfe der elementaren Vektorrechnung auf Grund der Eigenschaften dieser Vektoren die analytische Geometrie und die Differentialgeometrie der hyperbolischen Ebene auf einfache Weise darstellen. Erteilt man aber diesen Vektoren auch die Bedeutung von Ortsvektoren im komplexen Euklidischen Raum, so wird durch diese Festsetzung eine Abbildung der ganzen hyperbolischen Ebene auf zwei imaginäre zweidimensionale Schalen der reellen Kugelfläche gegeben. Es zeigt sich, daß diese Abbildung konform und quasiisometrisch ist. Dadurch bekommt man eine Interpretation der hyperbolischen Geometrie, die als heuristisches Hilfsmittel bei analytischen und differentialgeometrischen Betrachtungen sehr nützlich sein kann.

D. BLANUŠA (Zagreb):

Isometrische Einbettung des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes in einen (6n-4)-dimensionalen sphärischen Raum

Es wird von den Gleichungen der Pseudosphäre in Parameterform ausgegangen, wobei die Parameter so gewählt sind, daß sie den Koordinaten im POINCARÉschen Modell der hyperbolischen Ebene entsprechen. Denkt man sich die hyperbolische Ebene durch Grenzkreise mit unendlich fernem gemeinsamem Mittelpunkt in Streifen zerlegt, so kann man sich jeden dieser Streifen auf einen Teil einer Pseudosphäre aufgewickelt denken. Durch Erhöhung der Dimensionszahl des euklidischen Einbettungsraumes auf 5 gelingt es, diese eingerollten Streifen unendlich glatt aneinanderzuheften und durch weitere Erhöhung auf 7 sie aufzublättern, womit eine isometrische Einbettung der hyperbolischen Ebene im  $R_7$



I konnte durch Fallunterschieden von Bedingungen über  $\rho$  und  $\delta$  reduziert werden auf

$$I' \quad 2 \sin^2 \alpha \cdot V - 2a \cdot \sin \alpha \cdot F + a^2 M \leq \bar{\phi}(a, \alpha)$$

Die zugehörigen Extremalkörper sind diesmal die Kappenkörper der Kugel linse. Für II muß eine Reduktion noch geleistet werden.

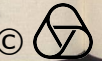
Für Nichtalkörper sind Modifikationen anzubringen. Die endgültige Lösung des genannten Problems wird jetzt nur noch Eliminationen erfordern dürfte aber doch noch erhebliche technische Schwierigkeiten bieten.

St. BILINSKI (Zagreb): Vektoren in der hyperbolischen Ebene

Durch Einführung gewisser imaginärer Vektoren, die formal analytisch definiert sind, kann man mit Hilfe der elementaren Vektorrechnung auf Grund der Eigenschaften dieser Vektoren die analytische Geometrie und die Differentialgeometrie der hyperbolischen Ebene auf einfache Weise darstellen. Erstellt man aber diesen Vektoren auch die Bedeutung von Ortsvektoren im komplexen Euklidischen Raum, so wird durch diese Festsetzung eine Abbildung der ganzen hyperbolischen Ebene auf zwei imaginäre zweidimensionale Schalen der reellen Kugelfläche gegeben. Es zeigt sich, daß diese Abbildung konform und quasikonform ist. Dadurch bekommt man eine Interpretation der hyperbolischen Geometrie, die als heuristisches Hilfsmittel bei analytischen und differentialgeometrischen Betrachtungen sehr nützlich sein kann.

D. BLANUŠA (Zagreb): Isometrische Einbettung des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes in einen (2n-1)-dimensionalen sphärischen Raum

Es wird von den Gleichungen der Pseudosphäre in Parameterform ausgegangen, wobei die Parameter so gewählt sind, daß sie den Koordinaten im POINCARÉschen Modell der hyperbolischen Ebene entsprechen. Denkt man sich die hyperbolische Ebene durch Grenzkreis mit unendlichem gemeinsamen Mittelpunkt in Streifen zerlegt, so kann man sich jeden dieser Streifen auf einen Teil einer Pseudosphäre aufwickeln denken. Durch Erhöhung der Dimensionenzahl des euklidischen Einbettungsraumes auf 2 gelingt es, diese eingewickelten Streifen unendlich hintereinander zu verketten und durch weitere Erhöhung auf  $\infty$  sie aufzublöhen, womit eine isometrische Einbettung der hyperbolischen Ebene im  $R^{\infty}$





(7-dimensionalen euklidischen Raum) erhalten ist. Durch eine weitere Erhöhung auf 9 und geeignete analytische Kunstgriffe erreicht man, daß die Quadratsumme der in Funktion der zwei Flächenparameter ausgedrückten Koordinaten des Einbettungsraumes konstant wird, womit eine Einbettung der hyperbolischen Ebene im  $S_8$  (8-dimensionalen sphärischen Raum) konstruiert ist. Schließlich gelingt die Verallgemeinerung auf den Fall eines  $R_n$  in einem  $S_{6n-4}$ .

W.BÖHM (Berlin):

Achtflachgefüge und Satz von IVORY

Für zwei, aus den Ebenen eines Gewindes 4.Klasse, 1.Art gebildete Oktaeder A und A' gilt: Liegt ein Gegeneckenpaar von A auf einem Kegelschnitt, der A' einbeschrieben ist, so liegt auch jedes der beiden anderen Gegeneckenpaare auf je einem A' einbeschriebenen Kegelschnitt. Auf allen drei Kegelschnitten sind die Doppelverhältnisse der Gegenecken und Schnitte mit einer weiteren Ebene des Gewindes gleich.

Durch eine einfache Abbildung läßt sich daraus eine Verallgemeinerung des Satzes von IVORY und durch Spezialisierung der Satz von IVORY selbst herleiten. - Die Beweise werden synthetisch geführt.

