

Tagungsbericht

(16)

Funktionalgleichungen

7.-11. Okt. 1963

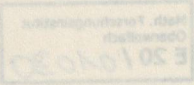
(2. Tagung)

Vom 7. bis 11. Oktober 1963 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach die zweite Tagung über Funktionalgleichungen unter der Leitung der Professoren J. ACZÉL (Debrecen), O. HAUPT (Erlangen) und A. OSTROWSKI (Montagnola-Basel) statt.

Eröffnet wurde die Tagung mit der Begrüßung durch den Direktor des Forschungsinstituts, Herrn Professor BARNER. Sodann nahm Herr HAUPT den 70. Geburtstag von Herrn OSTROWSKI zum Anlaß, um kurz auf das bisherige umfangreiche Werk, insbesondere auch auf die Funktionalgleichungen betreffenden Arbeiten dieses bekannten Mathematikers hinzuweisen. Er brachte die Freude der Teilnehmer zum Ausdruck über die Förderung, die auch die diesjährige Tagung durch die Anwesenheit von Herrn OSTROWSKI erfahren werde. Anschließend begannen die Vorträge.

Bei der Tagung stand zunächst das Problem der Abelschen Funktionalgleichung im Vordergrund; es wurde in verschiedenen Vorträgen und in daran anschließenden Aussprachen behandelt. Daneben kamen wichtige Themen zur Sprache, wie Fragen der Klassifikation von Funktionalgleichungen, Eindeutigkeitssätze und allgemeine Methoden. Bemerkenswert viele neue Einsichten ergaben sich in Bezug auf Verallgemeinerungen in algebraischer Richtung und in Richtung Funktionalanalysis sowie über Fragen aus dem Gebiet der hyperkomplexen Systeme bzw. Matrizen Theorie; und Interpolationsprobleme führten zu Aufgaben über Funktionalgleichungen. Daneben standen Anwendungen in der Geometrie und insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Vordergrund. Bei den lebhaften Diskussionen, die sich auch außerhalb der Sitzungen fortsetzten, wurden viele auch ungelöste Probleme besprochen, die dabei zum Teil weitere Klärung erfuhren. Als eine erfreuliche Auswirkung der letztjährigen Tagung war zu verzeichnen, daß verschiedene der im letzten Jahr besprochenen ungelösten Probleme inzwischen gelöst werden konnten.

Insgesamt waren 13 Teilnehmer anwesend, davon 10 aus dem Ausland.



Tagungsberichte

Funktionalgleichungen

7.-11. Okt. 1967

(2. Tagung)

Vom 7. bis 11. Oktober 1967 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach die zweite Tagung über Funktionalgleichungen unter der Leitung der Professoren J. AGAR (Leoben), O. HAUP (Erlangen) und A. OSTROWSKI (Montagnola-Baseil) statt.

Eröffnet wurde die Tagung mit der Begrüßung durch den Direktor des Forschungsinstituts, Herrn Professor BÄRNER. Sodann nahm Herr HAUP den Vor. Geburtstags von Herrn OSTROWSKI zum Anlass, um kurz auf das 10-jährige umfängliche Werk, insbesondere auch auf die funktionalgleichungen betreffenden Arbeiten dieses bekannten Mathematikers hinzuweisen. Er brachte die Freude der Teilnehmer zum Ausdruck über die Förderung, die auch die diesjährige Tagung durch die Unterstützung von Herrn OSTROWSKI erfahren werde. Anschließend begann man die Vorträge.

Bei der Tagung stand zunächst das Problem der Abel'schen Funktionalgleichung im Vordergrund; es wurde in verschiedenen Vorträgen und in daran anschließenden Ansprachen behandelt. Dabei kamen wichtige Themen zur Sprache, wie Fragen der Klassifikation von Funktionalgleichungen, Eindeutigkeitsätze und allgemeine Methoden, merkwürdigerweise viele neue Einsichten ergaben sich in Bezug auf Verallgemeinerungen in algebraischer Richtung und in Richtung Funktionalanalyse sowie über Fragen aus dem Gebiet der hyperkomplexen Systeme bzw. Matrixtheorie; und Interpolationsprobleme führten zu Aufgaben über Funktionalgleichungen. Daneben standen Anwendungen in der Geometrie und insbesondere in der Wahrscheinlichkeitstheorie im Vordergrund. Bei den letzten Diskussionsgruppen, die sich auch außerhalb der Sitzungen fortsetzten, wurden viele auch ungelöste Probleme besprochen, die dabei zum Teil weitere Klärung erfahren. Als eine erfreuliche Auswirkung der letztjährigen Tagung war zu verzeichnen, das verschiedene der im letzten Jahr besprochenen ungelösten Probleme inzwischen gelöst werden konnten.

Insgesamt waren 13 Teilnehmer anwesend, davon 10 aus dem Ausland.



Von diesem kamen fünf aus Ungarn, zwei aus den Vereinigten Staaten und je einer aus Jugoslawien, Polen und der Schweiz. Leider konnte eine Anzahl der Eingeladenen, die bereits zugesagt hatten, nicht erscheinen; sie hatten aber Wert darauf gelegt, Mitteilungen zum Vortrag und zur Diskussion zu übersenden. Von diesen Mitteilungen konnten leider nur 7 ausführlich behandelt werden.

Die Teilnehmer waren die folgenden:

- J. ACZÉL (Debrecen, Ungarn)
- S. ACZÉL (Debrecen, Ungarn)
- R. BORGES (Köln)
- G. GÁSPÁR (Miskolc, Ungarn)
- S. GOŻAB (Kraków, Polen)
- O. HAUPT (Erlangen)
- M. HOSSZÚ (Miskolc, Ungarn)
- H. KNESER (Tübingen)
- S. KUREPA (Zagreb, Jugoslawien)
- A. OSTROWSKI (Montagnola-Basel, Schweiz)
- B. SCHWEIZER (Tucson, Arizona)
- A. SKLAR (Chicago, Illinois)
- E. VINCZE (Miskolc, Ungarn)

Kurzfassungen der Vorträge sowie die Problemstellungen und Bemerkungen folgen (getrennt voneinander) in chronologischer Reihenfolge

A) Vorträge

1. A. OSTROWSKI: Die Abelsche Funktionalgleichung und Reihenkonvergenzkriterien.

Für die Konvergenz der Reihe $\sum_1^{\infty} f(\psi)$ hat ERMAKOFF unter der Annahme, daß $f(x)$ stetig und positiv für $x \geq a$ ist, das folgende Kriterium aufgestellt: Wenn für eine stetig differenzierbare Funktion $\psi(x)$ mit $\psi(x) > x$ ($x \geq a$) und ein $\alpha < 1$ $f(\psi(x)) \psi'(x) \leq \alpha f(x)$ ($x \geq a$) gilt, ist die Reihe konvergent, während, wenn $f(\psi(x)) \psi'(x) \geq f(x)$ ($x \geq a$) ist, die Reihe divergiert. Der Satz wurde zuerst von ERMAKOFF für eine monoton abnehmende Funktion $f(x)$ bewiesen und später, mit Hilfe einer geeignet konstruierten Lösung der Abelschen Funktionalgleichung, im allgemeinen für beliebige $f(x)$, doch wurden die Voraussetzungen über $\psi(x)$, unter denen dieser Beweis gilt, erst vom Vortragenden herausgearbeitet: Man hat anzunehmen, daß $\psi'(x)$ monoton wächst. Der Vortragende gab ferner einen die Abelsche Funktionalgleichung vermeidenden Beweis, der elementar und kurz

Von diesen kamen fünf aus Ungarn, zwei aus den Vereinigten Staaten und je einer aus Jugoslawien, Polen und der Schweiz. Leider konnte eine Anzahl der Eingeladenen, die bereits zugesagt hatten, nicht erscheinen; sie hatten aber Wert darauf gesetzt, Mitteilungen zum Vortrag und zur Diskussion zu übermitteln. Von diesen Mitteilungen konnten leider nur V ausführlich behandelt werden.

Die Teilnehmer waren die folgenden:

- 1. ACZEL (Debrecen, Ungarn)
- 2. ACZEL (Debrecen, Ungarn)
- R. BORGES (Köln)
- G. GASPAR (Miskolc, Ungarn)
- S. GOZAB (Kirków, Polen)
- G. HAUT (Erlangen)
- M. HOSSZU (Miskolc, Ungarn)
- H. KNEISER (Tübingen)
- S. KURCZA (Zagreb, Jugoslawien)
- A. OSTROWSKI (Montigny-la-Basile, Schweiz)
- B. SCHWEIZER (Tucson, Arizona)
- A. SKLAR (Oristano, Sardinien)
- E. VINCEK (Miskolc, Ungarn)

Kurzvorträge der Teilnehmer sowie die Problematik und Bemerkungen folgen (getrennt voneinander) in chronologischer Reihenfolge.

A) Vorträge

1. A. OSTROWSKI: Die Abel'sche Funktionalgleichung und Reihenkonvergenz.

Für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n$ hat ERMAKOFF unter der Annahme, dass $f(x)$ stetig und positiv für $x \geq 1$ ist, das folgende Kriterium aufgestellt: Wenn für eine stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ mit $f'(x) > x(x^2 + 1)f''(x)$ und ein $\epsilon < 1$ existiert, so dass $f'(x) \leq \epsilon f(x)$ gilt, ist die Reihe konvergent, während, wenn $f'(x) \geq \epsilon f(x)$ für eine monoton abnehmende Funktion $f(x)$ bewiesen und später, mit Hilfe einer geeigneter konstruierten Lösung der Abel'schen Funktionalgleichung, im allgemeinen für beliebige $f(x)$, doch wurden die Voraussetzungen über $f(x)$, unter denen dieser Beweis gilt, erst vom Vortragenden herausgearbeitet: Man hat anzunehmen, dass $f(x)$ monoton wächst. Der Vortragende gab ferner einen die Abel'sche Funktionalgleichung veranschaulichenden Beweis, der elementar und kurz



ist und auf der Einführung der Funktionen beruht:

$$F(x) = \inf_{a \leq u \leq x} f(u), \quad g(x) = \sup_{u \geq x} f(u) .$$

Im Falle allerdings, daß $\psi'(x)$ monoton fällt, klappt diese Methode für das Konvergenzkriterium. nur

