Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

(16)

Tagungsbericht

F u n k t i o n a l g l e i c h u n g e n

7.-11.Okt.1963
(2. Tagung)

Vom 7. bis 11. Oktober 1963 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach die zweite Tagung über Funktionalgleichungen unter der Leitung der Professoren J. ACZÉL (Debrecen), O. HAUPT (Erlangen) und A. OSTROWSKI (Montagnola-Basel) statt.

Eröffnet wurde die Tagung mit der Begrüßung durch den Direktor des Forschungsinstituts, Herrn Professor BARNER. Sodann nahm Herr HAUPT den 7o. Geburtstag von Herrn OSTROWSKI zum Anlaß, um kurz auf das bisherige umfangreiche Werk, insbesondere auch auf die Funktionalgleichungen betreffenden Arbeiten dieses bekannten Mathematikers hinzuweisen. Er brachte die Freude der Teilnehmer zum Ausdruck über die Förderung, die auch die diesjährige Tagung durch die Anwesenheit von Herrn OSTROWSKI erfahren werde. Anschließend begannen die Vorträge.

Bei der Tagung stand zunächst das Problem der Abelschen Funktionalgleichung im Vordergrund; es wurde in verschiedenen Vorträgen und in daran anschließenden Aussprachen behandelt. Daneben kamen wichtige Themen zur Sprache, wie Fragen der Klassifikation von Funktionalgleichungen, Eindeutigkeitssätze und allgemeine Methoden. Bemerkenswert viele neue Einsichten ergaben sich in Bezug auf Verallgemeinerungen in algebraischer Richtung und in Richtung Funktionalanalysis sowie über Fragen aus dem Gebiet der hyperkomplexen Systeme bzw. Matrizentheorie; und Interpolationsprobleme führten zu Aufgaben über Funktionalgleichungen. Daneben standen Anwendungen in der Geometrie und insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Vordergrund. Bei den lebhaften Diskussionen, die sich auch außerhalb der Sitzungen fortsetzten, wurden viele auch ungelöste Probleme besprochen, die dabei zum Teil weitere Klärung erfuhren. Als eine erfreuliche Auswirkung der letztjährigen Tagung war zu verzeichnen, daß verschiedene der im letzten Jahr besprochenen ungelösten Probleme inzwischen gelöst werden konnten.

Insgesamt waren 13 Teilnehmer anwesend, davon 1o aus dem Ausland.

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Funktionalgleichungen

7.-11.Okt.1965
(2. Tagung)

Vom 7. bis 11. Oktober 1965 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach die zweite Tagung über Funktionalgleichungen unter der Leitung der Professoren J. ACZÉL (Debrecen), O. HAUPT (Erlangen) und A. OSTROWSKI (Montagnola-Basel) statt.

Eröffnet wurde die Tagung mit der Begrüßung durch den Direktor des Forschungsinstituts, Herrn Professor BARNER. Sodann nahm Herr HAUPT den 70. Geburtstag von Herrn OSTROWSKI zum Anlaß, um kurz auf das bisherige umfangreiche Werk, insbesondere auch auf die Funktionalgleichungen betreffenden Arbeiten dieses bekannten Mathematikers hinzuweisen. Er brachte die Freude der Teilnehmer zum Ausdruck über die Förderung, die auch die diesjährige Tagung durch die Anwesenheit von Herrn OSTROWSKI erfahren werde. Anschließend begannen die Vorträge.

Bei der Tagung stand zunächst das Problem der Abelschen Funktionalgleichung im Vordergrund; es wurde in verschiedenen Vorträgen und in daran anschließenden Aussprachen behandelt. Daneben kamen wichtige Themen zur Sprache, wie Fragen der Klassifikation von Funktionalgleichungen, Eindeutigkeitssätze und allgemeine Methoden. Bemerkenswert viele neue Einsichten ergaben sich in Bezug auf Verallgemeinerungen in algebraischer Richtung und in Richtung Funktionalanalysis sowie über Fragen aus dem Gebiet der hyperkomplexen Systeme bzw. Matrizentheorie; und Interpolationsprobleme führten zu Aufgaben über Funktionalgleichungen. Daneben standen Anwendungen in der Geometrie und insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Vordergrund. Bei den lebhaften Diskussionen, die sich auch außerhalb der Sitzungen fortsetzten, wurden viele noch ungelöste Probleme besprochen, die dabei zum Teil weitere Klärung erfuhren. Als eine erfreuliche Auswirkung der letztjährigen Tagung war zu verzeichnen, daß verschiedene der im letzten Jahr besprochenen ungelösten Probleme inzwischen gelöst werden konnten.

Insgesamt waren 13 Teilnehmer anwesend, davon 10 aus dem Auslande

Von diesem kamen fünf aus Ungarn, zwei aus den Vereinigten Staaten und je einer aus Jugoslawien, Polen und der Schweiz. Leider konnte eine Anzahl der Eingeladenen, die bereits zugesagt hatten, nicht erscheinen; sie hatten aber Wert darauf gelegt, Mitteilungen zum Vortrag und zur Diskussion zu übersenden. Von diesen Mitteilungen konnten leider nur 7 ausführlich behandelt werden.

Die Teilnehmer waren die folgenden:

J. ACZÉL (Debrecen, Ungarn)
S. ACZÉL (Debrecen, Ungarn)
R. BORGES (Köln)
G. GÁSPÁR (Miskolc, Ungarn)
S. GOŁĄB (Kraków, Polen)
O. HAUPT (Erlangen)
M. HOSSZÚ (Miskolc, Ungarn)
H. KNESER (Tübingen)
S. KUREPA (Zagreb, Jugoslawien)
A. OSTROWSKI (Montagnola-Basel, Schweiz)
B. SCHWEIZER (Tucson, Arizona)
A. SKLAR (Chicago, Illinois)
E. VINCZE (Miskolc, Ungarn)

Kurzfassungen der Vorträge sowie die Problemstellungen und Bemerkungen folgen (getrennt voneinander) in chronologischer Reihenfolge

A) Vorträge

1. A. OSTROWSKI: Die Abelsche Funktionalgleichung und Reihenkonvergenzkriterien.

Für die Konvergenz der Reihe $\sum_{1}^{\infty} f(\nu)$ hat ERMAKOFF unter der Annahme, daß $f(x)$ stetig und positiv für $x \geq a$ ist, das folgende Kriterium aufgestellt: Wenn für eine stetig differenzierbare Funktion $\psi(x)$ mit $\psi(x) > x$ $(x \geq a)$ und ein $\alpha < 1$ $f(\psi(x))\,\psi'(x) \leq \alpha f(x)$ $(x \geq a)$ gilt, ist die Reihe konvergent, während, wenn $f(\psi(x))\,\psi'(x) \geq f(x)$ $(x \geq a)$ ist, die Reihe divergiert. Der Satz wurde zuerst von ERMAKOFF für eine monoton abnehmende Funktion $f(x)$ bewiesen und später, mit Hilfe einer geeignet konstruierten Lösung der Abelschen Funktionalgleichung, im allgemeinen für beliebige $f(x)$, doch wurden die Voraussetzungen über $\psi(x)$, unter denen dieser Beweis gilt, erst vom Vortragenden herausgearbeitet: Man hat anzunehmen, daß $\psi'(x)$ monoton wächst. Der Vortragende gab ferner einen die Abelsche Funktionalgleichung vermeidenden Beweis, der elementar und kurz

ist und auf der Einführung der Funktionen beruht:

$$F(x) = \operatorname*{Inf}_{a\leq u\leq x} f(u), \quad g(x) = \operatorname*{Sup}_{u\geq x} f(u) .$$

Im Falle allerdings, daß $\psi'(x)$ monoton fällt, klappt diese Methode nur für das Konvergenzkriterium.