H.BRAUNER (Stuttgart):

Windschiefe Flächen konstanter konischer Krümmung

Die windschiefen Flächen konstanter konischer Krümmung besitzen als Richtkegel Drehkegel und können ausgehend von der Gratlinie ihrer asymptotischen Torse nach Vorgabe des Dralls einfach analytisch erfaßt werden. Verwendet man den Fernkreis ihres Richtkegels als Maßgebilde einer pseudo-euklidischen Metrik, so erscheinen sie als Kanalflächen im Sinne dieser Metrik. Von besonderem Interesse sind speziell die Flächen konstanten Dralls unter ihnen und algebraische Exemplare. Es werden alle kubischen und biquadratischen Flächen dieser Art bestimmt. Läßt man windschiefe Flächen mit isotropen Erzeugenden zu, so erhält man einen Zugang zur Theorie der MONGESchen Flächen, und die oben erwähnten algebraischen Exemplare führen u.a. auf die windschiefen DARBOUXschen Zykliden.



( $n$ -dimensionalen euklidischen Raum) erhalten ist. Durch eine weitere Erhöhung auf  $n$  und geeignete analytische Kunstgriffe erreicht man, daß die Quadratsumme der in Funktion der zwei Flächenparameter ausgedrückten Koordinaten des Einbettungsraumes konstant wird, womit eine Einbettung der hyperbolischen Ebene im  $S_8$  ( $8$ -dimensionalen euklidischen Raum) konstruiert ist. Schließlich gelingt die Verallgemeinerung auf den Fall eines  $R_n$  in einem  $S_{2n-4}$ .

W. BÖHM (Berlin):

Achtflächelute und Satz von IVORY

Für zwei, aus den Ebenen eines Gewinnes 4. Klasse, 1. Art gebildete Oktaeder  $A$  und  $A'$  gilt: Liegt ein Gegenpaar von  $A$  auf einem Kegelschnitt, der  $A'$  eingeschrieben ist, so liegt auch jedes der beiden anderen Gegenpaare auf je einem  $A'$  eingeschriebenen Kegelschnitt. Auf allen drei Kegelschnitten sind die Doppelverhältnisse der Gegenpaare und Schnitte mit einer weiteren Ebene des Gewinnes gleich. Durch eine einfache Abbildung läßt sich daraus eine Verallgemeinerung des Satzes von IVORY und durch Spezialisierung der Satz von IVORY selbst herleiten. - Die Beweise werden synthetisch geführt.

H. BRAUNER (Stuttgart):

Windschleife Flächen konstanter Krümmung

Die windschiefen Flächen konstanter Krümmung besitzen als Richtkegel Drehkegel und können ausgehend von der Geraden ihrer asymptotischen Torse nach Vorgabe des Dralls einfach analytisch erfaßt werden. Verwendet man den Fernkreis ihres Richtkegels als Maßgebendes einer pseudo-euklidischen Metrik, so erscheinen sie als Kanalfächen im Sinne dieser Metrik. Von besonderem Interesse sind speziell die Flächen konstanter Dralls unter ihnen und algebraische Exemplare. Es werden alle kubischen und biquadratischen Flächen dieser Art bestimmt. Läßt man windschiefe Flächen mit isotropen Erzeugenden zu, so erhält man einen Zugang zur Theorie der MONGER'SCHEN Flächen, und die oben erwähnten algebraischen Exemplare führen u. a. auf die windschiefen DARBOUX'SCHEN Zyklien.





O. EWALD (Mainz):

Über die Schattengrenzen konvexer Körper

M. DECUYPER (Lille):

Sur des suites de LAPLACE particulières

Soit dans l'espace projectif  $E_n$  de dimension  $n$  une suite de LAPLACE  $\dots M_{-1} M_0 M_1 M_2 \dots$  engendrée à partir d'un réseau conjugué  $(M_1)$ . On dit qu'un réseau  $(M_i)$  de la suite est un réseau de ROZET généralisé  $R_k$  si les  $k$  premiers transformés de LAPLACE dans un sens et les  $n+1-k$  transformés dans l'autre sens appartiennent à un même hyperplan. On démontre (GOLDBERG) que si deux réseaux consécutifs  $(M_i)$  et  $(M_{i+1})$  sont  $R_k$ , tous les réseaux  $(M_j)$  de la suite le sont.

On donne les applications de cette propriété à la théorie des axes d'un réseau conjugué dans  $E_3$  et à la suite de LAPLACE qui dans  $E_5$  est associée aux images de PLÜCKER des tangentes asymptotiques d'une surface de  $E_3$ .

N. GRÜNER (Innsbruck):

W. DEGEN (Karlsruhe):

Projektive Fluchtbewegungen und dadurch erzeugbare konjugierte Netze

Nach einigen Ausführungen über projektive Bewegungen werden die Fluchtbewegungen definiert: Es sind solche, deren sämtliche, zur Zeit  $t$  gehörenden Bahntangenten sich in einem Punkte treffen. Diese Punkte beschreiben die Gangpolkurve, die von einer Schar von Rastpolkurven eingehüllt wird. Die übrigen momentanen Fixpunkte erfüllen eine Ebene  $E_t$ . Die Rastpolkurven berühren die Gangpolkurve sogar in 2. Ordnung.

Es folgt eine nähere Untersuchung der Fluchtbewegungen (Kennzeichnung, Eigenschaften der Bahnkurven, Erzeugung). Setzt man eine beliebige Kurve in eine Fluchtbewegung ein, so entsteht ein konjugiertes Netz mit einer Schar ( $s$ -Kurven) von Kegelschattengrenzen. Weiter wird gezeigt: Die den  $s$ -Kurven entsprechenden Kurven auf der LAPLACE-Transformierten (in  $s$ -Richtung) sind ebene Kurven; ihre Ebenen sind  $E_t$ . Das Hauptergebnis ist die Umkehrung hiervon: Ein konjugiertes Netz mit einer Schar von Kegelschattengrenzen und ebenen Kurven auf der LAPLACE-Transformierten läßt sich immer in einer Fluchtbewegung erzeugen; insbesondere sind die Kurven der ersten Schar projektiv äquivalent.