2. J. ACZÉL: Einige ungelöste Fragen in der Theorie der Funktionalgleichungen.
 1. Lösung der verallgemeinerten Bisymmetriergleichung $F[G(x,y),H(u,v)] = K[M(x,u),N(y,v)]$ und ähnlicher Gleichungen, wenn alle Veränderlichen und auch die Funktionswerte in verschiedenen Mengen liegen; Aczél-Belousov-Hosszú, Acta Math. Acad.Sci.Hung., 11 (1960), 127-136; Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 214-216; Hosszú, Magyar Tud.Akad.Mat.-Fiz.Oszt.Közl., 12 (1962), 13 (1963), 1-15.
 2. Allgemeine differenzierbare Lösung der verallgemeinerten Distributivitätsgleichung $F[G(x,y),z] = H[K(x,z),L(y,z)]$; Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 229-239; Hosszú, Acta Sci.Math. Szeged, 20 (1959), 67-80.
 3. Allgemeine, in beiden Veränderlichen streng monotone und stetige Lösung der Autodistributivitätsgleichung $F[F(x,y),z] = F[F(x,z),F(y,z)]$; Aczél, Coll.Math., 4 (1956), 33-55; Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 237-239, 203-206; Hosszú, Coll. Math., 5 (1957), 32-42; Gesztelyi, Acta Univ. Debrecen, 8 (1962) 133-139.
 4. Existenz streng monotoner nichtsymmetrischer Gruppen von reellen Zahlen; Aczél, Bull.Soc.Math.France, 76 (1949), 59-64; Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 176-188; solche Halbgruppen existieren (Vincze, briefliche Mitteilung).
 5. Folgerung auf die Konvexität in x der Lösungen von $F[F(x,u),v] = F(x,u+v)$ aus der Konvexität von $F(x,1)$; Problem der konvexen Iterierten; Kuczma, Habil.Dissertation, 1963.
 6. Funktionalgleichungen für Funktionen von geordneten Paaren von Veränderlichen; Fréchet, Bull.Soc.Math.France, 60 (1932), 242-277; Rech.Théor.Med.,II. 1938; Hosszú, Ann.Univ.Eötvös Budapest, 7 (1964).
 7. Charakterisierung von Funktionen der Gestalten $F(x_1, \dots, x_n) = f^{-1}[\sum x_j f(x_j) / \sum x_j]$ und $F(x_1, \dots, x_n) = f^{-1}[\sum g(x_j) f(x_j) / \sum g(x_j)]$ durch Funktionalgleichungen (Entropie); Aczél-Daróczy, Acta Math.Acad.Sci.Hung., 14 (1963), 95-121.

ist und auf der Einführung der Funktionen beruht:

$$P(x) = \inf_{u \in X} f(u), \quad g(x) = \sup_{v \in Y} f(x, v)$$

Im Falle allerdings, das $f(x, \cdot)$ monoton fällt, heißt diese Methode

für das Konvergenzkriterium.

2. 1. AOSZEL: Einige ungelöste Fragen in der Theorie der Funktionalgleichungen

1. Lösung der verallgemeinerten Bismystrizgleichung $P[g(x, y), H(u, v)] = K[M(x, u), N(y, v)]$ und ähnlicher Gleichungen, wenn alle Veränderlichen und auch die Funktionswerte in verschiedenen Mengen liegen; AOSZEL-Belousov-Hosszú, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960), 127-136; AOSZEL, Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 214-216; Hosszú, Magyar Tud. Akad. Mat.-Fiz. Oszt. Közl., 12 (1963), 13 (1963), 1-12.

2. Allgemeine differenzierbare Lösung der verallgemeinerten Darboux-Darstellungsgleichung $P[g(x, y), a] = H[K(x, a), L(y, a)]$; Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 229-237; Hosszú, Acta Sci. Math. Szeged, 20 (1959), 67-80.

3. Allgemeine, in beiden Veränderlichen streng monoton und stetige Lösung der Autodistributivitätsgleichung $P[f(x, y), a] = -P[f(x, a), P(y, a)]$; AOSZEL, Coll. Math., 4 (1959), 33-52; Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 237-239; Hosszú, Coll. Math., 5 (1957), 32-42; Gassler, Acta Univ. Debrecen, 8 (1962), 133-139.

4. Existenz streng monotoner nichtsymmetrischer Gruppen von reellen Zahlen; AOSZEL, Bull. Soc. Math. France, 70 (1942), 59-64; Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 176-181; solche Halbgruppen existieren (Vincze, ähnliche Mittelung).

5. Folgerung auf die Konvexität in x der Lösungen von $P[f(x, u), v] = -P(x, u+v)$ aus der Konvexität von $P(x, 1)$; Problem der konvexen Iterierten; Kuczma, Habilitation, 1963.

6. Funktionalgleichungen für Funktionen von geordneten Paaren von Veränderlichen; Fischer, Bull. Soc. Math. France, 60 (1932), 242-277; Rechn. Théor. Méd., 11, 1938; Hosszú, Ann. Univ. Bolyai Budapest, 1 (1964), 1.

7. Charakterisierung von Funktionen der Gestalt $P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ und $P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2$ durch Funktionalgleichungen (AOSZEL, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 14 (1963), 95-101.



8. Allgemeine Lösung von $F_{mn}(x_1y_1, \dots, x_1y_m, \dots, x_ny_1, \dots, x_ny_m) = F_n(x_1, \dots, x_n) + F_m(y_1, \dots, y_m)$ unter den Bedingungen $F_{mn}(x_{11}, \dots, x_{1m}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nm}) \leq F_n(\sum x_{1j}, \dots, \sum x_{nj}) + F_m(\sum x_{i1}, \dots, \sum x_{im})$, $F_n(x_1, \dots, x_n) \leq F_n(\sum x_j/n, \dots, \sum x_j/n)$ (natürlicher informationstheoretischer Entropiebegriff).
9. Lösung von $f^{-1} [\bar{z} \cdot g(x_j) f(x_j) / \bar{z} g(x_j)] = h^{-1} [\bar{z} k(x_j) h(x_j) / \bar{z} k(x_j)]$; Äquivalenz verallgemeinerter Entropieausdrücke; Bajraktarević, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr., 13 (1958), 243-248; Aczél-Daróczy, Publ.Math.Debrecen, 10 (1963).
10. Alternative Funktionalgleichungen; Hosszú, Mat.Lapok, 14 (1963); Vincze, Mat.Lapok, 14 (1963), Funkc.Ekvac., 6 (1963), Archiv d. Math., 14 (1963); Swiatak, Zeszyty Naukowe U.J.Kraków, 1964.
11. Funktionalgleichungen für mehrwertige Funktionen; Kiesewetter, Crelle J., 206 (1961), 113-171; Gołab-Kiesewetter-Losonczy, Publ.Math.Debrecen, 11 (1964).
12. Allgemeine (nichtstetige) Lösung der Funktionalgleichung $f[x+yf(x)] = f(x)f(y)$; Hosszú, Publ.Math.Debrecen, 5 (1958), 294-329; Gołab-Schinzel, Publ.Math.Debrecen, 6 (1959), 113-115; Vincze, Ann.Polon.Math., 14 (1964).
13. Lösung der Cauchyschen Gleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ falls $f(1/x) = f(x)/x^2$ ($x \neq 0$); Problem von Halperin und Neumann.
14. Lösung der für fast alle Punktpaare der Ebene vorausgesetzten Cauchyschen Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$; Erdős, Coll.Math., 7 (1960), 311; Hartmann, Coll.Math., 8 (1961), 77-79.
15. Lösung der für relative Primzahlen vorausgesetzten Additivitätsgleichung $f(mn) = f(m) + f(n)$, $(m,n) = 1$, falls $|f(n+1) - f(n)| < c$; Erdős, Ann.of Math.(2), 47 (1946), 1-20.
16. Lösung von $f(mn) = f(m) + f(n)$, $(m,n) = 1$, falls $f(n+1) \stackrel{?}{=} f(n)$ oder $f(n+1) - f(n) \rightarrow 0$ mit Ausnahme einer Folge der Dichte 0 (Erdős).
17. Allgemeine elementare Methode für Gleichungen des Typus $f(x+y) + g(x-y) = \bar{z} h_j(x) k_j(y)$; Sato, Proc.Phys.-Math.Soc.Japan (3), 10 (1928), 212-222; Vincze, Publ.Math.Debrecen, 9 (1962), 149-163, 314-323, 10 (1963); Sakowitch, 11 (1964).
18. Bestimmung der Homomorphismen mehrdimensionaler affiner Gruppen; Lösung des Funktionalgleichungssystems $F(XU, Xv+y) = F(X,y)F(U,v)$, $g(XU, Xv+y) = F(X,y)g(U,v) + g(X,y)$ (Große Buchstaben sind Matrizen, kleine sind Vektoren); Kuczma, Publ.Math.Debrecen, 6 (1959), 72-78;

- 8. Allgemeine Lösung von $P_m(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = 0$ unter den Bedingungen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ (unter den Bedingungen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$)
- 9. Lösung von $r^{-1} [\sum_{i=1}^n \epsilon_i(x_i) \setminus \sum_{i=1}^n \epsilon_i(x_i)] = n^{-1} [\sum_{i=1}^n \epsilon_i(x_i) \setminus \sum_{i=1}^n \epsilon_i(x_i)]$; Äquivalenz verallgemeinerter Entropiesubstanz; Bakker, Publ. Math. Debrecen, 12 (1963), 243-248; Acta-Palffy, Math. Mat. Piz.-Astr., 15 (1958), 243-248; Acta-Palffy, Publ. Math. Debrecen, 12 (1963).
- 10. Alternative Funktionalgleichungen; Hosszú, Mat. Lapok, 14 (1963); Vizsg., Mat. Lapok, 14 (1963); Punko. Kivac., 6 (1963); Arany 5. Math., 14 (1963); Székely, Székely, Mat. Lapok, 14 (1963); Székely, Székely, Mat. Lapok, 14 (1963); Székely, Székely, Mat. Lapok, 14 (1963).
- 11. Funktionalgleichungen für mehrwertige Funktionen; Kiss, Publ. Math. Debrecen, 11 (1964); Größe 1., Székely, Székely, Mat. Lapok, 14 (1963); Székely, Székely, Mat. Lapok, 14 (1963); Székely, Székely, Mat. Lapok, 14 (1963); Székely, Székely, Mat. Lapok, 14 (1963).
- 12. Allgemeine (nichtstetige) Lösung der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$; Hosszú, Publ. Math. Debrecen, 2 (1958), 294-329; Gold-Schneid, Publ. Math. Debrecen, 6 (1959), 113-115; Vizsg., Ann. Polon. Math., 14 (1964).
- 13. Lösung der Cauchy'schen Gleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$; Hosszú, Publ. Math. Debrecen, 2 (1958), 294-329; Gold-Schneid, Publ. Math. Debrecen, 6 (1959), 113-115; Vizsg., Ann. Polon. Math., 14 (1964).
- 14. Lösung der für fast alle Punkte der Ebene vorausgesetzten Cauchy'schen Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$; Hosszú, Publ. Math. Debrecen, 2 (1958), 294-329; Gold-Schneid, Publ. Math. Debrecen, 6 (1959), 113-115; Vizsg., Ann. Polon. Math., 14 (1964).
- 15. Lösung der für relative Primzahlen vorausgesetzten Additivitätsgleichung $f(mn) = f(m)f(n)$; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20.
- 16. Lösung von $f(mn) = f(m)f(n)$; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20.
- 17. Allgemeine elementare Methode für Gleichungen des Typus $f(x+y) = f(x)f(y)$; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20.
- 18. Bestimmung der Homomorphismen mehrdimensionaler affiner Gruppen; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20; Erdős, Ann. of Math., 42 (1946), 1-20.