2. J. ACZÉL: Einige ungelöste Fragen in der Theorie der Funktionalgleichungen.

1. Lösung der verallgemeinerten Bisymmetriegleichung $F[G(x,y),H(u,v)]=K[M(x,u),N(y,v)]$ und ähnlicher Gleichungen, wenn alle Veränderlichen und auch die Funktionswerte in verschiedenen Mengen liegen; Aczél-Belousov-Hosszú, Acta Math. Acad.Sci.Hung., 11 (196o), 127-136; Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 214-216; Hosszú, Magyar Tud.Akad.Mat.-Fiz.Oszt.Közl., 12 (1962), 13 (1963), 1-15.

2. Allgemeine differenzierbare Lösung der verallgemeinerten Distributivitätsgleichung $F[G(x,y),z]=H[K(x,z),L(y,z)]$; Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 229-239; Hosszú, Acta Sci.Math. Szeged, 2o (1959), 67-8o.

3. Allgemeine, in beiden Veränderlichen streng monotone und stetige Lösung der Autodistributivitätsgleichung $F[F(x,y),z]=$ $=F[F(x,z),F(y,z)]$; Aczél, Coll.Math., 4 (1956), 33-55; Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 237-239, 2o3-2o6; Hosszú, Coll. Math., 5 (1957), 32-42; Gesztelyi, Acta Univ. Debrecen, 8 (1962) 133-139.

4. Existenz streng monotoner nichtsymmetrischer Gruppen von reellen Zahlen; Aczél, Bull.Soc.Math.France, 76 (1949), 59-64; Vorlesungen über Funktionalgleichungen, 176-188; solche Halbgruppen existieren (Vincze, briefliche Mitteilung).

5. Folgerung auf die Konvexität in x der Lösungen von $F[F(x,u),v]=$ $=F(x,u+v)$ aus der Konvexität von $F(x,1)$; Problem der konvexen Iterierten; Kuczma, Habil.Dissertation, 1963.

6. Funktionalgleichungen für Funktionen von geordneten Paaren von Veränderlichen; Fréchet, Bull.Soc.Math.France, 6o (1932), 242-277; Rech.Théor.Med.,II. 1938; Hosszú, Ann.Univ.Eötvös Budapest, 7 (1964).

7. Charakterisierung von Funktionen der Gestalten $F(x_1,\ldots,x_n)=$ $=f^{-1}\left[\sum x_j f(x_j)/\sum x_j\right]$ und $F(x_1,\ldots,x_n)=f^{-1}\left[\sum g(x_j)f(x_j)/\sum g(x_j)\right]$ durch Funktionalgleichungen (Entropie); Aczél-Daróczy, Acta Math.Acad.Sci.Hung., 14 (1963), 95-121.

8. Allgemeine Lösung von $F_{mn}(x_1y_1,\ldots,x_1y_m,\ldots,x_ny_1,\ldots,x_ny_m)=$ $=F_n(x_1,\ldots,x_n)+F_m(y_1,\ldots,y_m)$ unter den Bedingungen $F_{mn}(x_{11},\ldots,x_{1m},\ldots,x_{n1},\ldots,x_{nm})\leq F_n(\Sigma x_{1j},\ldots,\Sigma x_{nj})+$ $+F_m(\Sigma x_{i1},\ldots,\Sigma x_{im})$, $F_n(x_1,\ldots,x_n)\leq F_n(\Sigma x_j/n,\ldots,\Sigma x_j/n)$ (natürlicher informationstheoretischer Entropiebegriff).

9. Lösung von $f^{-1}[\Sigma g(x_j)f(x_j)/\Sigma g(x_j)]=h^{-1}[\Sigma k(x_j)h(x_j)/\Sigma k(x_j)]$; Äquivalenz verallgemeinerter Entropieausdrücke; Bajraktarević, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr., 13 (1958), 243-248; Aczél-Daróczy, Publ.Math.Debrecen, 1o (1963).

1o. Alternative Funktionalgleichungen; Hosszú, Mat.Lapok, 14(1963); Vincze, Mat.Lapok, 14 (1963), Funkc.Ekvac., 6 (1963), Archiv d. Math., 14 (1963); Swiatak, Zeszyty Naukowe U.J.Kraków, 1964.

11. Funktionalgleichungen für mehrwertige Funktionen; Kiesewetter, Crelle J., 2o6 (1961), 113-171; Gołab-Kiesewetter-Losonczi, Publ.Math.Debrecen, 11 (1964).

12. Allgemeine (nichtstetige) Lösung der Funktionalgleichung $f[x+yf(x)]=f(x)f(y)$; Hosszú, Publ.Math.Debrecen, 5 (1958), 294-329; Gołab-Schinzel, Publ.Math.Debrecen, 6 (1959), 113-115; Vinzce, Ann.Polon.Math., 14 (1964).

13. Lösung der Cauchyschen Gleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$ falls $f(1/x)=$ $=f(x)/x^2$ $(x\neq 0)$; Problem von Halperin und Neumann.

14. Lösung der für fast alle Punktpaare der Ebene vorausgesetzten Cauchyschen Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$; Erdös, Coll.Math., 7 (196o), 311; Hartmann, Coll.Math., 8(1961), 77-79.

15. Lösung der für relative Primzahlen vorausgesetzten Additivitätsgleichung $f(mn)=f(m)+f(n)$, $(m,n)=1$, falls $|f(n+1)-f(n)|<c$; Erdös, Ann.of Math.(2), 47 (1946), 1-2o.

16. Lösung von $f(mn)=f(m)+f(n)$, $(m,n)=1$, falls $f(n+1)\geq f(n)$ oder $f(n+1)-f(n)\to 0$ mit Ausnahme einer Folge der Dichte 0 (Erdös).

17. Allgemeine elementare Methode für Gleichungen des Typus $f(x+y)+$ $+g(x-y)=\Sigma h_j(x)k_j(y)$; Sato, Proc.Phys.-Math.Soc.Japan (3), 1o (1928), 212-222; Vincze, Publ.Math.Debrecen, 9 (1962), 149-163, 314-323, 1o (1963); Sakowitch, 11 (1964).

18. Bestimmung der Homomorphismen mehrdimensionaler affiner Gruppen; Lösung des Funktionalgleichungssystems $F(XU,Xv+y)=F(X,y)F(U,v)$, $g(XU,Xv+y)=F(X,y)g(U,v)+g(X,y)$ (Große Buchstaben sind Matrizen, kleine sind Vektoren); Kuczma, Publ.Math.Debrecen, 6 (1959), 72-78;

Aczel, Bull.Un.Math.Itali (3), 15 (196o), 479-484; Bul.Jasi, 7 (1961), No.3-4, 7-14.

19. Allgemeinste Lösung der Gleichung F(XY)=F(X)F(Y) für Matrix-Funktionen; Schur, SB Preuss.Akad.Wiss., 1928, 1oo-124; Gołab, Ann.Polon.Math., 6 (1959), 1-13; Kuharzewski, Hosszú, Publ.Math. Debrecen, 6 (1959), 181-198, 288-289; Zajts, Bull.Acad.Polon.Sci. Math.Astr.Phys., 1o (1962), 362-367.

2o. Allgemeine Lösung von Teilsystemen der Definitionsgleichungen der Determinanten; Gáspár, Publ.Math.Debrecen, 3 (1954) 257-26o, 1o (1963).

21. Lösung der Cauchyschen Gleichungen in Algebren verschiedener Dimensionen; Verallgemeinerung eines von Makai teilweise gelösten Oberwolfacher Problems von O.Taussky; Problem 17 (Tagung in Oberwolfach über Funktionalgleichungen, 1962).