M. DECUYPER (Lille):

Sur des suites de LAPLACE partielles

Soit dans l'espace projectif  $E_n$  de dimension  $n$  une suite de LAPLACE  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  engendrée à partir d'un réseau conjugué  $(M_i)$ . On dit qu'un réseau  $(M_i)$  de la suite est un réseau de ROZET généralisé  $R_k$  si les  $k$  premiers transformés de LAPLACE dans un sens et les  $n+1-k$  transformés dans l'autre sens appartiennent à un même hyperplan. On démontre (GOLDBERG) que si deux réseaux consécutifs  $(M_i)$  et  $(M_{i+1})$  sont  $R_k$ , tous les réseaux  $(M_j)$  de la suite le sont.

On donne les applications de cette propriété à la théorie des axes d'un réseau conjugué dans  $E_3$  et à la suite de LAPLACE qui dans  $E_3$  est associée aux images de PLÜCKER des tangentes asymptotiques d'une surface de  $E_3$ .

W. DEGEN (Karlsruhe):

Projektive Fluchtbewegungen und dadurch erzeugbare konjugierte

Netze

Nach einigen Ausführungen über projektive Bewegungen werden die Fluchtbewegungen definiert: Es sind solche, deren sämtliche, zur Zeit  $t$  gehörenden Bahnantangenten sich in einem Punkte treffen. Diese Punkte beschreiben die Gangpolkurve, die von einer Schar von Raspolkurven erfüllt wird. Die übrigen momentanen Fixpunkte erfüllen eine Ebene  $E_1$ . Die Raspolkurven berühren die Gangpolkurve sogar in 2. Ordnung.

Es folgt eine nähere Untersuchung der Fluchtbewegungen (Konzelehnung, Eigenschaften der Bahnkurven, Erzeugung). Setzt man eine beliebige Kurve in eine Fluchtbewegung ein, so entsteht ein konjugiertes Netz mit einer Schar ( $s$ -Kurven) von Kegelschnittengrenzen. Weiter wird gezeigt: Die den  $s$ -Kurven entsprechenden Kurven auf der LAPLACE-Transformierten (in  $s$ -Richtung) sind ebene Kurven; ihre Ebenen sind  $E_1$ . Das Hauptergbnis ist die Umkehrung hiervon: Ein konjugiertes Netz mit einer Schar von Kegelschnittengrenzen und ebenen Kurven auf der LAPLACE-Transformierten läßt sich immer in einer Fluchtbewegung erzeugen; insbesondere sind die Kurven der ersten Schar projektiv äquivalent.





G. EWALD (Mainz):

Über die Schattengrenzen konvexer Körper

Sei  $K$  ein  $n$ -dimensionaler konvexer Körper im  $E^n$ . Ein beliebiger  $r$ -dimensionaler Unterraum  $\mathcal{R}$  von  $E^n$  durch einen fest gewählten Punkt  $z$  werde durch einen Einheitsvektor auf dem GRASSMANN-Kegel  $G_r^n$  dargestellt. Die  $(n-r)$ -dimensionalen Stützräume von  $K$ , die auf  $\mathcal{R}$  senkrecht stehen, bilden einen Zylinder  $Z(K, \mathcal{R})$ . Wir nennen  $Z(K, \mathcal{R}) \cap K$  eine  $r$ -Schattengrenze von  $K$ . Sie heißt unscharf, wenn eine Erzeugende von  $Z(K, \mathcal{R})$  den Körper  $K$  in mindestens zwei Punkten trifft.

Satz: Die unscharfen  $r$ -Schattengrenzen von  $K$  ergeben auf der Indikatrix  $I_r^n$  von  $G_r^n$  eine Menge mit  $r(n-r)$ -dimensionalem LEBESGUESchem Maß  $0$  (bezüglich  $I_r^n$ ).

Weitere Eigenschaften solcher Schattengrenzen werden hergeleitet, und es wird auf Anwendungen in der Theorie konvexer Funktionen hingewiesen.

N. GRÖBNER (Innsbruck):

VERONESEsche Mannigfaltigkeiten vom Standpunkt der Idealtheorie

VERONESEsche Mannigfaltigkeiten können als birationale Transformationen des Nullideals in  $K[y_0, \dots, y_n]$  vermöge der Transformationsformeln

$$x_{(i)} = y_0^{i_0} y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n} \quad (i_0 + i_1 + \dots + i_n = m) \text{ gedeutet werden; sie liegen in einem projektiven Raum der Koordinaten } x_{(i)} \text{ der Dimension } N = \binom{m+n}{n} - 1 \text{ und werden von } \binom{N+2}{2} - \binom{2m+n}{n} \text{ Quadriken } x_{(i)}x_{(k)} - x_{(j)}x_{(l)} \text{ erzeugt } [(i)+(k) = (j)+(l)]. \text{ Die HILBERTfunktion des Ideals ist } H(t; \mathcal{I}) = \binom{mt+n}{n} \text{ woraus sich die Ordnung der Mannigfaltigkeit } m^n \text{ und das virtuelle arithmetische Geschlecht } 0 \text{ ergibt. Die projektiven Transformationen der } y \text{ induzieren projektive Transformationen der } x, \text{ die die VERONESEsche Mannigfaltigkeit in sich transformieren. Sie ist ferner perfekt, also ihr Schnitt mit } n \text{ genügend allgemeinen Hyperflächen ungemischt } 0\text{-dimensional.}$$