Aczel, Bull.Un.Math.Itali (3), 15 (1960), 479-484; Bul.Jasi, 7 (1961), No.3-4, 7-14.

19. Allgemeinste Lösung der Gleichung $F(XY)=F(X)F(Y)$ für Matrix-Funktionen; Schur, SB Preuss.Akad.Wiss., 1928, 100-124; Gołab, Ann.Polon.Math., 6 (1959), 1-13; Kuharzewski, Hosszú, Publ.Math. Debrecen, 6 (1959), 181-198, 288-289; Zajts, Bull.Acad.Polon.Sci. Math.Astr.Phys., 10 (1962), 362-367.
20. Allgemeine Lösung von Teilsystemen der Definitionsgleichungen der Determinanten; Gáspár, Publ.Math.Debrecen, 3 (1954) 257-260, 10 (1963).
21. Lösung der Cauchyschen Gleichungen in Algebren verschiedener Dimensionen; Verallgemeinerung eines von Makai teilweise gelösten Oberwolfacher Problems von O.Taussky; Problem 17 (Tagung in Oberwolfach über Funktionalgleichungen, 1962).
22. Allgemeinste Lösung von $f(x.y)=g(x)h(y)$ in allgemeinen Mengen mit assoziativem $x.y$; Vincze, Studia Univ.Babes-Bolyai, 6 (1963); Hosszu, Studia Univ.Babes-Bolyai, 6 (1963); Aczel, Funkc.Ekvac., 6 (1963).
23. Qualitative (strukturelle) Theorie der Funktionalgleichungen; Haupt, Crelle J., 186 (1944), 58-64;; Kemperman, Trans.Amer.Math. Soc., 86 (1957), 28-56; Aczél, Acta Math.Acad.Sci.Hung., 15 (1964).
3. H. KNESER: Die Abelsche Funktionalgleichung zur Exponentialfunktion.

Die Abelsche Funktionalgleichung zur Exponentialfunktion lautet

$$(1) \quad F(e^x) = F(x) + 1 .$$

Es wurde auf SCHÖBES Lösung (ZAMM, 38/1958/, 190-194) hingewiesen: Mit den Abkürzungen $L(x)=\log(1+x)$, $e(x)=e^x$ wird

$$(2) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} L^n(e^n(x))$$

$$(3) \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{L^n(x)} - n + \frac{1}{3} \log n \right]$$

eingeführt. Unmittelbar aus den Definitionen folgt $g(L(x))=g(x)+1$, $f(x)=L[f(e(x))]$; setzt man $F(x)=-g(f(x))$, so ergibt sich daraus (1).

Der Ansatz (3) stammt aus FATOUS Behandlung der Iteration bei einem Fixpunkt mit Multiplikator 1; er konvergiert gleichmäßig im Komplexen, so daß g holomorph ist. Dagegen ist die Konvergenz in (2) bisher nur im Reellen (und zwar sehr einfach) bewiesen, so daß man noch nicht weiß, ob SCHÖBES Lösung F holomorph ist.

Aczel, Bull. Un. Math. Tbil. (3), 10 (1960), 479-484; Bul. Inst. J. (1961), No. 3-4, 7-14.

19. Allgemeine Lösung der Gleichung $f(XY) = f(X)f(Y)$ für Matrix-Funktionen; Gajda, Zs. Rechen. Akad. Wiss., 1958, 106-124; Gajda, Ann. Polon. Math., 6 (1959), 1-15; Kobzarzewski, Hoza, Publ. Math. Debrecen, 6 (1959), 181-198, 288-289; Zajt, Bul. Acad. Polon. Sci. Math. Astr. Phys., 10 (1962), 362-367.

20. Allgemeine Lösung von Teilsystemen der Definitionsgleichungen der Determinanten; Gajda, Publ. Math. Debrecen, 3 (1954) 277-280, 10 (1963).

21. Lösung der Cauchy'schen Gleichungen in Algebren verschiedener Dimensionen; Verallgemeinerung eines von Makai teilweise gelösten Oberwolfacher Problems von O. Tarski; Problem 17 (Tagung in Oberwolfach über Funktionalgleichungen, 1962).

22. Allgemeine Lösung von $f(x-y) = g(x)h(y)$ in allgemeinen Mengen mit assoziativen x, y ; Vincze, Studia Univ. Babeş-Bolyai, 6 (1963); Hoza, Studia Univ. Babeş-Bolyai, 6 (1963); Aczel, Studia Univ. Babeş-Bolyai, 6 (1963).

23. Qualitative (strukturelle) Theorie der Funktionalgleichungen; Haupt, Grundleh. 4, 186 (1944), 58-64; Koppelman, Trans. Amer. Math. Soc., 86 (1957), 28-56; Aczel, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 5 (1964).

3. H. KISSER: Die Abel'sche Funktionalgleichung zur Exponentialfunktion. Die Abel'sche Funktionalgleichung zur Exponentialfunktion lautet

$$(1) \quad f(e^x) = f(x) + 1$$

Es wurde auf SCHÖBER'S Lösung (ZAMM, 38/1958, 190-194) hingewiesen. Mit den Abkürzungen $f(x) = \log(1+x)$, $e(x) = e^x$ wird

$$(2) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(e^{nx})$$

$$(3) \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{n} \log \left(\frac{2}{n} \log n \right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \log n \right]$$

eingeführt. Unmittelbar aus den Definitionen folgt $g(1(x)) = f(x) + 1$. $f(x) = \log(1+e(x))$; setzt man $f(x) = -g(1(x))$, so ergibt sich daraus (1).

Der Ansatz (3) stammt aus FATOU'S Behandlung der Iteration bei einem Fixpunkt mit Multiplikator 1; er konvergiert gleichmäßig im Komplexen so daß g holomorph ist. Dagegen ist die Konvergenz in (2) offenbar nur im Reellen (und zwar sehr einfach) bewiesen, so daß man noch nicht weiß, ob SCHÖBER'S Lösung f holomorph ist.



4. M. Mc. KIERNAN: Variational aspects of the Abel and Schröder Functional Equations (Bericht von B. SCHWEIZER).
Chicago

Es sei f eine komplexe Funktion mit der Eigenschaft, daß alle ihre Iterierten $f^{[t]}(z)$ (t reell) existieren. Man nennt die Kurve $z(t) = f^{[t]}(z_0)$ die Iterationsbahn von f durch den Anfangspunkt z_0 . Satz: Es sei g eine analytische Funktion und $G(x,y) = |g'(z)|$. Dann sind die Extremalen des Funktionals

$$(1) \quad \int_C g(x,y) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

durch den Ausdruck $x(t) + iy(t) = g^{[-1]}(at + g(z))$, wo a und z beliebige Konstanten sind, gegeben. Setzt man $f(z) = g^{[-1]}(at + g(z))$, dann ist eine Lösung der Abelschen Funktionalgleichung für f , d.h. $g(f(z)) = a + g(z)$, und die Extremalen von (1) sind Iterationsbahnen von f .

Ferner ist Iterationsindex t proportional zu der G -länge der Iterationsbahn in der Riemannschen Geometrie, die durch (1) bestimmt ist. Ähnliches gilt für andere Funktionalgleichungen, z.B. die von SCHRÖDER und BOTTCHE (Canad. Math. Bull., 6/1963/No. 2.).

5. M. KUCZMA: Über eine Differenzengleichung und eine Charakterisierung der Polynome. (Bericht von S. GOZAB).
Katowice

Es sei die Gleichung

$$/*/ \quad \varphi(x+1) - \varphi(x) = f(x)$$

gegeben, wo f gegebene und φ gesuchte Funktion ist. Die Gleichung $/*/$ wird in einem Intervalle $I = (a, +\infty)$ ($-\infty \leq a < \infty$) betrachtet. Die Klasse der sog. konvexen Funktionen von Ordnung n sei mit M^n bezeichnet. $\Delta_1^n f(x)$ bezeichne die n -te Iterierte der Funktion $\Delta_1 f = f(x+1) - f(x)$. Der Verf. beweist den Satz, daß falls f zur Klasse M^n gehört und der Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta_1^n f(x) = 0$$

genügt, so gibt es für jedes Paar von Zahlen $/x_0, y_0/$, wo $x_0 \in I$ und y_0 ganz beliebig sind, eine einzige Lösung der Gleichung $/*/$, die die Anfangsbedingung $y_0 = \varphi(x_0)$ erfüllt. Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung der früheren Sätze von W. KRULL und vom Verf. dar.

Aus diesem Satz erhält man eine Charakterisierung der Polynome höchstens n -ten Grades, die in gewissem Maße stärker ist als der bisher bekannte Satz in dieser Hinsicht. Die Ergebnisse werden in den Fund. Math. erscheinen.

6. A. SKLAR: Further Steps towards the Classification of Functional Equations.

Die Algebren der verallgemeinerten Abbildungen, die bei der vorjährigen Tagung vorgelegt wurden, werden weiter studiert. Eine neue Operation, die Komma-Operation genannt wird, wird eingeführt. Mittels

4. M. McKIRWAN: Variational aspects of the Abel and Schröder functional equations (Bericht von H. GONZALEZ).

Chicago
Es sei f eine komplexe Funktion mit der Eigenschaft, dass alle ihre Iterierten $f^{[n]}(z)$ ($n \in \mathbb{N}$) existieren. Man nennt die Kurve $\gamma(t) = \gamma^{[n]}(z_0)$ die Iterationsbahn von f durch den Anfangspunkt z_0 .
Es sei g eine analytische Funktion und $G(x, y) = G(x, y) = G(x, y)$. Dann sind die Extremalen des Funktionals

$$(1) \int G(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

durch den Ausdruck $x(t) + iy(t) = g^{-1}(t) \circ g(z_0)$, wo g und z_0 beliebige Konstanten sind, gegeben. Setzt man $f(z) = g^{-1}(g(z))$, dann ist eine Lösung der Abel'schen Funktionalgleichung für f , d. h. $g(f(z)) = g(z) + 1$, und die Extremalen von (1) sind Iterationsbahnen von f .
Ferner ist Iterationsindex ν proportional zu der G -Länge der Iterationsbahn in der Riemannschen Geometrie, die durch (1) bestimmt ist.
Ähnliches gilt für andere Funktionalgleichungen, z. B. die von SCHROEDER und BOTTOHER (Ann. Math. Bull., 6/1953, No. 2).

5. M. KUCZMA: Über eine Differenzengleichung und eine Charakterisierung der Polynome (Bericht von H. GONZALEZ).

Es sei die Gleichung
$$f(x+1) - f(x) = \psi(x)$$

gegeben, wo f gegebene und ψ gesuchte Funktion ist. Die Gleichung $f(x)$ wird in einem Intervall $I = (a, +\infty)$ ($-\infty < a < +\infty$) betrachtet. Die Klasse der sog. konvexen Funktionen von Ordnung n sei mit K_n bezeichnet. $\Delta_n^h f(x)$ bezeichne die n -te Iterierte der Funktion f . Der Verf. beweist den Satz, dass falls $f \in K_n$ und $\Delta_n^h f(x) - \psi(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann gilt $f(x) = \psi(x) + P(x)$, wobei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Man gibt an für jedes Paar von Zahlen α, β ein $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ ganz beliebig sind, eine einzige Lösung der Gleichung $f(x) = \alpha x + \beta$ die Anfangsbedingung $f_0 = \psi_0(x)$ erfüllt. Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung der früheren Sätze von W. KRULL und vom Verf. dar.
Aus diesem Satz ergibt man eine Charakterisierung der Polynome höchstens n -ten Grades, die in gewissem Maße stärker ist als der bisher bekannte Satz in dieser Hinsicht. Die Ergebnisse werden in den Fund. Math. erschlossen.