22. Allgemeinste Lösung von f(x.y)=g(x)h(y) in allgemeinen Mengen mit assoziativem x.y; Vincze, Studia Univ.Babes-Bolyai, 6 (1963); Hosszu, Studia Univ.Babes-Bolyai, 6 (1963); Aczel, Funkc.Ekvac., 6 (1963).

23. Qualitative (strukturale) Theorie der Funktionalgleichungen; Haupt, Crelle J., 186 (1944), 58-64;; Kemperman, Trans.Amer.Math. Soc., 86 (1957), 28-56; Aczél, Acta Math.Acad.Sci.Hung.,15 (1964).

3. H. KNESER: Die Abelsche Funktionalgleichung zur Exponentialfunktion.

Die Abelsche Funktionalgleichung zur Exponentialfunktion lautet

(1) $$F(e^x) = F(x) + 1 .$$

Es wurde auf SCHÖBEs Lösung (ZAMM, 38/1958/,19o-194) hingewiesen: Mit den Abkürzungen L(x)=log(1+x), e(x)=e^x wird

(2) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} L^n(e^n(x))$$

(3) $$g(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{L^n(x)} - n + \frac{1}{3}\log n\right]$$

eingeführt. Unmittelbar aus den Definitionen folgt g(L(x))=g(x)+1, f(x)=L[f(e(x))]; setzt man F(x)=-g(f(x)), so ergibt sich daraus (1).

Der Ansatz (3) stammt aus FATOUs Behandlung der Iteration bei einem Fixpunkt mit Multiplikator 1; er konvergiert gleichmäßig im Komplexen, so daß g holomorph ist. Dagegen ist die Konvergenz in (2) bisher nur im Reellen (und zwar sehr einfach) bewiesen, so daß man noch nicht weiß, ob SCHÖBEs Lösung F holomorph ist.

4. M.Mc.KIERNAN: Variational aspects of the Abel and Schröder Functional Equations (Bericht von B. SCHWEIZER).
Chicago

Es sei f eine komplexe Funktion mit der Eigenschaft, daß alle ihre Iterierten $f^{[t]}(z)$ (t reell) existieren. Man nennt die Kurve $z(t)=f^{[t]}(z_o)$ die Iterationsbahn von f durch den Anfangspunkt z_o. Satz: Es sei g eine analytische Funktion und $G(x,y)=|g'(\xi)|$. Dann sind die Extremalen des Funktionals

$$(1) \qquad \int_C g(x,y)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

durch den Ausdruck $x(t)+iy(t)=g^{[-1]}(at+g(z))$, wo a und z beliebige Konstanten sind, gegeben Setzt man $f(z)=g^{[-1]}(at+g(z))$, dann ist eine Lösung der Abelschen Funktionalgleichung für f, d.h. $g(f(z))=a+g(z)$, und die Extremalen von (1) sind Iterationsbahnen von f. Ferner ist Iterationsindex t proportional zu der G-lange der Iterationsbahn in der Riemannschen Geometrie, die durch (1) bestimmt ist. Ähnliches gilt für andere Funktionalgleichungen, z.B. die von SCHRÖDER und BOTTCHER (Canad.Math.Bull., 6 /1963/,No.2.).

5. M. KUCZMA: Über eine Differenzengleichung und eine Charakterisierung der Polynome.(Bericht von S. GOŁĄB).
Katowice

Es sei die Gleichung

$$/*/ \qquad \varphi(x+1) - \varphi(x) = f(x)$$

gegeben, wo f gegebene und φ gesuchte Funktion ist. Die Gleichung /*/ wird in einem Intervalle $I=(a,+\infty)(-\infty \leq a < \infty)$ betrachtet. Die Klasse der sog. konvexen Funktionen von Ordnung n sei mit M^n bezeichnet. $\Delta_1^n f(x)$ bezeichne die n-te Iterierte der Funktion $\Delta_1 f=f(x+1) - f(x)$. Der Verf. beweist den Satz, daß falls f zur Klasse M^n gehört und der Bedingung

$$\lim_{x\to\infty} \Delta_1^n f(x) = 0$$

genügt, so gibt es für jedes Paar von Zahlen $/x_o,y_o/$, wo $x_o \in I$ und y_o ganz beliebig sind, eine einzige Lösung der Gleichung /*/, die die Anfangsbedingung $y_o = \varphi(x_o)$ erfüllt. Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung der früheren Sätze von W.KRULL und vom Verf. dar.

Aus diesem Satz erhält man eine Charakterisierung der Polynome höchstens n-ten Grades, die in gewissem Maße stärker ist als der bisher bekannte Satz in dieser Hinsicht. Die Ergebnisse werden in den Fund. Math. erscheinen.

6. A. SKLAR: Further Steps towards the Classification of Functional Equations.

Die Algebren der verallgemeinerten Abbildungen, die bei der vorjährigen Tagung vorgelegt wurden, werden weiter studiert. Eine neue Operation, die Komma-Operation genannt wird, wird eingeführt. Mittels

dieser Operation kann man zwischen "wohlgeformten" und "unwohlgeformten" Funktionalgleichungen unterscheiden, und in manchen Fällen kann man etwaige Aussagen über die Struktur der Lösungen einer Funktionalgleichung angeben, z.B. die Lösungen der Assoziativitätsgleichung /welche sich in der Form FF=F(KK,FJ) ausdrücken läßt/ müssen alle Grad 2, Rang 1 und Index 1 haben.

7. J. ACZÉL: Ein Eindeutigkeitssatz in der Theorie der Funktionalgleichungen und ihrer Anwendungen.

Der Satz lautet: Ist $H(u,v,x,y)$ streng monoton (diese Bedingung kann abgeschwächt werden) in u (oder v), sind f und F stetig, und liegt $F(x,y)$ im Innern des Intervalles von x und y, so sind zwei Lösungen der Gleichung

$$f[F(x,y)] = H[f(x),f(y),x,y],$$

die in zwei Punkten zusammenfallen — überall identisch. Anwendungsmöglichkeiten:

1. Jensensche Funktionalgleichung; 2. Kraftfelder mit Schwerpunkten; 3. Identitätsprobleme von Mittelwerten und Entropien in der Informationstheorie; 4. Lösung der Autodistributivitätsgleichungen; u.a.

8. E. VINCZE: Über die Lösungen der Funktionalgleichung $F(x+y) + G(x-y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(y)$.

Es wurde eine allgemeine elementare Methode für die Lösungen der im Titel genannten Funktionalgleichung skizziert, wobei die Veränderlichen $x,y,x+y,x-y$ die Elemente einer additiven ABELschen Gruppe Ω sind, die aber mit x auch das Element $x/2$ enthält, und die Funktionen $F(x)$, $G(x)$, $f_i(x)$, $g_i(x)$ $(i=1,\dots,n)$ die Gruppe Ω in einen beliebigen Körper Ω_* der Charakteristik 0 abbilden. Die vorliegenden Funktionen sind unbekannt (oder teilweise bekannt). Wie das bekannt ist, sind die Funktionen $F(x),G(x),f_i(x),g_i(x)$ $(i=1,\dots,n)$ auch in den Formen

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= P(x) + Q(x), & f_i(x) &= p_i(x) + q_i(x), \\ G(x) &= R(x) + S(x), & g_i(x) &= r_i(x) + s_i(x), \end{aligned}\right\} (i=1,\dots,n)$$

darstellbar, wobei $P(x),R(x),p_i(x),r_i(x)$ gerade bzw. $Q(x),S(x)$, $q_i(x),s_i(x)$ ungerade sind. Für $Q(x)$ und $S(x)$ gelten die Gleichungen

$$Q(x+y) - S(x+y) = \sum_{i=1}^{n} [p_i(x)s_i(y)+p_i(y)s_i(x)],$$

$$Q(x+y) + S(x+y) = \sum_{i=1}^{n} [r_i(x)q_i(y)+r_i(y)q_i(x)],$$

womit das ganze Problem auf schon behandelte Funktionalgleichungen zurückgeführt werden kann [Vgl. Publ.Math.Debrecen, 9 (1962), 149-163, 314-323, 1o (1963), ...].

dieser Operation kann man zwischen "wohlgeformten" und "unwohlgeformten" Funktionalgleichungen unterscheiden und in manchen Fällen kann man etwaige Aussagen über die Struktur der Lösungen einer Funktionalgleichung angeben, z.B. die Lösungen der Assoziativitätsgleichung /welche sich in der Form FF=F(KK,FJ) ausdrücken läßt/ müssen alle Grad 2, Rang 1 und Index 1 haben.