H. KARZEL (Hamburg):

Beziehungen zwischen Gruppenräumen und absoluten Ebenen

Es sei  $E$  ein Erzeugendensystem einer Gruppe  $G$  mit der Eigenschaft, daß die Menge  $E^2 = \{xy ; x, y \in E\}$  eine Untergruppe von  $G$  ist. Dieser Gruppe wird eine geometrische Struktur  $E(G)$  zugeordnet, indem die Elemente aus  $E^2$  als Punkte, die aus  $E^3$  als Hyperebenen gedeutet werden und die



G. EWALD (Mainz):

Über die Schattengrenzen konvexer Körper

Sei  $K$  ein  $n$ -dimensionaler konvexer Körper im  $E^n$ . Ein beliebiger  $r$ -dimensionaler Unterraum  $\mathbb{K}$  von  $E^n$  durch einen fest gewählten Punkt  $z$  werde durch einen Einheitsvektor auf dem GRASSMANN-Kegel  $G_r^n$  dargestellt. Die  $(n-r)$ -dimensionalen Stützräume von  $K$ , die auf  $\mathbb{K}$  senkrecht stehen, bilden einen Zylinder  $Z(K, \mathbb{K})$ . Wir nennen  $Z(K, \mathbb{K}) \cap G_r^n$  eine  $r$ -Schatten-Grenze von  $K$ . Sie heißt unschärf, wenn eine Erzeugende von  $Z(K, \mathbb{K})$  den Körper  $K$  in mindestens zwei Punkten trifft.

Satz: Die unschärfe  $r$ -Schattengrenzen von  $K$  ergeben auf der Indikator  $I_r^n$  von  $G_r^n$  eine Menge mit  $(n-r)$ -dimensionalem LEBESGUESCHEM MAß  $0$  (bezüglich  $I_r^n$ ).

Weitere Eigenschaften solcher Schattengrenzen werden hergeleitet, und es wird auf Anwendungen in der Theorie konvexer Funktionen hingewiesen.

H. GRÖBNER (Innsbruck):

VERONESISCHE MANNIGFALTIGKEITEN VOM STANDPUNKT DER IDEALTHEORIE

VERONESISCHE MANNIGFALTIGKEITEN können als birationale Transformationen des Nullideals in  $K[x_0, \dots, x_n]$  vermöge der Transformationsformeln  $x(1) = y_0 y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n} (1_0 + 1_1 + \dots + 1_n = m)$  gebildet werden; sie liegen in einem projektiven Raum der Dimension  $N = \binom{m+n}{n}$  und werden von  $\binom{N+2}{2} - \binom{2m+n}{n}$  Quadriken  $x(1) x(k) - x(j) x(l)$  erzeugt. Die HILBERTFUNKTION des Ideals ist  $H(t) = \binom{m+n}{n} [(1)+(k) = (j)+(l)]$ . Die HILBERTFUNKTION des Ideals ist  $H(t) = \binom{m+n}{n}$  woraus sich die Ordnung der Mannigfaltigkeit  $m$  und das virtuelle arithmetische Geschlecht  $0$  ergibt. Die projektiven Transformationen der  $n$ -dimensionalen projektiven Transformationen der  $x$ , die die VERONESISCHE MANNIGFALTIGKEIT in sich transformieren. Sie ist ferner geradlinig, also ihr Schnitt mit  $n$  genügend allgemeinen Hyperebenen ungerade  $0$ -dimensional.

H. KARZEL (Hamburg):

Beziehungen zwischen Gruppenräumen und absoluten Ebenen

Es sei  $E$  ein Erzeugendensystem einer Gruppe  $G$  mit der Eigenschaft, daß die Menge  $E^2 = \{xy : x, y \in E\}$  eine Untergruppe von  $G$  ist. Dieser Gruppe wird eine geometrische Struktur  $E(G)$  zugeordnet, indem die Elemente aus  $E^2$  als Punkte, die aus  $E^2$  als Hyperebenen gebildet werden und die





H. SCHAAL (Stuttgart):

Inzidenz zwischen einer Hyperebene  $\langle \alpha \rangle$  und einem Punkt  $\beta$  durch " $\langle \alpha \rangle \text{I} \beta \Leftrightarrow \alpha \beta \in E$ " erklärt wird. Insbesondere werden die Gruppenräume (verallgemeinerter) absoluter Ebenen betrachtet. Diese kann man zu dreidimensionalen projektiven Räumen vervollständigen. Die verschiedenen Klassen absoluter Ebenen lassen sich durch Eigenschaften der zugehörigen Gruppenräume beschreiben.

H. LENZ (München):

Topologische projektive Räume

Über die Einführung einer Topologie in die projektive Geometrie der Ebene hat H. SALZMANN seit 1955 gearbeitet. Über die - einfachere - Frage der Topologisierung der räumlichen projektiven Geometrie gibt es fast keine Literatur. Der naheliegende algebraische Ansatz ist: Man versehe einen Vektorraum  $K^{n+1} = K \times \dots \times K$  über einem topologischen Körper mit der Produkttopologie und gehe zur Quotiententopologie hinsichtlich der Proportionalität von Vektoren über. Als synthetischer Ansatz eignet sich folgender: Die Menge der Punkte sei mit einer Topologie versehen, so daß die Zentralprojektionen des Raumes auf eine Hyperebene immer stetig sind.

Einige Existenzfragen in der Liniengeometrie

R. LINGENBERG (Hannover):

Die Gruppe einer projektiven Dualität

Sei  $\pi$  eine projektive Ebene, in der der Satz von PAPPUS-PASCAL gilt, und  $K$  ihr Koordinatenkörper. Ist  $\delta$  eine projektive Dualität, so soll  $B(\delta)$  die Gruppe aller projektiven Kollineationen mit  $\alpha^{-1} \delta \alpha = \delta$  sein. Man kann dann eine vollständige Übersicht über alle Gruppen  $B(\delta)$  angeben, für welche die Kollineation  $\delta^2$  mindestens zwei Fixpunkte besitzt. Von besonderer Bedeutung sind dabei folgende Fälle: Ist  $\delta$  eine perspektive Polarität und Charakteristik  $K \neq 2$ , so ist die Gruppe  $B(\delta)$  zu einer eigentlich-orthogonalen Gruppe  $O_3^+(K, f)$  über  $K$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $f$  vom Rang 3 isomorph. Ist  $\delta$  eine perspektive Dualität, so ist die Gruppe  $B(\delta)$  zu der speziellen linearen Gruppe  $SL_2(K)$  über  $K$  isomorph. Ist  $\delta^2$  eine perspektive Kollineation  $\neq 1$  und keine perspektive Dualität, so ist die Gruppe  $B(\delta)$  zu einer orthogonalen Gruppe  $O_2(K, F)$  über  $K$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $F$  vom Rang 2 isomorph.