6. A. SKLAR: Further steps towards the classification of functional equations.

Die Algebra der verallgemeinerten Abbildungen, die bei der Verallgemeinerung vorgelagert werden, werden weiter analysiert. Eine neue rationale Komposition genannt wird vorgeschlagen.



dieser Operation kann man zwischen "wohlgeformten" und "unwohlgeformten" Funktionalgleichungen unterscheiden, und in manchen Fällen kann man etwaige Aussagen über die Struktur der Lösungen einer Funktionalgleichung angeben, z.B. die Lösungen der Assoziativitätsgleichung /welche sich in der Form $FF=F(KK,FJ)$ ausdrücken läßt/ müssen alle Grad 2, Rang 1 und Index 1 haben.

7. J. ACZÉL: Ein Eindeutigkeitssatz in der Theorie der Funktionalgleichungen und ihrer Anwendungen.

Der Satz lautet: Ist $H(u,v,x,y)$ streng monoton (diese Bedingung kann abgeschwächt werden) in u (oder v), sind f und F stetig, und liegt $F(x,y)$ im Innern des Intervalles von x und y , so sind zwei Lösungen der Gleichung

$$f[F(x,y)] = H[f(x),f(y),x,y],$$

die in zwei Punkten zusammenfallen — überall identisch. Anwendungsmöglichkeiten:

1. Jensensche Funktionalgleichung; 2. Kraftfelder mit Schwerpunkten;
3. Identitätsprobleme von Mittelwerten und Entropien in der Informationstheorie; 4. Lösung der Autodistributivitätsgleichungen; u.a.

8. E. VINCZE: Über die Lösungen der Funktionalgleichung $F(x+y) + G(x-y) = \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y)$.

Es wurde eine allgemeine elementare Methode für die Lösungen der im Titel genannten Funktionalgleichung skizziert, wobei die Veränderlichen $x,y,x+y,x-y$ die Elemente einer additiven ABELschen Gruppe Ω sind, die aber mit x auch das Element $x/2$ enthält, und die Funktionen $F(x), G(x), f_i(x), g_i(x)$ ($i=1, \dots, n$) die Gruppe Ω in einen beliebigen Körper \mathcal{K} der Charakteristik 0 abbilden. Die vorliegenden Funktionen sind unbekannt (oder teilweise bekannt). Wie das bekannt ist, sind die Funktionen $F(x), G(x), f_i(x), g_i(x)$ ($i=1, \dots, n$) auch in den Formen

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= P(x) + Q(x) , & f_i(x) &= p_i(x) + q_i(x) , \\ G(x) &= R(x) + S(x) , & g_i(x) &= r_i(x) + s_i(x) , \end{aligned} \right\} (i=1, \dots, n)$$

darstellbar, wobei $P(x), R(x), p_i(x), r_i(x)$ gerade bzw. $Q(x), S(x), q_i(x), s_i(x)$ ungerade sind. Für $Q(x)$ und $S(x)$ gelten die Gleichungen

$$Q(x+y) - S(x+y) = \sum_{i=1}^n [p_i(x)s_i(y) + p_i(y)s_i(x)] ,$$

$$Q(x+y) + S(x+y) = \sum_{i=1}^n [r_i(x)q_i(y) + r_i(y)q_i(x)] ,$$

womit das ganze Problem auf schon behandelte Funktionalgleichungen zurückgeführt werden kann [Vgl. Publ.Math.Debrecen, 9 (1962), 149-163, 314-323, 10 (1963), ...].



dieser Operation kann man zwischen "Wohlfahrter" und "unwohlfahrter" Formaten" Funktionsgleichungen unterscheiden und in manchen Fällen kann man etwaige Aussagen über die Struktur der Lösungen einer Funktionsgleichung angeben, z.B. die Lösungen der Assoziativitäts-Gleichung / welche sich in der Form $P(x, y) = P(y, x)$ ausdrücken lassen / müssen alle Grad 2, Rang 1 und Index 1 haben.

7. 1. ACHSEL: Ein Identifizierbarkeitssatz in der Theorie der Funktionsgleichungen und ihrer Anwendungen.

Der Satz lautet: Ist $H(u, v, x, y)$ streng monoton (dieses Bedingung kann abgeschwächt werden) in u (oder v), sind f und F stetig, und liegt $F(x, y)$ im Inneren des Intervalles von x und y , so sind zwei Lösungen der Gleichung

$$f[F(x, y)] = H[f(x), f(y), x, y]$$

die in zwei Punkten zusammenfallen — überall identisch. Anwendungs-möglichkeiten:

1. Jensen'sche Funktionsgleichung; 2. Kraftfelder mit Schwerpunkt; 3. Identifizierbarkeitssatz von Mittelwerten und Entropien in der Informationstheorie; 4. Lösung der Assoziativitätsgleichungen; u.a.

8. E. VINGBERG: Über die Lösungen der Funktionsgleichung $F(x+y) + G(x-y) = \sum_{i=1}^n F_i(x)G_i(y)$.

Es wurde eine allgemeine elementare Methode für die Lösungen der in Titel genannten Funktionsgleichung angegeben, wobei die Veränderlichen $x, y, x+y, x-y$ die Elemente einer additiven Abel'schen Gruppe Ω sind, die aber mit x auch das Element $x/2$ enthält, und die Punkte $F(x), G(x), F_1(x), G_1(x), \dots, F_n(x), G_n(x)$ in einer beliebigen Körper Ω der Charakteristik 0 spalten. Die vorliegenden Funktionen sind unbekannt (oder teilweise bekannt). Wie das bekannt ist, sind die Funktionen $F(x), G(x), F_1(x), G_1(x), \dots, F_n(x), G_n(x)$ auch in den Formen

$$\begin{cases} F(x) = P(x) + Q(x) \\ G(x) = R(x) + S(x) \\ F_1(x) = P_1(x) + Q_1(x) \\ G_1(x) = R_1(x) + S_1(x) \\ \dots \\ F_n(x) = P_n(x) + Q_n(x) \\ G_n(x) = R_n(x) + S_n(x) \end{cases}$$

darstellbar, wobei $P(x), R(x), P_1(x), R_1(x), \dots, P_n(x), R_n(x)$ gerade bzw. $Q(x), S(x), Q_1(x), S_1(x), \dots, Q_n(x), S_n(x)$ ungerade sind. Für $Q(x)$ und $S(x)$ gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} Q(x+y) - S(x+y) &= \sum_{i=1}^n [P_i(x)S_i(y) + Q_i(y)P_i(x)] \\ Q(x+y) + S(x+y) &= \sum_{i=1}^n [P_i(x)Q_i(y) + R_i(y)P_i(x)] \end{aligned}$$

womit das ganze Problem auf schon behandelte Funktionsgleichungen zurückgeführt werden kann [vgl. Prof. Math. Deussen, 9 (1902), 149-153, 214-223, 10 (1903), ...].



9. M. HOSSZÚ: Über die Verallgemeinerung der Distributivitätsgleichung.
Die Funktionalgleichung

$$F_0 [G(x_1, x_2, \dots, x_n), u] = H [F_1(x_1, u), F_2(x_2, u), \dots, F_n(x_n, u)]$$

läßt sich auf den Spezialfall $F_i = F_0$, $H = G$, $H = G$ mit Hilfe gewisser Umkehrbarkeitsbedingungen reduzieren.

10. A. MOÓR: Über die Objekte der Bahngeometrien dritter Ordnung.
Szeged (Bericht von S. GOZAB).

Eine Bahngeometrie dritter Ordnung ist eine geometrische Theorie derjenigen Mannigfaltigkeiten, in denen die Lösungskurven eines Differentialgleichungssystems von der Form

$$(1) \quad d^3 x^i / ds^3 + 3 \Gamma^i(x, x', x'') = 0, \quad x'^i = dx^i / ds, \quad x''^i = d^2 x^i / ds^2$$

die Rolle der Bahnen spielen. Aus der Forderung, daß (1) bezüglich einer Koordinatentransformation invariante Form haben soll, folgt, daß Γ^i dem Transformationsgesetz

$$(2) \quad \bar{\Gamma}^i(\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}'') = \bar{A}_p^i \Gamma^p(x, x', x'') - \bar{A}_{pq}^i x''^p x'^q - \frac{1}{3} \bar{A}_{pqr}^i x' p_x^q x'^r$$

genügt, wo $\bar{A}_p^i = \partial \bar{x}^i / \partial x^p$, $\bar{A}_{pq}^i = \partial^2 \bar{x}^i / \partial x^p \partial x^q$,

Wählt man für Γ^i die möglichen Typen:

$$(a) \quad \Gamma^i(x, x', x'') = b_j^i(x, x') x''^j + c^i(x, x'),$$

$$(b) \quad \Gamma^i(x, x', x'') = \frac{1}{2} a_{jk}^i(x, x') x''^j x''^k + b_j^i(x, x') x''^j + c^i(x, x'),$$

so kann mit Hilfe von (2) und im Hinblick auf die Form des invarianten Differential der Bahngeometrien dritter Ordnung gezeigt werden, daß die Fundamentalgrößen a_{jk}^i , b_j^i , c^i aus den Grundgrößen einer Berwaldschen affinen Bahngeometrie, bzw. aus den eines affinen Linien-elementarraumes bestimmbar sind.

11. R. BORGES: Von Transformationsgruppen erzeugte einparametrische Exponentialverteilungen.

Gegeben sei eine Familie \mathcal{P} von Wahrscheinlichkeitsmaßen $P_{\mathcal{J}}$, $\mathcal{J} \in \Theta$ auf einem G -Körper $\bar{\mathcal{A}}$ über einer abstrakten Grundmenge M , die Dichten der Gestalt $h(x) \exp[u_{\mathcal{J}} T(x) + v_{\mathcal{J}}]$ bezüglich eines Maßes μ auf $\bar{\mathcal{A}}$ besitzen. Ferner sei die Indexmenge Θ eine Gruppe von $\bar{\mathcal{A}}$ -meßbaren Transformationen von M mit dem Einselement e und erzeuge \mathcal{P} , d.h. $P_{\mathcal{J}}(K) = P_e(\mathcal{J}^{-1}K)$. Es wird mit Hilfe von Funktionalgleichungen auf Untergruppen der reellen Zahlen folgendes gezeigt: Es gibt ein invariantes Maß λ auf $\bar{\mathcal{A}}$, so daß die Familie \mathcal{P} Dichten vom Typ der Normalverteilung oder Gammaverteilungen bezüglich $\lambda | \bar{\mathcal{A}}$ besitzt.