7. J. ACZÉL: Ein Eindeutigkeitssatz in der Theorie der Funktionalgleichungen und ihrer Anwendungen.

Der Satz lautet: Ist H(u,v,x,y) streng monoton (diese Bedingung kann abgeschwächt werden) in u (oder v), sind f und F stetig, und liegt F(x,y) im Innern des Intervalles von x und y, so sind zwei Lösungen der Gleichung

$$f[F(x,y)] = H[f(x),f(y),x,y],$$

die in zwei Punkten zusammenfallen — überall identisch. Anwendungsmöglichkeiten:

1. Jensensche Funktionalgleichung; 2. Kraftfelder mit Schwerpunkten; 3. Identitätsprobleme von Mittelwerten und Entropien in der Informationstheorie; 4. Lösung der Autodistributivitätsgleichungen; u.a.

8. E. VINCZE: Über die Lösungen der Funktionalgleichung $F(x+y) + G(x-y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(y)$.

Es wurde eine allgemeine elementare Methode für die Lösungen der im Titel genannten Funktionalgleichung skizziert, wobei die Veränderlichen x,y,x+y,x-y die Elemente einer additiven ABELschen Gruppe Ω sind, die aber mit x auch das Element x/2 enthält, und die Funktionen F(x), G(x), $f_i(x)$, $g_i(x)$ (i=1,...,n) die Gruppe Ω in einen beliebigen Körper Ω_* der Charakteristik 0 abbilden. Die vorliegenden Funktionen sind unbekannt (oder teilweise bekannt). Wie das bekannt ist, sind die Funktionen F(x), G(x), $f_i(x)$, $g_i(x)$ (i=1,...,n) auch in den Formen

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= P(x) + Q(x), & f_i(x) &= p_i(x) + q_i(x), \\ G(x) &= R(x) + S(x), & g_i(x) &= r_i(x) + s_i(x), \end{aligned}\right\} (i=1,\dots,n)$$

darstellbar, wobei P(x), R(x), $p_i(x)$, $r_i(x)$ gerade bzw. Q(x), S(x), $q_i(x)$, $s_i(x)$ ungerade sind. Für Q(x) und S(x) gelten die Gleichungen

$$Q(x+y) - S(x+y) = \sum_{i=1}^{n} [p_i(x)s_i(y)+p_i(y)s_i(x)],$$

$$Q(x+y) + S(x+y) = \sum_{i=1}^{n} [r_i(x)q_i(y)+r_i(y)q_i(x)],$$

womit das ganze Problem auf schon behandelte Funktionsgleichungen zurückgeführt werden kann [Vgl. Publ.Math.Debrecen, 9 (1962), 149-163, 314-323, 1o (1963), ...].

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

9. M. HOSSZÚ: Über die Verallgemeinerung der Distributivitätsgleichung.
Die Funktionalgleichung

$F_o[G(x_1,x_2,\ldots,x_n),u] = H[F_1(x_1,u),F_2(x_2,u),\ldots,F_n(x_n,u)]$

läßt sich auf den Spezialfall $F_i=F_o$, $H=G$, $H=G$ mit Hilfe gewisser Umkehrbarkeitsbedingungen reduzieren.

1o. A. MOÓR: Über die Objekte der Bahnengeometrien dritter Ordnung.
Szeged (Bericht von S. GOŁĄB).
Eine Bahnengeometrie dritter Ordnung ist eine geometrische Theorie derjenigen Mannigfaltigkeiten, in denen die Lösungskurven eines Differentialgleichungssystems von der Form

(1) $d^3x^i/ds^3 + 3\Gamma^i(x,x',x'') = 0, \quad x'^i=dx^i/ds, \quad x''^i=d^2x^i/ds^2$

die Rolle der Bahnen spielen. Aus der Forderung, daß (1) bezüglich einer Koordinatentransformation invariante Form haben soll, folgt, daß Γ^i dem Transformationsgesetz

(2) $\bar\Gamma^i(\bar x,\bar x',\bar x'') = \bar A^i_p\Gamma^p(x,x',x'') - \bar A^i_{pq}x''^p x'^q - \frac{1}{3}\bar A^i_{pqr}x'^p x'^q x'^r$

genügt, wo $\bar A^i_p = \partial\bar x^i/\partial x^p$, $\bar A^i_{pq} = \partial^2\bar x^i/\partial x^p\partial x^q$, ...
Wählt man für Γ^i die möglichen Typen:

(a) $\Gamma^i(x,x',x'') = b^i_j(x,x')x''^j + c^i(x,x')$,

(b) $\Gamma^i(x,x',x'') = \frac{1}{2}a^i_{jk}(x,x')x''^j x''^k + b^i_j(x,x')x''^j + c^i(x,x')$,

so kann mit Hilfe von (2) und im Hinblick auf die Form des invarianten Differentials der Bahnengeometrien dritter Ordnung gezeigt werden, daß die Fundamentalgrößen a^i_{jk}, b^i_j, c^i aus den Grundgrößen einer Berwaldschen affinen Bahnengeometrie, bzw. aus den eines affinen Linienelementraumes bestimmbar sind.

11. R. BORGES: Von Transformationsgruppen erzeugte einparametrige Exponentialverteilungen.
Gegeben sei eine Familie $\mathfrak{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen P_ϑ, $\vartheta\in\Theta$ auf einem σ-Körper $\mathfrak{A}$ über einer abstrakten Grundmenge M, die Dichten der Gestalt $h(x)\exp[u_\vartheta T(x) + v_\vartheta]$ bezüglich eines Maßes μ auf $\mathfrak{A}$ besitzen. Ferner sei die Indexmenge Θ eine Gruppe von $\mathfrak{A}$-meßbaren Transformationen von M mit dem Einselement e und erzeuge $\mathfrak{P}$, d.h. $P_\vartheta(K)=P_e(\vartheta^{-1}K)$. Es wird mit Hilfe von Funktionalgleichungen auf Untergruppen der reellen Zahlen folgendes gezeigt: Es gibt ein invariantes Maß λ auf $\mathfrak{A}$, so daß die Familie $\mathfrak{P}$ Dichten vom Typ der Normalverteilung oder Gammaverteilungen bezüglich $\lambda|\mathfrak{A}$ besitzt.

12. B.SCHWEIZER: Funktionalgleichungen in der Theorie der statistischen Metrik.
In der Theorie der statistischen Metrik stößt man an mehreren Stellen

9. M. HOSSZÚ: Über die Verallgemeinerung der Distributivitätsgleichung.

Die Funktionalgleichung

$$F_o[G(x_1,x_2,\ldots,x_n),u] = H[F_1(x_1,u),F_2(x_2,u),\ldots,F_n(x_n,u)]$$

läßt sich auf den Spezialfall $F_i=F_o$, $H=G$, $H=G$ mit Hilfe gewisser Umkehrbarkeitsbedingungen reduzieren.