Inzidenz zwischen einer Hyperebene  $\langle \alpha \rangle$  und einem Punkt  $B$  durch " $\langle \alpha \rangle \cap B \neq \emptyset$ " erklärt wird. Insbesondere werden die Gruppenräume (verallgemeinerter) absoluter Ebenen betrachtet. Diese kann man zu dreidimensionalen projektiven Räumen vervollständigen. Die verschiedenen Klassen absoluter Ebenen lassen sich durch Eigenschaften der zugehörigen Gruppenräume beschreiben.

H. LENZ (München):

Topologische projektive Räume

Über die Einführung einer Topologie in die projektive Geometrie der Ebene hat H. SALZMANN seit 1955 gearbeitet. Über die - einfachere - Frage der Topologisierung der räumlichen projektiven Geometrie gibt es fast keine Literatur. Der naheliegende algebraische Ansatz ist: Man versuche einen Vektorraum  $K^{n+1} = Kx \dots x_n$  über einem topologischen Körper mit der Produkttopologie und gehe zur Quotiententopologie hinsichtlich der Proportionalität von Vektoren über. Als synthetischer Ansatz eignet sich folgender: Die Menge der Punkte sei mit einer Topologie versehen, so daß die Zentralprojektionen des Raumes auf eine Hyperebene immer stetig sind.

R. LINGENBERG (Hannover):

Die Gruppe einer projektiven Dualität

Sei  $\pi$  eine projektive Ebene, in der der Satz von PAPPUS-PASCAL gilt, und  $K$  ihr Koordinatenkörper. Ist  $\delta$  eine projektive Dualität, so soll  $B(\delta)$  die Gruppe aller projektiven Kollineationen mit  $\delta^{-1} \circ \alpha = \delta \circ \alpha$  sein. Man kann dann eine vollständige Übersicht über alle Gruppen  $B(\delta)$  angeben, für welche die Kollineation  $\delta^2$  mindestens zwei Fixpunkte besitzt. Von besonderer Bedeutung sind dabei folgende Fälle: Ist  $\delta$  eine perspektive Polarität und Charakteristik  $K \neq 2$ , so ist die Gruppe  $B(\delta)$  zu einer eigentlich-orthogonalen Gruppe  $O_3^+(K, \tau)$  über  $K$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $\tau$  vom Rang 3 isomorph. Ist  $\delta$  eine perspektive Dualität, so ist die Gruppe  $B(\delta)$  zu der speziellen linearen Gruppe  $SL_3(K)$  über  $K$  isomorph. Ist  $\delta^2$  eine perspektive Kollineation  $\neq 1$  und keine perspektive Dualität, so ist die Gruppe  $B(\delta)$  zu einer orthogonalen Gruppe  $O_3(K, \tau)$  über  $K$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $\tau$  vom Rang 3 isomorph.





H. SCHAAL (Stuttgart):

Zusammenhänge zwischen Böschungslinien auf Mittelpunktquadriken und gewissen Affinbewegungen

Die zahlreichen Untersuchungen über Böschungslinien auf (meist speziellen, bei W. WUNDERLICH auch beliebigen) Flächen 2.0. beziehen sich auf Einzelflächen  $\Phi$ . Betrachtet man dagegen das Büschel regulärer Quadriken  $\{\Phi\}$  mit gemeinsamem Mittelpunkt und gemeinsamer (null- oder einteiliger) Fernkurve  $f_u$  und auf diesen Büschelflächen  $\{\Phi\}$  die zweiparametrische Schar jener Böschungslinien  $\{c\}$ , die mit einer raumfesten Richtung einen konstanten Winkel bilden, so erhält man eine Reihe neuer Ergebnisse: Durchläuft der Fernpunkt  $E_u$  den Fernkreis  $e_u$  des Böschungskegels, so werden die Schnittpunkte von  $\{c\}$  mit der zu  $E_u$  bezüglich aller Büschelflächen  $\{\Phi\}$  polaren Durchmessersebene  $\epsilon$  einer räumlichen Affinbewegung unterworfen, bei der alle Längen und Winkel im Sinne einer auf  $f_u$  als absolutem Gebilde gegründeten, zur euklidischen bzw. pseudo-euklidischen Metrik affinen Metrik fest bleiben. Daraus ergeben sich verschiedene, auch in konstruktiver Hinsicht interessante Folgerungen sowie Zusammenhänge mit gewissen ebenen äquizentroaffinen Bewegungen.