12. B. SCHWEIZER: Funktionalgleichungen in der Theorie der statistischen Metrik.

In der Theorie der statistischen Metrik stößt man an mehreren Stellen

9. M. HÖSSZÖ: Über die Verflechtung der Matrixmultiplikation.
 Die Funktionstheorie

$$F_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = H(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

 läßt sich auf den Spezialfall $F_1 = F_0, H = G, H = G$ mit Hilfe gewisser Um-
 kehrbarkeitseigenschaften reduzieren.

10. A. MOOR: Über die Objekte der Bahngeometrie dritter Ordnung.
 Sagede (berichtet von S. GÖTTSCHEW).
 Eine Bahngeometrie dritter Ordnung ist eine geometrische Theorie
 derjenigen Mannigfaltigkeiten, in denen die Lösungskurven eines Dif-
 ferentialgleichungssystems von der Form

$$(1) \quad dx^1/ds + g^1(x^1, x^2) = 0, \quad x^1 = dx^1/ds, \quad x^2 = dx^2/ds$$

 die Rolle der Bahnen spielen. Aus der Forderung, daß (1) bezüglich
 einer Koordinatentransformation invariante Form haben soll, folgt,
 daß Γ^i dem Transformationsgesetz

$$(2) \quad \Gamma^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \Lambda^i_p(x^1, x^2) \Gamma^p(x^1, x^2) - \Lambda^i_p(x^1, x^2) \Gamma^p(x^1, x^2)$$

 genügt, wo $\Lambda^i_p = \partial \bar{x}^i / \partial x^p, \bar{\Lambda}^i_p = \partial x^i / \partial \bar{x}^p$.
 Wählt man für Γ^i die möglichen Typen:

$$(a) \quad \Gamma^i(x^1, x^2) = b^i(x^1, x^2) + c^i(x^1, x^2)$$

$$(b) \quad \Gamma^i(x^1, x^2) = \frac{1}{2} a^i_k(x^1, x^2) x^k + b^i(x^1, x^2) + c^i(x^1, x^2)$$

 so kann mit Hilfe von (2) und im Hinblick auf die Form des Invarianten-
 der Differentialgleichung dritter Ordnung gezeigt werden,
 daß die Fundamentalfunktionen a^i_k, b^i, c^i aus den Grunddaten einer Bahn-
 geometrie allein Bahngeometrie, bzw. aus einer elliptischen
 elementarform bestimmbar sind.

11. R. HÖRST: Von Transformationsgruppen erhaltene einwertige Expo-
 nentialfunktionen
 Gegeben sei eine Familie \mathcal{F} von Wahrscheinlichkeitsfunktionen $f(x)$
 auf einem \mathcal{E} -Körper \mathcal{E} über einer abstrakten Grundmenge M , die Dich-
 ten der Gestalt $h(x) \exp[\lambda T(x) + \mu]$ bezüglich eines Maßes μ auf \mathcal{E}
 besitzen. Ferner sei die Indexmenge \mathcal{E} eine Gruppe von \mathcal{E} -Erhaltungen
 Transformations von M mit dem Elementarwert e und erzeuge \mathcal{E} , d. h.
 $T(\lambda T(x) + \mu) = \lambda T(x) + \mu$. Es wird mit Hilfe von Funktionalgleichungen auf
 Untergruppen der reellen Zahlen folgenden Gestalt gezeigt zu sein, die
 variables Maß μ auf \mathcal{E} , so daß die Familie \mathcal{F} Dichten vom Typ der
 Normalverteilung oder Gammaverteilung bezüglich μ besitzt.

12. B. SCHWEIZER: Funktionalgleichungen in der Theorie der statistischen
 Methoden.



auf Funktionalgleichungen. Z.B. um den besten t-norm für einen angegebenen Raum zu finden, löst man eine Funktionalgleichung. Weiter ist das kartesische Produkt von SM-Räumen durch eine Funktionalgleichung bestimmt, und in der Definition eines statistischen linearen Raumes erscheint ein System von einer Funktionalgleichung und einer Funktionalungleichung. Weitere Eigenschaften von t-normen und Familien von t-normen wurden erwähnt. Zuletzt wurde die Frage, ob jede assoziative Fläche isotherm ist, die bei der vorjährigen Tagung vorgelegt wurde, mit Nein beantwortet.

13. D.V. IONESCU: Approximationsformeln und Funktionalgleichungen.
Cluj (Bericht von O.HAUPT).

Die Funktionalgleichung

/1/
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

geht für $f'(x)=g(x)$ über in die "Trapez"-Formel

/2/
$$\int_a^b g(x)dx = (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

wenn $R = \int_a^b \varphi(x)g''(x)dx = 0$; dabei ist $g \in C^2$ und $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2, a \leq x \leq \frac{a+b}{2}$,

$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-b)^2, \frac{a+b}{2} \leq x \leq b$. Bei Variablen a, b folgt /wozu $\varphi(x) > 0$,

$x \in (a, b)$ /, daß $g''(x) = 0$. Verallgemeinerung auf Funktionalgleichungen $A[f]=0$ derart, daß bei beliebigem f gilt $A[f] = \int_a^b \varphi(x)f^{(n)}(x)dx$.

Beispiel:

$$A[f] = \Delta^{n-1} f(x_1) - (-1)^n \frac{h}{2(n-1)} \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (n-2k+a) C_{n-1}^{k-1} f'(x_k) \right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x) dx.$$

Dabei ist φ in $[x_k, x_{k+1}]$ ein Polynom n-ten Grades $\varphi_k(x)$, das gewissen, vom Verfasser angegebenen Anfangsbedingungen in x_k genügt.

Es ist $\varphi(x) < 0$ in (x_1, x_2, \dots, x_n) . Aus $A[f] = 0$ folgt also, daß f ein Polynom n-ten Grades ist bei Variablen $x_1, x_k (f \in C^{n+1})$. Verf. stellt die Frage nach Abschränkung der Voraussetzung, daß $f \in C^{n+1}$.

14. S. GOZAB: Über ein Funktionalgleichungssystem von O.E.GHEORGHIU.

In Verallgemeinerung der bekannten Funktionalgleichung

$\varphi[x+y] \varphi(x) = \varphi(x) \varphi(y)$ auf komplexe Zahlen /nicht notwendig gewöhnliche komplexe Zahlen/ hat O.E.GHEORGHIU das folgende System von Funktionalgleichungen aufgestellt

/*/
$$\begin{cases} P[\Phi(x,y), \Psi(x,y)] = P(x,y)P(z,t) + CQ(x,y)Q(z,t) \\ Q[\Phi(x,y), \Psi(x,y)] = P(x,y)Q(z,t) + Q(x,y)P(z,t), \end{cases}$$

wo P, Q zwei gesuchte reelle Funktionen sind, C eine Konstante, die die Rolle eines Parameters spielt, bedeutet und Φ, Ψ kurz für folgende

auf Funktionalgleichungen, z.B. um den besten t -Form für einen an-
 gegebenen Raum zu finden, löst man eine Funktionalgleichung. Weiter-
 ist das klassische Produkt von SM -Räumen durch eine Funktionalgleichung
 bestimmt, und die Definition eines statistischen linearen
 Raumes erscheint ein System von einer Funktionalgleichung und einer
 Funktionalgleichung. Weitere Eigenschaften von t -Normen und t -
 Normen von t -Normen werden erwähnt. Zuletzt wurde die Frage, ob jede
 assoziative Fläche isochrom ist, die bei der vorläufigen Lösung vor-
 gelegt wurde, mit Nein beantwortet.

13. D.V. IONESCU: Approximationsformeln und Funktionalgleichungen
 (Bericht von O. HAUFF)

Die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

geht für $f(x) = g(x)$ über in die "Trapez"-Formel

$$\int_a^b g(x) dx = (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Wenn $R = \int_a^b \psi(x) dx = 0$, dabei ist $\psi \in C^2$ und $\psi(a) = \psi(b) = 0$, dann $\psi(x) \leq \frac{a+b}{2} - x$

$\psi(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2$, $\frac{a+b}{2} \leq x \leq b$. Bei Variablen a, b folgt (wenn $\psi(x) > 0$,

$x \in (a, b)$, dass $g'(x) = 0$. Verallgemeinerung auf Funktionalgleichungen
 gen $A[f] = 0$ über f , das bei beliebigem f gilt $A[f] = 0$.

Beispiel:

$$A[f] = \Delta^{n-1} f(x) - (-1)^n \frac{f(x)}{x(x-1)} - \dots - \frac{f(x)}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}$$

$$= \int_a^b \psi(x) x^{n-1} dx$$

Dabei ist ψ ein Polynom n -ten Grades $\psi(x) = \psi_n x^n + \dots + \psi_0$.
 wissen, von Verläufer angegebenen Anfangsbedingungen in x genügt.
 Es ist $\psi(x) < 0$ in (x_1, x_2, \dots, x_n) . Aus $A[f] = 0$ folgt also, dass f
 ein Polynom n -ten Grades ist bei Variablen x_1, x_2, \dots, x_n .
 stellt die Frage nach Abschätzung der Voraussetzung, dass $f \in C^{n-1}$.

14. S. GOZAR: Über ein Funktionalgleichungssystem von O.E. GHORGHIU

In Verallgemeinerung der bekannten Funktionalgleichung

$$\psi(x+y) + \psi(x) + \psi(y) = \psi(x)\psi(y)$$

wählende komplexe Zahlen hat O.E. GHORGHIU das folgende System

$$\begin{cases} P[\psi(x, y)] = P(x, y)P(a, t) + Q(x, y)Q(a, t) \\ Q[\psi(x, y)] = P(x, y)Q(a, t) + Q(x, y)P(a, t) \end{cases}$$

wo P, Q zwei gegebene reelle Funktionen sind, a, C eine Konstante, die die
 Rolle eines Parameters spielt, bedeutet und ψ eine Funktion.



Ausdrücke stehen:

$$\bar{\phi} = x + zP(x,y) + CtQ(x,y) ,$$

$$\bar{\psi} = y + tP(x,y) + zQ(x,y) .$$

Herr GHEORGHIU hat das System /*/ gelöst unter Annahme, daß die Transformation $\bar{x}=P(x,y)$, $\bar{y}=Q(x,y)$ eine im Großen umkehrbare Transformation ist. Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, das System /*/ zu lösen unter der Voraussetzung, daß P,Q zur Klasse $C^{(1)}$ gehören. Durch Zurückführung auf ein System der partiellen Gleichungen von der Form

$$/**/ \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{H_1/P,Q}{\Delta} , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{H_2/P,Q}{\Delta} , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{H_3/P,Q}{\Delta} , \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{H_4/P,Q}{\Delta} .$$

wo $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} P^2 - CQ^2$ und H_i homogene Polynome zweiten Grades sind /wobei die Koeffizienten von den Werten $\partial P/\partial x$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ im Nullpunkt abhängen/. Durch Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen von /**/ erhält man ein algebraisches System von genannten Koeffizienten und weiterhin für diese Lösungen kann /**/ in effektiver Weise integriert werden, wonach man verifiziert, daß diese Lösungen auch Lösungen für /*/ sind. Die vollständige Tabelle der Lösungen enthält 5 Scharen von /ein- oder zwei-parametrischen/ Lösungen des Systems /*/.