10. A. MOÓR: Über die Objekte der Bahnengeometrien dritter Ordnung.
Szeged (Bericht von S. GOŁĄB).

Eine Bahnengeometrie dritter Ordnung ist eine geometrische Theorie derjenigen Mannigfaltigkeiten, in denen die Lösungskurven eines Differentialgleichungssystems von der Form

(1) $d^3x^i/ds^3 + 3\Gamma^i(x,x',x'') = 0$, $x'^i = dx^i/ds$, $x''^i = d^2x^i/ds^2$

die Rolle der Bahnen spielen. Aus der Forderung, daß (1) bezüglich einer Koordinatentransformation invariante Form haben soll, folgt, daß Γ^i dem Transformationsgesetz

(2) $\bar\Gamma^i(\bar x,\bar x',\bar x'') = A^i_p\Gamma^p(x,x',x'') - \bar A^i_{pq}x''^p x'^q - \frac{1}{3}\bar A^i_{pqr}x'^p x'^q x'^r$

genügt, wo $\bar A^i_p = \partial\bar x^i/\partial x^p$, $\bar A^i_{pq} = \partial^2\bar x^i/\partial x^p\partial x^q$, ...

Wählt man für Γ^i die möglichen Typen:

(a) $\Gamma^i(x,x',x'') = b^i_j(x,x')x''^j + c^i(x,x')$,

(b) $\Gamma^i(x,x',x'') = \frac{1}{2}a^i_{jk}(x,x')x''^j x''^k + b^i_j(x,x')x''^j + c^i(x,x')$,

so kann mit Hilfe von (2) und im Hinblick auf die Form des invarianten Differentiale der Bahnengeometrien dritter Ordnung gezeigt werden, daß die Fundamentalgrößen a^i_{jk}, b^i_j, c^i aus den Grundgrößen einer Berwaldschen affinen Bahnengeometrie, bzw. aus den einer affinen Linienelementraumes bestimmbar sind.

11. R. BORGES: Von Transformationsgruppen erzeugte einparametrige Exponentialverteilungen.

Gegeben sei eine Familie $\mathcal{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$ auf einem σ-Körper $\mathfrak{A}$ über einer abstrakten Grundmenge M, die Dichten der Gestalt $h(x)\exp[u_\vartheta T(x) + v_\vartheta]$ bezüglich eines Maßes μ auf $\mathfrak{A}$ besitzen. Ferner sei die Indexmenge Θ eine Gruppe von $\mathfrak{A}$-meßbaren Transformationen von M mit dem Einselement e und erzeuge $\mathcal{P}$, d.h. $P_\vartheta(K) = P_e(\vartheta^{-1}K)$. Es wird mit Hilfe von Funktionalgleichungen zur Untergruppen der reellen Zahlen folgendes gezeigt: Es gibt ein invariantes Maß λ auf $\mathfrak{A}$, so daß die Familie $\mathcal{P}$ Dichten vom Typ der Normalverteilung oder Gammaverteilungen bezüglich $\lambda|\mathfrak{A}$ besitzt.

12. E. SCHWEIZER: Funktionalgleichungen in der Theorie der statistischen Metrik.

In der Theorie der statistischen Metrik stößt man an mehreren Stellen auf Funktionalgleichungen. Z.B. um den besten t-norm für einen angegebenen Raum zu finden, löst man eine Funktionalgleichung. Weiter ist das kartesische Produkt von SM-Räumen durch eine Funktionalgleichung bestimmt, und in der Definition eines statistischen linearen Raumes erscheint ein System von einer Funktionalgleichung und einer Funktionalungleichung. Weitere Eigenschaften von t-normen und Familien von t-normen wurden erwähnt. Zuletzt wurde die Frage, ob jede assoziative Fläche isotherm ist, die bei der vorjährigen Tagung vorgelegt wurde, mit Nein beantwortet.

13. D.V. IONESCU: <u>Approximationsformeln und Funktionalgleichungen.</u>
Cluj (Bericht von O.HAUPT).

Die Funktionalgleichung

/1/ $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

geht für $f'(x)=g(x)$ über in die "Trapez"-Formel

/2/ $$\int_a^b g(x)dx = (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) ,$$

wenn $R=\int_a^b \varphi(x)g''(x)dx = 0$; dabei ist $g \in C^2$ und $\varphi(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2$, $a \leq x \leq \frac{a+b}{2}$, $\varphi(x)=\frac{1}{2}(x-b)^2$, $\frac{a+b}{2} \leq x \leq b$. Bei Variablen a,b folgt /wozu $\varphi(x) > 0$, $x \in (a,b)$/, daß $g'''(x) \equiv 0$. Verallgemeinerung auf Funktionalgleichungen $A[f]=0$ derart, daß bei beliebigem f gilt $A[f]=\int_a^b \varphi(x)f^{(n)}(x)dx$.

Beispiel:

$$A[f]= \Delta^{n-1} f(x_1)-(-1)^n \frac{h}{2(n-1)}\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(n-2k+a)C_{n-1}^{k-1}f'(x_k)\right]$$
$$= \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x)f^{(n+1)}(x)dx.$$

Dabei ist φ in $[x_k,x_{k+1}]$ ein Polynom n-ten Grades $\varphi_k(x)$, das gewissen, vom Verfasser angegebenen Anfangsbedingungen in x_k genügt. Es ist $\varphi(x) < 0$ in $(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Aus $A[f] = 0$ folgt also, daß f ein Polynom n-ten Grades ist bei Variablen x_1,x_k ($f \in C^{n+1}$). Verf. stellt die Frage nach Abschränkung der Voraussetzung, daß $f \in C^{n+1}$.

14. S. GOŁĄB: <u>Über ein Funktionalgleichungssystem von O.E.GHEORGHIU.</u>

In Verallgemeinerung der bekannten Funktionalgleichung $\varphi[x+y\,\varphi(x)] = \varphi(x)\,\varphi(y)$ auf komplexe Zahlen /nicht notwendig gewöhnliche komplexe Zahlen/ hat O.E.GHEORGHIU das folgende System von Funktionalgeichungen aufgestellt

$$/\ast/ \quad \begin{cases} P[\Phi(x,y)\ ,\ \Psi(x,y)] = P(x,y)P(z,t) + CQ(x,y)Q(z,t) \\ Q[\Phi(x,y)\ ,\ \Psi(x,y)] = P(x,y)Q(z,t) + Q(x,y)\,P(z,t)\ , \end{cases}$$

wo P, Q zwei gesuchte reelle Funktionen sind, C eine Konstante, die die Rolle eines Parameters spielt, bedeutet und Φ, Ψ kurz für folgende auf Funktionalgleichungen, z.B. um den besten t-norm für einen angegebenen Raum zu finden, löst man eine Funktionalgleichung. Weiter ist das kartesische Produkt von SM-Räumen durch eine Funktionalgleichung bestimmt, und in der Definition eines statistischen linearen Raumes erscheint ein System von einer Funktionalgleichung und einer Funktionalungleichung. Weitere Eigenschaften von t-normen und Familien von t-normen wurden erwähnt. Zuletzt wurde die Frage, ob jede assoziative Fläche isotherm ist, die bei der vorjährigen Tagung vorgelegt wurde, mit Nein beantwortet.

13. D.V. IONESCU: <u>Approximationsformeln und Funktionalgleichungen.</u>
Cluj <u>(Bericht von O.HAUPT).</u>

Die Funktionalgleichung

/1/ $$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

geht für $f'(x)=g(x)$ über in die "Trapez"-Formel

/2/ $$\int_a^b g(x)dx = (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) ,$$

wenn $R = \int_a^b \varphi(x)g''(x)dx = 0$; dabei ist $g \in C^2$ und $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2$, $a \leq x \leq \frac{a+b}{2}$,

$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-b)^2$, $\frac{a+b}{2} \leq x \leq b$. Bei Variablen a,b folgt /wozu $\varphi(x) \geq 0$, $x \in (a,b)$/, daß $g''(x) \equiv 0$. Verallgemeinerung auf Funktionalgleichungen $A[f]=0$ derart, daß bei beliebigem f gilt $A[f] = \int_a^b \varphi(x) f^{(n)}(x)dx$.