N.K. STEPHANIDIS (Berlin):

Einige Existenzfragen in der Liniengeometrie

Es wurden die Probleme behandelt: Gesucht wird ein Strahlensystem, wenn gegeben sind: a) die Mittenhüllfläche und das sphärische Bild der Hauptflächen des Strahlensystems, b) die Mittenhüllfläche und das sphärische Bild der Strahlenflächen, deren Kehllinien auf den Grenzflächen des Strahlensystems liegen. Diese Probleme führen auf lineare Systeme zweier partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus mit zwei unbekannt Funktionen. Existenz- und Eindeutigkeitssätze wurden angegeben. Zum Schluß wurde die folgende geometrische Deutung des Integrals der mittleren Krümmung einer Fläche (1)  $\vec{OM} = M(u,v)$  ( $M(u,v) \in \mathbb{L}^4$ ) gegeben: Es sei  $\Sigma$  ein Strahlensystem, dessen Mittenhüllfläche die gegebene Fläche (1) ist. Dem Rand  $\partial M$  entspricht eine geschlossene Strahlfläche  $S$ , deren Erzeugenden parallel zu den Normalen von  $M$  längs  $\partial M$  sind. Drehen wir jede Erzeugende von  $S$  um  $-\frac{\pi}{2}$  um die entsprechende orientierte Normale von  $M$ , so entsteht eine geschlossene Strahlfläche  $S^*$ . Eine Orthogonaltrajektorie von  $S^*$ , die von einem beliebigen Punkt  $Q_1$  einer Geraden  $g \in S^*$  ausgeht, trifft  $g$  nach einem Umlauf in  $Q_2$ . Dann gilt für die Länge  $Q_1 Q_2$  die Beziehung  $Q_1 Q_2 = -2 \iint_M H do$ , wobei  $H$  die mittlere Krümmung und  $do$  das Flächenelement von  $M$  sind.



Zusammenhänge zwischen Böschnungslinien auf Mittelpunktsquadriken und gewissen Alltagsbewegungen

Die zahlreichen Untersuchungen über Böschnungslinien auf (meist speziellen, bei W. WUNDERLICH auch beliebigen) Flächen 2. O. beziehen sich auf Einzelflächen  $\Phi$ . Betrachtet man dagegen das Büschel regulärer Quadriken  $\{\Phi\}$  mit gemeinsamem Mittelpunkt und gemeinsamer (null- oder ein- teiliger) Fernkurve  $f_\infty$  und auf diesen Böschnungslinien  $\{c\}$  die zweiparametrische Schar jener Böschnungslinien  $\{c\}$ , die mit einer räumlichen Richtung einen konstanten Winkel bilden, so erhält man eine Reihe neuer Ergebnisse: Durchlauf der Fernkurve  $f_\infty$  den Fernpunkt  $F_\infty$  des Böschnungskegels, so werden die Schnittpunkte von  $\{c\}$  mit der zu  $F_\infty$  bezüglich aller Böschnungslinien  $\{c\}$  polaren Durchmesser ebene  $e$  einer räumlichen Alltagsbewegung unterworfen, bei der alle Längen und Winkel im Sinne einer auf  $f_\infty$  als absolutem Gebilde gegründeten, zur euklidischen bzw. pseudo-euklidischen Metrik affinen Metrik fest bleiben. Daraus ergeben sich verschiedene, auch in konstruktiver Hinsicht interessante Folgerungen sowie Zusammenhänge mit gewissen ebenen äquivalenten Bewegungen.

Einige Existenzfragen in der Liniengeometrie

Es wurden die Probleme behandelt: Gesucht wird ein Strahlensystem, wenn gegeben sind: a) die Mittenhüllfläche und das sphärische Bild der Hauptflächen des Strahlensystems, b) die Mittenhüllfläche und das sphärische Bild der Strahlentflächen, deren Kehlinien auf den Grenzflächen des Strahlensystems liegen. Diese Probleme führen auf lineare Systeme zweiter partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus mit zwei unbekannteren Funktionen. Existenz- und Eindeutigkeitsätze wurden angegeben. Zum Schluss wurde die folgende geometrische Deutung des Integrals der mittleren Krümmung einer Fläche (1)  $\int \Omega = \int M(u,v) (M(u,v) e^A) du dv$  gegeben: Es sei  $\Sigma$  ein Strahlensystem, dessen Mittenhüllfläche die gegebene Fläche (1) ist. Dem Rand  $\partial M$  entspricht eine geschlossene Strahlfläche  $S$ , deren Erzeugenden parallel zu den Normalen von  $M$  längs  $\partial M$  sind. Drehen wir jede Erzeugende von  $S$  um  $-\frac{\pi}{2}$  um die entsprechende orientierte Normale von  $M$ , so entsteht eine geschlossene Strahlfläche  $S^*$ . Eine Orthogonaltrajektorie von  $S^*$ , die von einem beliebigen Punkt  $Q_1$  einer Geraden  $g \in S^*$  ausgeht, trifft  $S$  nach einem Umlauf in  $Q_2$ . Dann gilt für die Länge  $Q_1 Q_2$  die Beziehung  $Q_1 Q_2 = -2 \int_M H du dv$ , wobei  $H$  die mittlere Krümmung und  $du dv$  das Flächenelement von  $M$  sind.



A.UHL (Karlsruhe):

Über einen axiomatischen Aufbau der LAGUERREGeometrie

Die ebene LAGUERREGeometrie läßt sich auf ein Axiomensystem gründen, das aus den elementaren Axiomen von B.L.VAN DER WAERDEN und L.J.SMID (Math.Ann.110, S.753-776), dem Büschelsatz und einigen weiteren Axiomen besteht. Diese Axiome ermöglichen einen Aufbau der LAGUERREGeometrie, der in gewisser Weise dem Aufbau der MÖBIUSGeometrie von G.EWALD (Math.Ann.131, S.354-371) analog ist und den Büschel- und Bündelbegriff wesentlich benutzt. Mit Hilfe der Zykeln und der Büschel und Bündel von Zykeln läßt sich ein dreidimensionaler projektiver Raum konstruieren und in einer Ebene dieses Raumes eine Polarität erklären. Das Resultat ist: Wenn für eine Menge  $\mathcal{S} = (S, T, \dots)$  von Speeren und eine Menge  $\mathcal{Z} = (z, z', \dots)$  von Zykeln die eingangs erwähnten Axiome erfüllt sind, lassen sich die Speere aus  $\mathcal{S}$  so eindeutig abbilden auf die Punkte eines quadratischen Kegels (ausgenommen die Kegelspitze) in einem dreidimensionalen projektiven Raum mit kommutativem euklidischem Koordinatenkörper, daß den Zykeln aus  $\mathcal{Z}$  die nichtentarteten ebenen Schnitte des Kegels entsprechen.