15. I. MAKAI: Zwei Funktionalgleichungen für Quaternionen. (Bericht von Debrecen J.ACZEL).

Die Funktionalgleichung $f(XY) = f(X)f(Y)$ und $F(xy)=F(x)F(y)$ /kleine Buchstaben: Skalare, große Buchstaben: Quaternionen/ wurden im Zusammenhang mit der Fragestellung von O.TAUSSKY-TODD /Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach 1962, Problem 16/ gelöst. Allgemeine Lösungen $f(x) = m(|x|)$, $F(x) = m(x) [\cos \omega(x) + J \sin \omega(x)]$, wo die m beliebige Lösungen der additiven Kongruenz $\omega(xy) \equiv \omega(x) + \omega(y) \pmod{2\pi}$ und J eine beliebige konstante "Achse" von Quaternionen /d.h. Einheitsquaternion mit reeller Projektion 0/ ist.

16. D.S.MITRINOVIĆ: Über die Funktionalgleichung
Belgrad $3f/x,y,z/2=f/x,x,y/f/y,z,z/+f/y,y,z/f/z,x,x/+f/z,z,x/f/x,y,y/$
(Bericht von M.HOSSZU)

Die Lösung der vorliegenden Funktionalgleichung ist

$$f/x,y,z/ = \sqrt{\frac{1}{3}} [F/x,y/F/z,y/ + F/y,z/F/x,z/ + F/z,x/F/y,x/]$$

wo für gewisse x,y $F/x,y/=0$ und für alle anderen Paare von x,y $F/x,y/=H/x/2H/y/$ gültig ist.

Ausdrücke stehen:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= x + \alpha M(x, y) + \alpha^2 U(x, y) \\ \tilde{Y} &= y + \beta P(x, y) + \beta^2 Q(x, y) \end{aligned}$$

Herr GREGOR hat das System \tilde{X} gelöst unter Annahme, daß die Transformation $\tilde{X} = X(x, y)$, $\tilde{Y} = Y(x, y)$ eine in Großen umkehrbare Transformation ist. Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, das System \tilde{X} zu lösen unter der Voraussetzung, daß P, Q zur Klasse $O^{(1)}$ gehören. Durch Zurückführung auf ein System der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{H_1 P_1}{\Delta}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{H_2 P_2}{\Delta}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{H_3 P_3}{\Delta}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{H_4 P_4}{\Delta}$$

wo $\Delta = P_1^2 - Q_1^2$ und H_1, H_2, H_3, H_4 homogene Polynome zweiten Grades sind, wobei die Koeffizienten von den Werten $2P_1, 2P_2, 2P_3, 2P_4, 2Q_1, 2Q_2, 2Q_3, 2Q_4$ in Nullpunkt abhängen. Durch Aufteilung der Integrierbarkeitsbedingungen von \tilde{X} erhält man ein algebraisches System von gemeinsamen Nullstellen und weiterhin für diese Lösungen kann \tilde{X} in dieser Weise integriert werden, woson man verliert, daß diese Lösungen auch Lösungen für \tilde{X} sind. Die vollständige Tabelle der Lösungen enthält 5 Scharen von ein- oder zwei-parametrischen Lösungen der Systeme \tilde{X} .

15. I. MAKAI: Zwei Funktionengleichungen für Quasikonforme Abbildungen. Beressen 1. Klasse.

Die Funktionengleichung $f(XY) = f(X)f(Y)$ und $F(XY) = F(X)F(Y)$ sind höchstens Skalar, große Buchstaben: Quasikonforme Abbildungen. Zusammenhang mit der Fragestellung von O. TAUBSKY-TODD. Funktionengleichungen in Göttingen 1923, Problem 16. Allgemeine Lösungen $f(x) = m(x)$, $F(x) = n(x)$ [oder $w(x) + \lambda \ln|x(x)|$], wo die m beliebige Lösungen der additiven Kongruenz $m(xy) \equiv m(x) + m(y) \pmod{2\pi}$ und λ eine beliebige Konstante "Lösung" von Quasikonformität, Einheitsquasikonformität. Projektion O ist.

16. D. S. MIRINOVIC: Über die Funktionengleichung $f(x, y) = f(x) + f(y)$. Beilage: Bericht von M. HOSSEIN.

Die Lösung der vorliegenden Funktionengleichung ist $f(x, y) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(y, x)] + \frac{1}{2} [f(x, x) + f(y, y)]$ wo für gewisse x, y $f(x, y) = 0$ und für alle anderen Werte von x, y $f(x, y) = H(x, y)$ gilt ist.



17. S. KUREPA: Functional Equations for Elementary Functions in Vector Spaces.

Theorem 1. Let R be the set of reals, A a B -algebra, $T:R \rightarrow A$ a regular measurable function such that $T/t+s/T/t-s = T/t^2 T/s^2$ in all $t, s \in R$. Then, there is one and only one element $T \in A$ such that $T/t = T/0 / \exp t^2 T$ holds for all $t \in R$.

Theorem 2. Let X be a separable HILBERT space, A the B -algebra of all continuous and linear operators from X in X , and $T_i: R \rightarrow A / i=1,2,3,4 /$ functions such that
 a/ $T_1/t+s/T_2/t-s = T_3/t/T_4/s$ holds for all $t, s \in R$;
 b/ zero is not in the spectrum of any $T_i/t / i=1,2,3,4; t \in R$;
 c/ $t \rightarrow T_i/t / i=1,2,3 /$ weakly measurable /in L -Sense/ on an interval $\Delta \subseteq R$.

Under these conditions the functions T_i are strongly continuous. If in addition T_i/t is a normal operator and all these operators commute one with another then T_i is an exponential function of the form $\exp/t^2 T + tU$. Theorem 2 in the case of $\dim X < \infty$ was proved by S. KUREPA, Publ. de l'inst. Math. I.2, 1962, Beograd, p.99-108 and in the general case by F. VAJZOVIĆ and it will appear in the same journ.

18. L. LOSONCZI: Allgemeinste Lösungen der Funktionalgleichung
 Debrecen $f/ax+by+c = pf/x + qf/y + r$ (Bericht von J. ACZEL).

Die Funktionalgleichung im Titel hat dann und nur dann nichtkonstante /und nicht unbedingt stetige/ Lösungen, wenn a und p entweder beide transzendent oder beide algebraisch und Wurzeln desselben irreduziblen Hauptpolynoms sind und b und q entweder beide transzendent in bezug auf die Körper $R/a /$ bzw. $R/p /$ sind oder sind sie beide algebraisch in bezug auf diese Körper und die Koeffizienten der bezüglichen irreduziblen Hauptpolynomen entsprechen einander im Sinne der zwischen $R/a /$ und $R/p /$ bestehenden Isomorphie; ferner wenn im Falle $c=0, p+q=1$ auch $r=0$ besteht. Die allgemeinsten Lösungen werden mittels einer geeigneten Modifikation der Hamelschen Basen konstruiert.

19. G. GÁSPÁR: Die Charakterisierung der Determinanten mittels Funktionalgleichungen.

Es sei $R=a, b, \dots$ ein beliebiger unendlicher Integritätsbereich. Es seien weiter A, B, \dots Elemente des vollen Matrizenringes R_n vom Grade n über R . Es gilt der folgende Satz: Ist f eine Abbildung vom R_n in R , die nicht identisch gleich Null ist und den Axiomen

$$\begin{array}{l} \text{/a/} \quad f/A+B/ = \sum f/C/ \quad , \\ \text{/b/} \quad f/AB/ = f/A/f/B/ \quad , \\ \text{/c/} \quad f/aA/ = a^n f/A/ \quad , \quad /a \in R/ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{(hier fehlender Abschnitt} \\ \text{siehe Seite 15 unten)} \end{array}$$

17. S. KURPJA: Funktionalgleichungen der Elementar-Funktionen in Vektor-Räumen

Theorem 1. Sei R der Restklassenring eines kommutativen Ringes A modulo einem Ideal I . Sei $f: R \rightarrow R$ eine Abbildung, die die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$ für alle $x, y \in R$ erfüllt. Dann gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in R$.

Theorem 2. Sei X ein separabler HILBERT-Raum, A ein Banachraum. Sei $T: X \rightarrow A$ ein linearer Operator, der die Funktionalgleichung $T(x+y) = T(x) + T(y) + T(x)T(y)$ für alle $x, y \in X$ erfüllt. Dann gilt $T(x) = 0$ für alle $x \in X$.

Die Spektraltheorie von Operatoren $T: X \rightarrow X$ auf einem separablen Hilbert-Raum X wird hier für die Funktionalgleichung $T(x+y) = T(x) + T(y) + T(x)T(y)$ angewandt. Es wird gezeigt, dass $T(x) = 0$ für alle $x \in X$ gilt.

Unter dieser Bedingung sind die Funktionen f stark kontinuierlich. Wenn T ein normaler Operator ist, dann ist $T(x) = 0$ für alle $x \in X$. Dies wird durch die Untersuchung der Exponentialabbildung von T bewiesen.

S. KURPJA, Publ. de l'Inst. Math. I.S., 1962, Beograd, 9.99.000 und in der englischen Übersetzung von F. VAJZOVIC, die hier wiedergegeben ist.

18. I. LOSONCZI: Allgemeine Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$

Die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$ wird hier für beliebige Kommutative Ringe R und S gelöst. Es wird gezeigt, dass die Lösungen $f: R \rightarrow S$ die Form $f(x) = 0$ oder $f(x) = 1 - e^{-g(x)}$ für eine additive Abbildung $g: R \rightarrow S$ annehmen.

19. G. GABRI: Die Charakterisierung der Intervalle mittels Funktionalgleichungen

Es sei $R = a, b, \dots$ ein beliebiger unendlicher Intervallbereich. Sei $f: R \rightarrow R$ eine Abbildung, die die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$ erfüllt. Dann ist f eine konstante Funktion.

$f(x) = 0$
 $f(x) = 1 - e^{-g(x)}$
 $f(x) = 1 - e^{-g(x)}$
 $f(x) = 1 - e^{-g(x)}$



20. B. SCHWEIZER: Die Algebra der Funktionen.

Ein kurzer Beweis über die frühere Arbeit /B.SCHWEIZER und A.SKLAR, The Algebra of Functions, Math.Annalen, 139/1960/, 366-382, 143 /1961/, 440-441/ sowie über einige neue Resultate wurde gegeben.

21. O. HAUPT: Bemerkungen über Wronskische Determinante und lineare Abhängigkeit.

Es wurde über die Arbeit von Z.MOSZNER / Sur le wronskien et la dépendance linéaire des fonctions, Bull.Sci. Math. /2/, 85 /1961/, 165-180/ kurz berichtet, sowie über eine Verallgemeinerung des Satzes /S/ /S.174/ sowie des Satzes /T/ /S.177/ in der früher /Math.Z., 53 /1950/, 122-130/ angegebenen Richtung.