Beispiel:

$$A[f] = \Delta^{n-1} f(x_1) - (-1)^n \frac{n}{2(n-1)} \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (n-2k+a) C_{n-1}^{k-1} f'(x_k)\right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x)dx.$$

Dabei ist φ in $[x_k, x_{k+1}]$ ein Polynom n-ten Grades $\varphi_k(x)$, das gewissen, vom Verfasser angegebenen Anfangsbedingungen in x_k genügt. Es ist $\varphi(x) < 0$ in $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Aus $A[f] = 0$ folgt also, daß f ein Polynom n-ten Grades ist bei Variablen x_1, x_k ($f \in C^{n+1}$). Verf. stellt die Frage nach Abschwächung der Voraussetzung, daß $f \in C^{n+1}$.

14. S. GOŁĄB: <u>Über ein Funktionalgleichungssystem von O.E.GHEORGHIU.</u>

In Verallgemeinerung der bekannten Funktionalgleichung

$\varphi[x+y\, \varphi(x)] = \varphi(x)\, \varphi(y)$ auf komplexe Zahlen /nicht notwendig gewöhnliche komplexe Zahlen/ hat O.E.GHEORGHIU das folgende System von Funktionalgleichungen aufgestellt

$$/*/ \quad \begin{cases} P[\Phi(x,y)\, ,\, \Psi(x,y)] = P(x,y)P(z,t) + CQ(x,y)Q(z,t) \\ Q[\Phi(x,y)\, ,\, \Psi(x,y)] = P(x,y)Q(z,t) + Q(x,y)\, P(z,t)\, , \end{cases}$$

wo P, Q zwei gesuchte reelle Funktionen sind, C eine Konstante, die die Rolle eines Parameters spielt, bedeutet und Φ, Ψ kurz für folgende

Ausdrücke stehen:
$$\Phi = x + zP(x,y) + CtQ(x,y)\ ,$$
$$\Psi = y + tP(x,y) + zQ(x,y)\ .$$
Herr GHEORGHIU hat das System /*/ gelöst unter Annahme, daß die Transformation $\overline{x}=P(x,y)$, $\overline{y}=Q(x,y)$ eine im Großen umkehrbare Transformation ist. Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, das System /*/ zu lösen unter der Voraussetzung, daß P,Q zur Klasse $C^{(1)}$ gehören. Durch Zurückführung auf ein System der partiellen Gleichungen von der Form

$$/{**}/ \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{H_1/P,Q/}{\Delta},\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{H_2/P,Q/}{\Delta},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{H_3/P,Q/}{\Delta}\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{H_4/P,Q/}{\Delta}\ .$$

wo $\Delta \overset{df}{=} P^2-CQ^2$ und H_i homogene Polynome zweiten Grades sind /wobei die Koeffizienten von den Werten $\partial P/\partial x$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ im Nullpunkt abhängen/. Durch Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen von /**/ erhält man ein algebraisches System von genannten Koeffizienten und weiterhin für diese Lösungen kann /**/ in effektiver Weise integriert werden, wonach man verifiziert, daß diese Lösungen auch Lösungen für /*/ sind. Die vollständige Tabelle der Lösungen enthält 5 Scharen von /ein- oder zwei-parametrigen/ Lösungen des Systems /*/.

15. I. MAKAI: <u>Zwei Funktionalgleichungen für Quaternionen. (Bericht von</u>
Debrecen <u>J.ACZÉL).</u>

Die Funktionalgleichung $f(XY) = f(X)f(Y)$ und $F(xy)=F(x)F(y)$ /kleine Buchstaben: Skalare, große Buchstaben: Quaternione/ wurden im Zusammenhang mit der Fragestellung von O.TAUSSKY-TODD /Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach 1962, Problem 16/ gelöst. Allgemeine Lösungen $f(x) = m(|x|)$, $F(x) = m(x)\,[\cos\omega(x) + J\sin\omega(x)]$, wo die m beliebige Lösungen der additiven Kongruenz $\omega(xy) \equiv \omega(x) + \omega(y) \pmod{2\pi}$ und J eine beliebige konstante "Achse" von Quaternionen /d.h. Einheitsquaternion mit reeller Projektion 0/ ist.

16. D.S.MITRINOVIĆ: Über die Funktionalgleichung
Belgrad $3f/x,y,z/^2=f/x,x,y/f/y,z,z/+f/y,y,z/f/z,x,x/+f/z,z,x/f/x,y,y/$
<u>(Bericht von M.HOSSZÚ)</u>

Die Lösung der vorliegenden Funktionalgleichung ist

$$f/x,y,z/ = \sqrt{\frac{1}{3}\left[F/x,y/F/z,y/ + F/y,z/F/x,z/ + F/z,x/F/y,x/\right]}$$

wo für gewisse x,y $F/x,y/=0$ und für alle anderen Paare von x,y $F/x,y/=H/x/^2H/y/$ gültig ist.

17. S. KUREPA: Functional Equations for Elementary Functions in Vector Spaces.

Theorem 1. Let R be the set of reals, A a B-algebra, T:R $\longrightarrow$ A a regular measurable function such that $T/t+s/T/t-s/=T/t/^2T/s/^2$ in all t,s $\in$ R. Then, there is one and only one element T $\in$ A such that $T/t/=T/0/\exp t^2T$ holds for all t $\in$ R.

Theorem 2. Let X be a separable HILBERT space, A the B-algebra of all continuous and linear operators from X in X, and T_i : R $\longrightarrow$ A / i=1,2,3,4/ functions such that

a/ $T_1/t+s/T_2/t-s/=T_3/t/T_4/s/$ holds for all t,s $\in$ R;

b/ zero is not in the spectrum of any $T_i/t/$ /i=1,2,3,4; t $\in$ R/;

c/ t $\longrightarrow$ $T_i/t/$ /i=1,2,3/ weakly measurable /in L-Sense/ on an interval $\Delta \leq$ R.

Under these conditi ons the functions T_i are strongly continuous. If in addition $T_i/t/$ is a normal operator and all these operators commute one with another then T_i is an exponential function of the form $\exp/t^2T+tU/$. Theorem 2 in the case of dimX $< \infty$ was proved by S. KUREPA, Publ.de l'inst.Math. I.2, 1962, Beograd, p.99-1o8 and in the general case by F.VAJZOVIĆ and it will appear in the same journ.

18. L. LOSONCZI: Allgemeinste Lösungen der Funktionalgleichung
Debrecen f/ax+by+c/=pf/x/+qf/y/+r (Bericht von J.ACZÉL).

Die Funktionalgleichung im Titel hat dann und nur dann nichtkonstante /und nicht unbedingt stetige/ Lösungen, wenn a und p entweder beide transzendent oder beide algebraisch und Wurzeln desselben irreduziblen Hauptpolynoms sind und b und q entweder beide transzendent in bezug auf die Körper R/a/ bzw. R/p/ sind oder sind sie beide algebraisch in bezug auf diese Körper und die Koeffizienten der bezüglichen irreduziblen Hauptpolynomen entsprechen einander im Sinne der zwischen R/a/ und R/p/ bestehenden Isomorphie; ferner wenn im Falle c=0, p+q=1 auch r=0 besteht. Die allgemeinsten Lösungen werden mittels einer geeigneten Modifikation der Hamelschen Basen konstruiert.