G.VALETTE (Zuen):

Über STEINERSche Tripelsysteme und verallgemeinerte Kubiken

Un système de STEINER est un ensemble  $X$  muni d'une structure formée d'une famille de triples, telle que tout couple appartienne à un et un seul triple (les couples et les triples sont supposés formés d'éléments distincts). Si l'on suppose que  $X$  est un espace topologique et que le 3<sup>e</sup> point du triple est fonction continue des deux premiers, on est conduit à abandonner l'hypothèse que les trois éléments d'un triple sont distincts. Les systèmes ainsi obtenus sont appelés cubiques généralisées, et les triples formés de trois éléments confondus sont appelés points d'inflexion. On démontre que toute cubique généralisée dont l'espace topologique sous-jacent est  $\mathbb{R}$ , (resp. le cercle  $\pi$ ) possède exactement un point d'inflexion (resp. trois points d'inflexion). On retrouve en particulier un résultat de JUEL.



A.UHL (Karlsruhe):

Über einen axiomatischen Aufbau der LAUERER-Geometrie

Die ebene LAUERER-Geometrie läßt sich auf ein Axiomensystem gründen, das aus den elementaren Axiomen von B.L.VAN DER WAERDEN und L.J.SMID (Math.Ann.110, S.753-776), dem BÜSCHELSATZ und einigen weiteren Axiomen besteht. Diese Axiome ermöglichen einen Aufbau der LAUERER-Geometrie, der in gewisser Weise dem Aufbau der MÖBIUS-Geometrie von G.EWALD (Math.Ann.131, S.354-371) analog ist und den BÜSCHEL- und BÜNDELBEGRIFFE wesentlich benutzt. Mit Hilfe der ZYKEL und der BÜSCHEL und BÜNDEL von ZYKELN läßt sich ein dreidimensionaler projektiver Raum konstruieren und in einer Ebene dieses Raumes eine Polarität erklären. Das Resultat ist: Wenn für eine Menge  $\mathcal{Z} = (Z, T, \dots)$  von Sphären und eine Menge  $\mathcal{Z}' = (Z', T', \dots)$  von Zykeln die eingangs erwähnten Axiome erfüllt sind, lassen sich die Sphäre aus  $\mathcal{Z}$  so eindeutig abbilden auf die Punkte eines quadratischen Kegels (ausgenommen die Kegelspitze) in einem dreidimensionalen projektiven Raum mit kommutativem euklidischem Koordinatensystem, daß den Zykeln aus  $\mathcal{Z}'$  die nichtentarteten ebenen Schnitte des Kegels entsprechen.

G.VALETTE (Zürich):

Über STEINERSCHE Tripelsysteme und verallgemeinerte KÜLLIKEN

Un système de STEINER est un ensemble  $X$  muni d'une structure formée d'une famille de triples, telle que tout couple appartenant à un et un seul triple (les couples et les triples sont supposés formés d'éléments distincts). Si l'on suppose que  $X$  est un espace topologique et que le 2° point du triple est fonction continue des deux premiers, on est conduit à abandonner l'hypothèse que les trois éléments d'un triple sont distincts. Les systèmes ainsi obtenus sont appelés couples généraux et les triples formés de trois éléments confondus sont appelés points d'inflexion. On démontre que toute couple généralisée dont l'espace topologique sous-jacent est  $\mathbb{R}^2$  (resp. le cercle  $\mathbb{K}$ ) possède exactement un point d'inflexion (resp. trois points d'inflexion). On y trouve en particulier un résultat de LUETZ.



W.O.VOGEL (Karlsruhe)

Über lineare Zusammenhänge in singulären RIEMANNschen Räumen

1. In den metrischen Räumen sind die mit der Metrik verträglichen linearen Zusammenhänge besonders wichtig. Es gilt bekanntlich: In einem regulären RIEMANNschen Raum gibt es genau einen mit der Metrik verträglichen affinen (= linearen symmetrischen) Zusammenhang. In einem singulären RIEMANNschen Raum muß es keinen solchen Zusammenhang geben. Es wird gezeigt: Ein singulärer RIEMANNscher Raum hat dann und nur dann einen mit der Metrik verträglichen affinen Zusammenhang, wenn er absolut reduzibel (im Sinne von RICCI) ist.

2. Es werden alle linearen, mit der Metrik verträglichen linearen Zusammenhänge in einem singulären RIEMANNschen Raum  $V_n$  angegeben. Ist der Raum  $r$ -fach singulär, so können  $n^2 r + \frac{(n-r-1)(n-r)}{2} n$  Komponenten des linearen Zusammenhangs beliebig gewählt werden. Die übrigen Komponenten sind dann eindeutig bestimmt.

O.VOLK (Würzburg):

Königsberg und die CLEBSCHsche Schule in Preußen

Nachdem Königsberg der sowjetischen Republik Litauen angegliedert worden ist, dürfte es um die Belange der Universität Königsberg, der Albertina, geschehen sein. Die Akten bis 1803 sind ausgelagert nach Göttingen; alle übrigen sind verloren oder unzugänglich. Es lag daher dem Referenten daran, auf die große Bedeutung Königsbergs für die Mathematik und mathematische Physik im 19. Jahrhundert insbesondere die jüngeren Mathematiker aufmerksam zu machen. Es wurde der Teilbereich "Geometrie" gewählt. Es erscheint die gesamte Darstellung im Jahresbericht der DMV; als Quellen dienen Aufzeichnungen LINDEMANNs, Briefe an LINDEMANN und insbesondere das Protokollbuch des mathematischen Kolloquiums von 1883-1893.