22. A. SKLAR: Bemerkungen über Superassoziativitätsgleichung.

Ein Bericht über die Untersuchungen von H.J.WHITLOCK über die Superassoziativitätsgleichung

$$f[f/a, b_1, b_2, \dots, b_n /, c_1, c_2, \dots, c_n] = f[a, f/b_1, c_1, c_2, \dots, c_n /, f/b_2, c_1, c_2, \dots, c_n /, \dots, f/b_n, c_1, c_2, \dots, c_n /]$$

und ihre Anwendungen bezüglich der Axiomatik der Funktionen von mehreren Veränderlichen, wurde vorgelegt.

B) Probleme und Bemerkungen.

1. In der Sitzung vom Mittwoch, den 9.10.1963 vormittags, weist HAUPT hin auf eine aus einem Interpolationsproblem hergeleitete Funktionalgleichung von SIPPPEL /Eine neue einfache, für den Praktiker bestimmte Extrapolationsmethode; Angew.Chemie, Neue Folge, 55 /1942/, 331-333, Berlin/. (O.HAUPT, Erlangen)

2. Determine all continuous solutions of $f[F(x, f/x)] = G(x, f/x)$, F, G being given continuous / strictly monotonic?/ functions /M.R. 16 141; 21, 5829; 23, 444; 24, 3442/. (M.KUCZMA, Katowice)

3. Unter welchen Bedingungen hat die Gleichung $\Phi[f^n/x] = G\{x, Q/x, Q[f/x], Q[f^{n-1}/x]\}$ eine bzw. unendlich viele Lösungen? /Vgl.M.R. 22, 6952; 23, 446 und 1960; 24, 2163 und 3440 . (M.KUCZMA, Katowice)

4. Suppose that f is a real solved function defined on reals and $f/x+y+f/x-y=2f/x+2f/y$. Suppose that f is bounded on a set T. Does this imply that f is bounded on $T+T=\langle t+s \mid t, s \in T \rangle$? (S.KUREPA, Zagreb)



So. B. SCHWEINER: Die Wronskianen der Funktionen
 Ein kurzer Beweis über die lineare Unabhängigkeit
 The Algebra of Functions, Math. Annalen, 129 (1956), 366-368, 143 (1957)
 440-441) sowie über einige neue Resultate wurde gegeben.

O. HAUPT: Bemerkungen über Wronskiane Determinanten und lineare Ab-
 hängigkeiten.
 Es wurde über die Arbeit von E. MOSZNER / zur linearen Unabhängigkeit
 abhängigkeit lineare des Funktionen, Math. Zeit., 72 (1956), 85 (1956)
 165-180 / kurz berichtet, sowie über eine Verallgemeinerung des Satzes
 / 8, 174 / sowie des Satzes / 8, 177 / in der linearen Math., 53
 / 1950 / 122-130 / angegebenen Richtung.

A. SKLAR: Bemerkungen über Supersozialitätstheorie.
 Ein Bericht über die Untersuchungen von H. J. WHITLOCK über die Super-
 assoziativitätstheorie

$$T[a_1, a_2, \dots, a_n] = T[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$T[a_1, a_2, \dots, a_n] = T[a_1, a_2, \dots, a_n]$$
 und ihre Anwendungen bezüglich der Axialität der Funktionen von
 höheren Verbindungen, wurde vorgelegt.
 B) Probleme und Bemerkungen.

1. In der Sitzung vom Mittwoch, den 9. 10. 1957, vorläufige, keine
 HAUPT hin auf eine aus einem Interpolationsproblem hergeleitete
 Funktionsgleichung von SIEBEL / eine neue einfache, für den praktischen
 bestimmte Extrapolationsmethode angewandte, neue Folge, 52 (1957)
 231-233, Berlin / (O. HAUPT, Berlin)

2. Determine all continuous solutions of $f(x) = g(x)$
 f, g being given continuous / strictly monotone / functions (M. R. 16
 1411-21, 2829; 23, 444-24, 3442) / (M. KUOZMA, Katowice)

3. Unter welchen Bedingungen hat die Gleichung

$$\phi(x) = a(x) \cdot \phi(x) + b(x)$$
 eine bzw. unendlich viele Lösungen? (M. R. 22, 6922; 23, 444 und
 1901; 24, 2165 und 2440) / (M. KUOZMA, Katowice)

4. Suppose that f is a real valued function defined on real numbers
 $f(x) + f(y) = f(x+y) + 2f(xy)$. Suppose that f is bounded on a set T .
 Does this imply that f is bounded on $T + (0, 1) \cdot T$?
 (E. KURAT, Lodz)



5. Found all solutions of the above functional equation.

(S.KUREPA, Zagreb)

6. Suppose f is real /complex/ solved function on reals such that $f/x+y/+f/x-y/=2f/x/f/y/$. Let f be continuous on a perfect bounded set P . Is then f continuous on the set $P+P^2$. Does this hold in P of strictly positive L -measure.

(S.KUREPA, Zagreb)

7. What can one say about graphs of f which satisfies one of the above functional equations.

(S.KUREPA, Zagreb)

8. Allgemeine Lösung von $f/T'XT,T'YT/=f/X,Y/$, wo X,Y,T beliebige Matrizen sind und T' die Transponierte von T ist.

(I. MAKAI, Debrecen)

9. Die Funktionalgleichung

$$/0/ \quad f/x+y/ + f/x-y/ - 2f/x/ = 2|y|g/x/$$

von Herrn G.N.SAKOWITSCH (Vgl.Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach 1962, Vortrag 7./ kann einfach so gelöst werden:

Mit $x \Rightarrow x-y$, bzw. $x \Rightarrow x+y$, bzw. $y \Rightarrow 2y$ folgen

$$/1/ \quad f/x/ + f/x-2y/ - 2f/x-y/ = 2|y|g/x-y/,$$

$$/2/ \quad f/x+2y/ + f/x/ - 2f/x+y/ = 2|y|g/x+y/,$$

$$/3/ \quad f/x+2y/ + f/x-2y/ - 2f/x/ = 4|y|g/x/ ;$$

aus 2./0/+1/+2/-3/ ergibt sich $2|y| [g/x+y/ + g/x-y/] = 0$, d.h. $g/x/ \equiv 0$.

(J.ACZÉL, Debrecen)

10. Zur Arbeit von Herrn D.V.IONESCU: Statt dreimaliger Differenzierbarkeit von $f/x/$ kann man auch ohne weitere Voraussetzung die Funktionalgleichung

$$/1/ \quad f' /\frac{x+y}{2}/ = \frac{f/x/-f/y/}{x-y}$$

lösen; $f/x/$ ist natürlich einmalig differenzierbar. Mit $y=0$, $f/0/=a$, $f/x/-a=g/x/$ und $f'/\frac{x}{2}/=\frac{g/x/}{x}$ geht die Gleichung /1/ in

$$\frac{g/x+y/}{x+y} = \frac{g/x/-g/y/}{x-y}, \quad \frac{g/x+y/-g/x/}{y} = \frac{2g/x/}{x-y} - \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{g/y/}{y}$$

über, d.h. nach dem Grenzübergang $y \rightarrow 0$ erhält man die gewöhnliche lineare Differentialgleichung $g'/x/=2\frac{g/x/}{x} - b$, $b=g'/0/$, welche die Lösung $g/x/=cx^2+bx$ besitzt. Damit ist $f/x/=cx^2+bx+a$. Ähnlich löst man mit einmaliger Differenzierbarkeitsannahme für $f/x/$ auch die Funktionalgleichung

$$/2/ \quad F/x+y/ = \frac{f/x/-f/y/}{x-y}$$

Mit etwas längerer Berechnung kann man die Gleichung /2/ auch ohne irgendwelche Regularitätsannahme /Differenzierbarkeit, Stetigkeit, Meßbarkeit, usw./ ganz allgemein lösen. (E.VINCZE, Miskolc)



5. Find all solutions of the above functional equation.
(S. KUREPA, Zagreb)

6. Suppose f is real/complex valued function on reals such that $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$. Let f be continuous on a perfect bounded set P . Is then f continuous on the set $P+P$? Does this hold in P of strictly positive \mathbb{R} -measure.
(S. KUREPA, Zagreb)

7. What can one say about graphs of f which satisfies one of the above functional equations.
(S. KUREPA, Zagreb)

8. Allgemeine Lösung von $f(TX) + f(TY) = f(X) + f(Y)$, wo X, Y, T beliebige Matrizen sind und T die Transponierte von T ist.
(I. MAKAI, Debrecen)

9. Die Funktionalgleichung $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ von Herrn G.N. SAKOWITSCH (Vgl. Lösung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach 1962, Vortrag 7.) kann einfach so gelöst werden:
Mit $x=y$, bzw. $x=xy$, bzw. $y=xy$ folgen
 $f(x) + f(x-2y) - 2f(x-y) = 2f(y) + 2f(xy)$
 $f(x+2y) + f(x) - 2f(x+y) = 2f(y) + 2f(xy)$
 $f(x+2y) + f(x-2y) - 2f(x) = 4f(y) + 4f(xy)$
aus $2 \cdot (0) + (1) + (2) - (3)$ ergibt sich $2f(y) + 2f(xy) = 0$, d.h.
 $f(x) = 0$
(L. AOKI, Debrecen)

10. Zur Arbeit von Herrn D.V. JONESCH: Statt höherer Differenzierbarkeit von $f(x)$ kann man auch ohne weitere Voraussetzungen die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

lösen; $f(x)$ ist natürlich ebenfalls differenzierbar. Mit $y=0$, $f(0)=a$, $f(x) - a = g(x)$ und $f\left(\frac{x}{2}\right) - a = \frac{g(x)}{2}$ geht die Gleichung $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2}$ in $\frac{g(x)}{2} = \frac{g(x)+a}{2}$, $\frac{g(x)-a}{2} = \frac{g(x)+a}{2}$, $\frac{g(x)-a}{2} - \frac{g(x)+a}{2} = 0$, $\frac{g(x)-a-g(x)-a}{2} = 0$, $\frac{-2a}{2} = 0$, $-a = 0$, $a = 0$.
Über, d.h. nach dem Grenzübergang $y \rightarrow 0$ erhält man die gewöhnliche lineare Differentialgleichung $g'(x) = -\frac{g(x)}{x}$, bzw. 0 , welche die Lösung $g(x) = 0$ besitzt. Damit ist $f(x) = a$. Ähnlich löst man mit einseitiger Differenzierbarkeitssumme für $f(x)$ auch die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Mit etwas längerer Berechnung kann man die Gleichung $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ auch ohne irgendwelche Regularitätsannahme (Differenzierbarkeit, Stetigkeit, Messbarkeit, usw.) ganz allgemein lösen.
(E. VINCKE, Nikol)