19. G. GÁSPÁR: Die Charakterisierung der Determinanten mittels Funktionalgleichungen.

Es sei R=a,b,... ein beliebiger unendlicher Integritätsbereich. Es seien weiter A,B,... Elemente des vollen Matrizenringes R_n vom Grade n über R. Es gilt der folgende Satz: Ist f eine Abbildung vom R_n in R, die nicht identisch gleich Null ist und den Axiomen

/a/ $f/A+b/ = \Sigma f/C/$,

/b/ $f/AB/ = f/A/f/B/$,

/c/ $f/aA/ = a^nf/A/$, /a $\in$ R/

(hier fehlender Abschnitt siehe Seite 15 unten)

2o. B. SCHWEIZER: Die Algebra der Funktionen.
Ein kurzer Beweis über die frühere Arbeit [B. SCHWEIZER und A. SKLAR, The Algebra of Functions, Math. Annalen, 139/196o/, 366-382, 143 /1961/, 44o-441] sowie über einige neue Resultate wurde gegeben.

21. O. HAUPT: Bemerkungen über Wronskische Determinante und lineare Abhängigkeit.
Es wurde über die Arbeit von Z. MOSZNER / Sur le wronskien et la dépendance linéaire des fonctions, Bull. Sci. Math. /2/, 85 /1961/, 165-18o/ kurz berichtet, sowie über eine Verallgemeinerung des Satzes /S/ /S.174/ sowie des Satzes /T/ /S.177/ in der früher /Math. Z., 53 /195o/, 122-13o/ angegebenen Richtung.

22. A. SKLAR: Bemerkungen über Superassoziativitätsgleichung.
Ein Bericht über die Untersuchungen von H. J. WHITLOCK über die Superassoziativitätsgleichung

$$f[f/a,b_1,b_2,\dots,b_n/,c_1,c_2,\dots,c_n] = f[a,f/b_1,c_1,c_2,\dots,c_n/,$$
$$f/b_2,c_1,c_2,\dots,c_n/,\dots,f/b_n,c_1,c_2,\dots,c_n/]$$

und ihre Anwendungen bezüglich der Axiomatik der Funktionen von mehreren Veränderlichen, wurde vorgelegt.

B) Probleme und Bemerkungen.

1. In der Sitzung vom Mittwoch, den 9.10.1963 vormittags, weist HAUPT hin auf eine aus einem Interpolationsproblem hergeleitete Funktionalgleichung von SIPPEL /Eine neue einfache, für den Praktiker bestimmte Extrapolationsmethode; Angew. Chemie, Neue Folge, 55 /1942/, 331-333, Berlin/.
(O. HAUPT, Erlangen)

2. Determine all continuous solutions of $f[F(x,f/x/)] = G(x,f/x/)$, F, G being given continuous / strictly monotonic?/ functions /M.R. 16 141; 21, 5829; 23, 444; 24, 3442/. (M. KUCZMA, Katowice)

3. Unter welchen Bedingungen hat die Gleichung

$$\Phi\,[f^n/x/] = G\,\{x,Q/x/,Q[f/x/],Q[f^{n-1}/x/]\}$$

eine bzw. unendlich viele Lösungen? /Vgl. M.R. 22, 6952; 23, 446 und 196o; 24, 2163 und 344o. (M. KUCZMA, Katowice)

4. Suppose that f is a real solved function defined on reals and $f/x+y/+f/x-y/=2f/x/+2f/y/$. Suppose that f is bounded on a set T. Does this imply that f is bounded on $T+T=\langle t+s \mid t,s \in T\rangle$?
(S. KUREPA, Zagreb)

2o. B. SCHWEIZER: <u>Die Algebra der Funktionen.</u>
Ein kurzer Beweis über die frühere Arbeit /B.SCHWEIZER und A.SKLAR, The Algebra of Functions, Math.Annalen. 139/1960/,356-362, <u>143</u> /1961/, 44o-447/ sowie über einige neue Resultate wurde gegeben.

21. O. HAUPT: <u>Bemerkungen über Wronskische Determinante und lineare Abhängigkeit.</u>
Es wurde über die Arbeit von Z.MOSZNER / Sur le wronskien et la dépendance linéaire des fonctions, Bull.Sci. Math. /2/, <u>85</u> /1961/, 165-18o/ kurz berichtet, sowie über eine Verallgemeinerung des Satzes /5/ /S.174/ sowie des Satzes /7/ /S.177/ in der früher /Math.Z., <u>53</u> /195o/, 122-15o/ angegebenen Richtung.

22. A. SKLAR: <u>Bemerkungen über Superassoziativitätsgleichung.</u>
Ein Bericht über die Untersuchungen von H.J.WHITLOCK über die Superassoziativitätsgleichung

$$f[f/a,b_1,b_2,\ldots,b_n/,c_1,c_2,\ldots,c_n] = f[a,f/b_1,c_1,c_2,\ldots,c_n/,$$
$$f/b_2,c_1,c_2,\ldots,c_n/,\ldots,f/b_n,c_1,c_2,\ldots,c_n/]$$

und ihre Anwendungen bezüglich der Axiomatik der Funktionen von mehreren Veränderlichen, wurde vorgelegt.

B) Probleme und Bemerkungen.

1. In der Sitzung vom Mittwoch, den 9.1o.1963 vormittags, weist HAUPT hin auf eine aus einem Interpolationsproblem hergeleitete Funktionalgleichung von SIPPEL /Eine neue einfache, für den Praktiker bestimmte Extrapolationsmethode; Angew.Chemie, Neue Folge, <u>55</u> /1942/, 331-333, Berlin/.
(O.HAUPT, Erlangen)

2. Determine all continuous solutions of $f[F(x,f/x/)] = G(x,f/x/)$, F, G being given continuous / strictly monotonic?/ functions /M.R.<u>16</u> 141; <u>21</u>, 5829; <u>23</u>, 444; <u>24</u>, 3442/.
(M.KUCZMA, Katowice)

3. Unter welchen Bedingungen hat die Gleichung

$$\Phi[f^n/x/] = G\{x,\varphi/x/,\varphi[f/x/],\varphi[f^{n-1}/x/]\}$$

eine bzw. unendlich viele Lösungen? /Vgl.M.R.<u>22</u>, 6952; <u>23</u>, 446 und 1960; <u>24</u>, 2163 und 344o .
(M.KUCZMA, Katowice)

4. Suppose that f is a real solved function defined on reals and $f/x+y/+f/x-y/=2f/x/+2f/y/$. Suppose that f is bounded on a set T. Does this imply that f is bounded on $T+T=\langle t+s|t,s\in T\rangle$?
(S.KUREPA, Zagreb)

5. Found all solutions of the above functional equation.

(S.KUREPA, Zagreb)

6. Suppose f is real /complex/ solved function on reals such that $f/x+y/+f/x-y/=2f/x/f/y/$. Let f be continuous on a perfect bounded set P. Is then f continuous on the set $P+P^2$. Does this hold in P of strictly positive L-measure.

(S.KUREPA, Zagreb)

7. What can one say about graphs of f which satisfies one of the above functional equations.

(S.KUREPA, Zagreb)

8. Allgemeine Lösung von $f/T'XT,T'YT/=f/X,Y/$, wo X,Y,T beliebige Matrizen sind und T' die Transponierte von T ist.

(I. MAKAI, Debrecen)

9. Die Funktionalgleichung

$$/0/ \qquad f/x+y/ + f/x-y/ - 2f/x/ = 2|y|g/x/$$

von Herrn G.N.SAKOWITSCH (Vgl.Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach 1962, Vortrag 7./ kann einfach so gelöst werden:

Mit $x \Rightarrow x-y$, bzw. $x \Rightarrow x+y$, bzw. $y \Rightarrow 2y$ folgen

$$/1/ \qquad f/x/ + f/x-2y/ - 2f/x-y/ = 2|y|g/x-y/,$$

$$/2/ \qquad f/x+2y/ + f/x/ - 2f/x+y/ = 2|y|g/x+y/,$$

$$/3/ \qquad f/x+2y/ + f/x-2y/ - 2f/x/ = 4|y|g/x/ ;$$

aus 2./0/+/1/+/2/-/3/ ergibt sich $2|y| \left[g/x+y/ + g/x-y/\right] = 0$, d.h. $g/x/ \equiv 0$.