K.VOSS (Zürich):

Minimalflächen im Großen

Es wird bewiesen:

1. Eine vollständige Fläche im Raum mit eineindeutiger sphärischer Abbildung hat höchstens vier Enden.



W.O. VOGEL (Karlsruhe)

Über lineare Zusammenhänge in euklidischen Räumen

1. In den metrischen Räumen sind die mit der Metrik verträglichen linearen Zusammenhänge besonders wichtig. Es gilt bekanntlich: In einem regulären RIEMANNschen Raum gibt es genau einen mit der Metrik verträglichen affinen (= linearen symmetrischen) Zusammenhang. In einem euklidischen RIEMANNschen Raum muß es keinen solchen Zusammenhang geben. Es wird gezeigt: Ein euklidischer RIEMANNscher Raum hat dann und nur dann einen mit der Metrik verträglichen affinen Zusammenhang, wenn er absolut reduzierbar (im Sinne von RICCI) ist.

2. Es werden alle linearen, mit der Metrik verträglichen linearen Zusammenhänge in einem euklidischen RIEMANNschen Raum  $V_n$  angegeben. Ist der Raum  $r$ -fach euklidisch, so können  $n-r + \frac{(n-r-1)(n-r)}{2}$  Komponenten des linearen Zusammenhangs beliebig gewählt werden. Die übrigen Komponenten sind dann eindeutig bestimmt.

O. VOLK (Würzburg):

Königsberg und die CLEBSCHsche Schule in Preußen

Nachdem Königsberg der sowjetischen Republik Litauen angegliedert worden ist, dürfte es um die Belange der Universität Königsberg, der Albert-Ludwigs-Universität Göttingen, gesehen sein. Die Akten bis 1803 sind ausgelagert nach Göttingen; alle übrigen sind verloren oder unzugänglich. Es lag daher dem Referenten daran, auf die große Bedeutung Königsbergs für die Mathematik und mathematische Physik im 19. Jahrhundert insbesondere die jüngeren Mathematiker aufmerksam zu machen. Es wurde der Teilbereich "Geometrie" gewählt. Es erscheint die gesamte Darstellung im Jahresbericht der DMV; als Quellen dienen Aufzeichnungen LINDEMANNs, Briefe an LINDEMANN und insbesondere das Protokollbuch des mathematischen Kolloquiums von 1883-1893.

K. VOSS (Zürich):

Minimalflächen im Großen

Es wird bewiesen:

1. Eine vollständige Fläche im Raum mit eindeutiger sphärischer Abbildung hat höchstens vier Enden.





2. Eine vollständige Minimalfläche im Raum mit eineindeutiger sphärischer Abbildung nimmt jede Normalrichtung mit höchstens vier Ausnahmen an.

3. Ist  $f(z)$  analytisch und  $\neq 0$  in einer Umgebung der wesentlichen Singularität  $0$ , so gibt es einen gegen  $0$  strebenden Weg, auf dem das Integral von  $|f| |dz|$  endlich bleibt.

4. Es gibt genau zwei vollständige Minimalflächen mit eineindeutiger sphärischer Abbildung: Die ENNEPERSche Fläche und das Katenoid.

unter der Leitung der Professoren J. ACZÉL (Debrecen), O. HAUPT (Erlangen) und A. OSTROWSKI (Montagnola-Basel) statt.

J. WEIER (Bonn):

Lokale Invarianten bei der Transformation der tensoriellen Divergenz

Sind  $M$  eine lokale RIEMANNsche  $m$ -Fläche,  $N$  eine lokale RIEMANNsche  $n$ -Fläche, ferner  $f$  eine stetig differenzierbare Abbildung von  $M$  in  $N$  und  $s, t$  schiefsymmetrische Tensorfelder über  $N$ , so gelten bekanntlich Formeln wie  $f^*dt = df \wedge t$ ,  $f^*(s \wedge t) = f^*s \wedge f^*t$  usw. Ersetzt man jetzt  $d = \text{rot}$  durch den Operator  $\text{div}$ , so ist  $f^*\text{div } t = \text{div } f^*t$  usw. im allgemeinen nicht mehr richtig. Welche Formeln treten in der Divergenztheorie an die Stelle der bekannten Aussagen über das äußere Differential? Diese Frage soll diskutiert werden.

H. Kunle

(Karlsruhe)



2. Eine vollständige Minimalfläche im Raum mit eindeutiger Sphäri-  
scher Abbildung nimmt jede Normalrichtung mit höchstens vier Annahmen  
an.

3. Ist  $f(x)$  analytisch und  $\neq 0$  in einer Umgebung der wesentlichen Sin-  
gularität 0, so gibt es einen gegen 0 strebenden Weg, auf dem das In-  
tegral von  $|f|dx$  endlich bleibt.

4. Es gibt genau zwei vollständige Minimalflächen mit eindeutiger  
sphärischer Abbildung: Die ENNEPERSche Fläche und das Katenoid.

J. WEIER (Bonn):

Lokale Invarianten bei der Transformation der Tensorfelder  
Divergenz

Sind  $M$  eine lokale RIEMANNsche  $m$ -Fläche,  $N$  eine lokale RIEMANNsche  $n$ -  
Fläche, ferner  $f$  eine stetig differenzierbare Abbildung von  $M$  in  $N$  und  
 $a, t$  schiefsymmetrische Tensorfelder über  $N$ , so gelten bekanntlich For-  
meln wie  $f^*a = df^*t$ ,  $f^*(a \wedge t) = f^*a \wedge f^*t$  usw. Ersetzt man jetzt  
 $d = \text{rot}$  durch den Operator  $\text{div}$ , so ist  $f^* \text{div } t = \text{div } f^*t$  usw. im  
allgemeinen nicht mehr richtig. Welche Formeln treten in der Diver-  
genztheorie an die Stelle der bekannten Aussagen über das äußere Dif-  
ferential? Diese Frage soll diskutiert werden.

H. Künze  
(Karlsruhe)