11. Zur Arbeit von Herrn D.V. IONESCU: Die Funktionalgleichung $\frac{f/x - f/y}{x-y} = g/\frac{x+y}{2}$ geht mit $x=u+v$ und $y=u-v$ über in $f/u+y - f/u-v = 2vg/u$. Mit $u \Rightarrow u-v$, $u \Rightarrow u+v$ und $v \Rightarrow 2v$ erhält man die Gleichungen

$$/1/ \quad f/u - f/u-2v = 2vg/u-v,$$

$$/2/ \quad f/u+2v - f/u = 2vg/u+v,$$

$$/3/ \quad f/u+2v - f/u-2v = 4vg/u.$$

Da auch die Gleichung $g/u+v + g/u-v - 2g/u = 0$ aus $/1/+2/-3/$ folgt, ist $g/u = a/u + b$, wo a/u eine additive Funktion ist. So ist $f/x = f/0 + x[\frac{a/x}{2} + b]$. Rücksubstitution ergibt $a/x = 2ax$, so daß $f/x = ax^2 + bx + c$. Dies ist einfacher als die in Bemerkung 10 erwähnte elementare Lösungsmethode. (J.ACZÉL, Debrecen)

12. Zur Arbeit von Herrn D.V. IONESCU: Die Funktionalgleichung

$$/0/ \quad \frac{f/x - f/y}{x-y} = g/x+y$$

geht mit $y \Rightarrow \frac{x+y}{2}$ bzw. $x \Rightarrow \frac{x+y}{2}$ über in

$$/1/ \quad 2\frac{f/x - f/\frac{x+y}{2}}{x-y} = g/\frac{3x+y}{2},$$

bzw.

$$/2/ \quad 2\frac{f/\frac{x+y}{2} - f/y}{x-y} = g/\frac{x+3y}{2},$$

woraus man mit $\frac{3x+y}{2} = u$ und $\frac{x+3y}{2} = v$ die Jensensche Gleichung

$g/\frac{u+v}{2} = \frac{g/u + g/v}{2}$ erhält, d.h. $g/u = a/u + b$ ist (a/u additive Funktion). Zurücksetzen ergibt $a/x/y = a/y/x$, d.h. $a/x = ax$, $g/x = ax + b$, usw. /wie in Bemerkung 11/. (J.ACZÉL, Debrecen)

13. Funktionalgleichung der Gestalt $f[F/x, y] = H[f/x, f/y]$ mit stetiger F , streng monotonen F und H können auf die im zweiten Vortrag von ACZÉL /Vortrag 7/ betrachtete Gleichung reduziert werden.

(J.ACZEL, Debrecen - M.HOSSZÚ, Miskolc)

14. Es sei V ein Vektorraum /über einem Körper K / mit dem Begriff des internen Produktes gegeben. Es sei Q/x , wo $x \in V$, eine quadratische Form in V erklärt. Man betrachtet die Funktionalgleichung

$$/*/ \quad Q[f/x, y] = Q/x \cdot Q/y,$$

wo $f/x, y$ eine gesuchte Funktion von der Eigenschaft $f: V \times V \rightarrow V$ ist. Es ist die Frage nach der allgemeinen Lösung der Gleichung $/*/$. Im Spezialfall, wenn V ein n -dimensionaler Vektorraum V_n ist, wäre es dann wünschenswert, aus der allgemeinen Form der Lösung von $/*/$ den bekannten HURWITZschen Satz zu bekommen, daß, falls f eine bilineare Form sein soll, es nur der Fall für $n=1$ /trivial/, $n=2$, $n=4$ und $n=8$ sein kann.

(S.GOŁAB, Kraków)

11. Zur Arbeit von Herrn D.V. JONES: Die Funktionalgleichung
 $f(x) - f(y) = \frac{x+y}{2} f\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ geht mit $x = u+v$ und $y = u-v$ über in $f(u+v) - f(u-v) = 2v g\left(\frac{u-v}{u+v}\right)$. Mit $u = u-v$, $v = u+v$ und $y = \frac{2v}{2u+v}$ erhält man die Gleichungen

$$f(u) - f\left(\frac{2v}{2u+v}\right) = 2v g\left(\frac{u-v}{u+v}\right) \quad (1)$$

$$f(u+2v) - f(u) = 2v g\left(\frac{u+v}{u}\right) \quad (2)$$

$$f(u+2v) + f(u-2v) = 4v g\left(\frac{u}{u}\right) \quad (3)$$

Da auch die Gleichung $g\left(\frac{u+v}{u}\right) + g\left(\frac{u-v}{u}\right) = 0$ aus $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ folgt, ist $g\left(\frac{u}{u}\right) = 0$, wo $g(u)$ eine additive Funktion ist. So ist $f(x) = -\frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2}\right) + d$. Rücksubstitution ergibt $f(x) = ax$, so dass $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dies ist einfacher als die in Bemerkung 10 erwähnte

elementare Lösungsmethode. (J. AGER, Debreceň)

12. Zur Arbeit von Herrn D.V. JONES: Die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} + \frac{f(x+y)}{x+y}$$

geht mit $y = \frac{x+V}{2}$ bzw. $x = \frac{x+V}{2}$ über in

$$2 \frac{f\left(\frac{x-\frac{x+V}{2}}{x+\frac{x+V}{2}}\right)}{x-\frac{x+V}{2}} = \frac{f(x)-f\left(\frac{x+V}{2}\right)}{x-\frac{x+V}{2}} + \frac{f\left(\frac{x+\frac{x+V}{2}}{x+\frac{x+V}{2}}\right)}{x+\frac{x+V}{2}}$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{2}{x-V} \frac{f\left(\frac{x-V}{2}\right)}{2} = \frac{f(x)-f\left(\frac{x+V}{2}\right)}{x-\frac{x+V}{2}} + \frac{f\left(\frac{x+V}{2}\right)}{x+\frac{x+V}{2}}$$

woraus man mit $\frac{x+V}{2} = u$ und $\frac{x-V}{2} = v$ die Jensen'sche Gleichung $\frac{f(u+v)}{2} = \frac{f(u)+f(v)}{2}$ erhält, d.h. $g(u) = \frac{f(u)+f(v)}{2}$ ist $g(u)$ additive Funktion). Zurücksetzen ergibt $f(x) = ax^2 + b$, d.h. $f(x) = ax^2 + b$.

neu. (wie in Bemerkung 11). (J. AGER, Debreceň)

13. Funktionalgleichung der Gestalt $f\left(\frac{x}{y}\right) = H\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)$ mit

stetiger f , streng monotonen F und H können auf die im zweiten Vortrag von AGER \textit{Vortrag 7} betrachtete Gleichung reduziert werden.

(J. AGER, Debreceň - M. HOSSZU, Miskolc)

14. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit dem Bezirkt des internen Produktes gegeben. Es sei $Q(x)$, wo $x \in V$, eine quadratische Form in V erklärt. Man betrachte die Funktionalgleichung

$$Q\left(\frac{x}{y}\right) = Q(x)Q(y)$$

wo $f(x, y)$ eine gegebene Funktion von der Eigenschaft $f(x, y) = f(y, x)$ ist. Es ist die Frage nach der allgemeinen Lösung der Gleichung $Q(x) = 0$.

Im Spezialfall, wenn V ein n -dimensionaler Vektorraum V_n ist, wäre es dann wünschenswert, aus der allgemeinen Form der Lösung von $Q(x) = 0$ den bekannten HURWITZschen Satz zu bekommen, daß, falls f eine bilineare Form sein soll, es nur der Fall für $n=1$ \textit{triviale}, $n=2$, $n=4$ und $n=8$ sein kann.

(S. GOZAB, Kraków)



15. Lösung des Problems 5 von S.KUREPA: Die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$ ist $f(x)=\sum a_{ij}r_i r_j$, wo $x=\sum r_i b_i$ die HAMELSche Darstellung von x ist und $a_{ij}=a_{ji}$ sonst beliebig sind. (J.ACZÉL, Debrecen)

Auch die diesjährige Tagung muß als eine überaus fruchtbare und ungewöhnlich anregende bezeichnet werden. Für das Jahr 1964 liegt bereits eine Einladung aus dem Ausland zu einer Tagung über Funktionalgleichungen vor. Auf einhelligen Wunsch aller Teilnehmer wird daher nach Rücksprache mit der Leitung des Forschungsinstituts Oberwolfach mit deren Zustimmung erst für den Sommer 1965 die Veranstaltung einer Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach in Aussicht genommen.

Nachdem Herr Professor GOZAB im Namen der ausländischen Teilnehmer deren Dank an die Institutsdirektion und die Tagungsleitung zum Ausdruck gebracht hatte, endete die Tagung mit Schlußworten von Professor OSTROWSKI, der zugleich im Namen der Teilnehmer der Institutsleitung aufs herzlichste dankte dafür, daß sie die Tagung ermöglicht hatte.

E. VINCZE (Miskolc)

zu Seite 11, Vortrag GÁSPÁR

genügt, wobei in /a/ über alle Zeilen- oder Spaltenkombinationen C von A und B zu summieren ist, so ist f(A) die Determinante von A. Mit Hilfe geeigneter Gegenbeispiele kann man zeigen, daß die Axiome /a/-/c/ voneinander unabhängig sind und die Voraussetzung der Unendlichkeit des Integritätsbereiches im allgemeinen unentbehrlich ist.

12. Lösung des Problems 5 von S. KURPJA: Die allgemeine Lösung der
 Funktionalgleichung $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ ist $f(x) =$
 $= \frac{1}{2}ax^2$, wo $x, y \in \mathbb{R}$ die beliebigen reellen Zahlen sind und
 a eine sonst beliebige reelle Zahl ist. (J. AOSZ, Debrecen)

Auch die diesjährige Tagung muss als eine überaus fruchtbare und un-
 gewöhnlich anregende bezeichnet werden. Für das Jahr 1964 liegt be-
 reits eine Einladung aus dem Ausland zu einer Tagung über Funktional-
 gleichungen vor. Auf einhelligem Wunsch aller Teilnehmer wird daher
 nach Rücksprache mit der Leitung des Forschungsinstituts Oberwolfach
 mit deren Zustimmung erst für den Sommer 1965 die Veranstaltung einer
 Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach in Aussicht genom-
 men.

Nachdem Herr Professor GOXAR im Namen der ausländischen Teilnehmer
 deren Dank an die Institutsdirektion und die Tagungsleitung zum Aus-
 druck gebracht hatte, erbat die Tagung mit Schlussworten von Pro-
 fessor OSTROWSKI, der ergänzend im Namen der Teilnehmer der Institut-
 leitung seine herzlichsten Dankesworte darbrachte, dass die Tagung ermöglicht
 hatte.

E. VIWCE (Miskolc)

zu Seite 11, Vortrag GÁSPÁR

genügt, wobei in \mathbb{R} über alle Zeilen- oder Spaltenkombinationen
 C von A und B zu summieren darf, so ist $\mathbb{R} \setminus A$ die Determinante von A.
 Mit Hilfe geeigneter Gegenbeispiele kann man zeigen, dass die Axiome
 $\mathbb{R} \setminus C$ voneinander unabhängig sind und die Voraussetzung der Un-
 endlichkeit des Intervallbereiches im allgemeinen unentbehrlich
 ist.