(J.ACZÉL, Debrecen)

10. Zur Arbeit von Herrn D.V.IONESCU: Statt dreimaliger Differenzierbarkeit von f/x/ kann man auch ohne weitere Voraussetzung die Funktionalgleichung

$$/1/ \qquad f'\,/\frac{x+y}{2}/ = \frac{f/x/-f/y/}{x-y}$$

lösen; f/x/ ist natürlich einmalig differenzierbar. Mit y=0, f/0/=a, $f/x/-a=g/x/$ und $f'/\frac{x}{2}/=\frac{g/x/}{x}$ geht die Gleichung /1/ in

$$\frac{g/x+y/}{x+y} = \frac{g/x/-g/y/}{x-y}, \quad \frac{g/x+y/-g/x/}{y} = \frac{2g/x/}{x-y} - \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{g/y/}{y}$$

über, d.h. nach dem Grenzübergang $y \longrightarrow 0$ erhält man die gewöhnliche lineare Differentialgleichung $g'/x/=2\frac{g/x/}{x} - b$, $b=g'/0/$, welche die Lösung $g/x/=cx^2+bx$ besitzt. Damit ist $f/x/=cx^2+bx+a$. Ähnlich löst man mit einmaliger Differenzierbarkeitsannahme für f/x/ auch die Funktionalgleichung

$$/2/ \qquad F/x+y/ = \frac{f/x/-f/y/}{x-y}.$$

Mit etwas längerer Berechnung kann man die Gleichung /2/ auch ohne irgendwelche Regularitätsannahme /Differenzierbarkeit, Stetigkeit, Meßbarkeit, usw./ ganz allgemein lösen.

(E.VINCZE, Miskolc)

11. Zur Arbeit von Herrn D.V.IONESCU: Die Funktionalgleichung $\frac{f/x/-f/y/}{x-y} = g/\frac{x+y}{2}/$ geht mit $x=u+v$ und $y=u-v$ über in $f/u+y/-f/u-v/= =2vg/u/$. Mit $u \Rightarrow u-v$, $u \Rightarrow u+v$ und $v \Rightarrow 2v$ erhält man die Gleichungen

/1/ $\quad f/u/ - f/u-2v/ = 2vg/u-v/$,

/2/ $\quad f/u+2v/ - f/u/ = 2vg/u+v/$,

/3/ $\quad f/u+2v/ - f/u-2v/ = 4vg/u/$.

Da auch die Gleichung $g/u+v/+g/u-v/-2g/u/=0$ aus /1/+/2/-/3/ folgt, ist $g/u/=a/u/+b$, wo $a/u/$ eine additive Funktion ist. So ist $f/x/ = =f/o/+x\left[\frac{a/x/}{2}+b\right]$. Rücksubstitution ergibt $a/x/=2ax$, so daß $f/x/=ax^2+bx+c$. Dies ist einfacher als die in Bemerkung 1o erwähnte elementare Lösungsmethode. (J.ACZÉL, Debrecen)

12. Zur Arbeit von Herrn D.V.IONESCU: Die Funktionalgleichung

/O/ $\quad \frac{f/x/-f/y/}{x-y} = g/x+y/$

geht mit $y \Rightarrow \frac{x+y}{2}$ bzw. $x \Rightarrow \frac{x+y}{2}$ über in

/1/ $\quad 2\frac{f/x/-f/\frac{x+y}{2}/}{x-y} = g/\frac{3x+y}{2}/$,

bzw.

/2/ $\quad 2\frac{f/\frac{x+y}{2}/-f/y/}{x-y} = g/\frac{x+3y}{2}/$,

woraus man mit $\frac{3x+y}{2} = u$ und $\frac{x+3y}{2} = v$ die Jensensche Gleichung $g/\frac{u+v}{2}/= \frac{g/u/+g/v/}{2}$ erhält, d.h. $g/u/=a/u/+b$ ist ($a/u/$ additive Funktion). Zurücksetzen ergibt $a/x/y=a/y/x$, d.h. $a/x/=ax$, $g/x/=ax+b$, usw. /wie in Bemerkung 11/.

(J.ACZÉL, Debrecen)

13. Funktionalgleichung der Gestalt $f[F/x,y/]= H[f/x/,f/y/]$ mit stetiger F, streng monotonen F und H können auf die im zweiten Vortrag von ACZÉL /Vortrag 7/ betrachtete Gleichung reduziert werden.

(J.ACZEL, Debrecen - M.HOSSZÚ, Miskolc)

14. Es sei V ein Vektorraum /über einem Körper K/ mit dem Begriff des internen Produktes gegeben. Es sei $Q/x/$, wo $x \in V$, eine quadratische Form in V erklärt. Man betrachtet die Funktionalgleichung

/*/ $\quad Q[f/x,y/] = Q/x/.Q/y/$,

wo $f/x,y/$ eine gesuchte Funktion von der Eigenschaft $f: V \times V \longrightarrow V$ ist. Es ist die Frage nach der allgemeinen Lösung der Gleichung /*/. Im Spezialfall, wenn V ein n-dimensionaler Vektorraum V_n ist, wäre es dann wünschenswert, aus der allgemeinen Form der Lösung von /*/ den bekannten HURWITZschen Satz zu bekommen, daß, falls f eine bilineare Form sein soll, es nur der Fall für n=1 /trivial/, n=2, n=4 und n=8 sein kann.

(S.GOŁAB, Kraków)

15. Lösung des Problems 5 von S. KUREPA: Die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung $f/x+y/+f/x-y/=2f/x/+2f/x/+2f/y/$ ist $f/x/= = \sum a_{ij} r_i r_j$, wo $x = \sum r_i b_i$ die HAMELsche Darstellung von x ist und $a_{ij}=a_{ji}$ sonst beliebig sind. (J. ACZÉL, Debrecen)

Auch die diesjährige Tagung muß als eine überaus fruchtbare und ungewöhnlich anregende bezeichnet werden. Für das Jahr 1964 liegt bereits eine Einladung aus dem Ausland zu einer Tagung über Funktionalgleichungen vor. Auf einhelligen Wunsch aller Teilnehmer wird daher nach Rücksprache mit der Leitung des Forschungsinstituts Oberwolfach mit deren Zustimmung erst für den Sommer 1965 die Veranstaltung einer Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach in Aussicht genommen.

Nachdem Herr Professor GOŁAB im Namen der ausländischen Teilnehmer deren Dank an die Institutsdirektion und die Tagungsleitung zum Ausdruck gebracht hatte, endete die Tagung mit Schlußworten von Professor OSTROWSKI, der zugleich im Namen der Teilnehmer der Institutsleitung aufs herzlichste dankte dafür, daß sie die Tagung ermöglicht hatte.

E. VINCZE (Miskolc)

<u>zu Seite 11, Vortrag GÁSPÁR</u>

genügt, wobei in /a/ über alle Zeilen- oder Spaltenkombinationen C von A und B zu summieren ist, so ist f/A/ die Determinante von A. Mit Hilfe geeigneter Gegenbeispiele kann man zeigen, daß die Axiome /a/-/c/ voneinander unabhängig sind und die Voraussetzung der Unendlichkeit des Integritätsbereiches im allgemeinen unentbehrlich ist.