

Tagungsbericht

Mathematische Strukturen im Gymnasialunterricht ?

20. bis 25. Oktober 1963

Die Frage, ob und in welchem Maße der Begriff der mathematischen Struktur für den Gymnasialunterricht von Bedeutung werden kann, war Gegenstand einer Tagung, die im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach unter Leitung der Professoren M. BARNER und K. FLADT vom 20. bis 25. Oktober 1963 stattfand. Der Teilnehmerkreis setzte sich aus Gymnasiallehrern, Vertretern der Schulbehörden und Hochschullehrern der deutschsprachigen Länder zusammen. Folgende Herren waren anwesend:

ARZT, Gymn.-Prof., K., Tübingen	SIMONIS, OSch.Rat P., Düsseldorf
BARNER, Prof. Dr. M., Freiburg	SCHWEIZER, O.St.Dir., W., Tübingen
BEISSWANGER, P., Tübingen	STEINER, St.Rat., H.G., Münster
CHRISTOPH, G., Freiburg	STRUNZ, Prof.Dr.K., Würzburg
DENK, St.Prof. F., Erlangen	THIELE, Dr. E.-J., Hannover
FLADT, Prof. Dr. K., Calw	THIELE, Dr. H., Berlin
FLOHR, Dr. F., Freiburg	WÄSCHE, Ost.Rat H., Lübeck
FRIEDLI, Prof. Dr. R., Bern	WOLFF, Dr. G., Düsseldorf
GALL, OSch.Rat H., Düsseldorf	
GNIESSER, Min.Rat Dr. F., Wien	
GRIESEL, St.Rat Dr. H., Letmathe	
HÄRTIG, Prof. Dr. K., Berlin	
HILDEBRANDT, Ost.Rat R., Karlsruhe	
HRUBY, Dir. E., Wien	
JAHNER, St.Ass.H., Iserlohn	
JEGER, Dr. M., Luzern	
KIRSCH, St.Rat Dr. A., Gießen	
KREUKLER, Gymn.-Prof.L., Karlsruhe	
KÖRPERTH, Prof. W., Wien	
KRAFT, Ostud.Dir.A., Bad Hersfeld	
KUNLE, Prof. Dr. H., Karlsruhe	
LIERMANN, Ost.Rat Dr.H., Berlin	
RAITH, Prof. F., Freiburg	
RUEFF, Prof. Dr. M., Zürich	
RUOPP, St.Dir. P., Schwäb Gmünd	

1957/77

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach
E 20 10/57

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Mathematische Strukturen im Gymnasialunterricht ?

20. bis 25. Oktober 1957

Die Frage, ob und in welchem Maße der Begriff der mathematischen Strukturen im Gymnasialunterricht von Bedeutung werden kann, war Gegenstand einer Tagung, die im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach unter Leitung der Professoren M. BARNER und K. WLADE vom 20. bis 25. Oktober 1957 stattfand. Der Teilnehmerkreis setzte sich aus Gymnasiallehrern, Vertretern der Schulbehörden und Hochschullehrern der deutschsprachigen Länder zusammen. Folgende Herren waren anwesend:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| SIMONIS, Osch. Rat F., Düsseldorf | ARST, Gymn.-Prof., K., Tübingen |
| SCHWEINER, O.St. Dir., W., Tübingen | BARNER, Prof. Dr. M., Freiburg |
| STEINER, St. Rat., H.G., Münster | REISWANGER, P., Tübingen |
| STRUNK, Prof. Dr. K., Würzburg | CHRISTOPH, G., Freiburg |
| THIRLE, Dr. E.-J., Hannover | DEMK, St. Prof. P., Erlangen |
| THIRLE, Dr. H., Berlin | PLAIDT, Prof. Dr. K., Gaiw |
| WÄSCHE, OSt. Rat H., Lübeck | PIGHR, Dr. F., Freiburg |
| WOLFF, Dr. G., Düsseldorf | PRIEDL, Prof. Dr. R., Bern |
| | GALL, Osch. Rat H., Düsseldorf |
| | GRASSER, Min. Rat Dr. F., Wien |
| | GRIBSEL, St. Rat Dr. H., Letmathe |
| | HARTIG, Prof. Dr. K., Berlin |
| | HILDEBRANDT, OSt. Rat R., Karlsruhe |
| | HRUBY, Dr. E., Wien |
| | JÄNER, St. Ass. H., Isarlonn |
| | JEGGER, Dr. M., Jauern |
| | KIRSCH, St. Rat Dr. A., Gießen |
| | KREUKER, Gymn.-Prof. J., Karlsruhe |
| | KONPERTH, Prof. W., Wien |
| | KRAFT, OSt. Dir. A., Bad Hersfeld |
| | KUMLE, Prof. Dr. H., Karlsruhe |
| | LIERMANN, OSt. Rat Dr. H., Berlin |
| | RAITH, Prof. P., Freiburg |
| | RUEFF, Prof. Dr. M., Zürich |
| | RUOFF, St. Dir. F., Schwyz Gmund |



Bei dem größten Teil der 12 Vorträge, die auf der Tagung gehalten wurden, handelte es sich um Berichte über Unterrichtsversuche einerseits und über Bestrebungen und Planungen in einzelnen Ländern andererseits. An die Referate schlossen sich sehr anregende Diskussionen an; eine grundsätzliche Aussprache fand am letzten Nachmittag der Tagung statt. Übereinstimmung herrschte darin, daß die Strukturen keinesfalls neuer selbständiger Lehrstoff sein dürften. Dagegen war die Meinung, welche speziellen Strukturen für die Durchdringung des Unterrichts geeignet seien, nicht einheitlich. Als zu schwierig wurde durchweg eine wissenschaftlich einwandfreie Behandlung der reellen Zahlen, als geeignet vor allem die Gruppentheorie angesehen. - Wenn eine Neuordnung des Lehrstoffes stattfinden sollte, müßte möglichst auch die Volksschule miteinbezogen werden. Als sehr wünschenswert wurde die Schaffung eines neuen umfassenden Lehrbuchwerkes (und eines Handbuches für den Lehrer) bezeichnet, in dem die modernen Auffassungen zur Geltung kommen.

Im einzelnen wurden die folgenden Vorträge gehalten:

P. BEISSWANGER (Tübingen) sprach über Zugänge zum Strukturbegriff von seiner Geschichte her. Um zu vermeiden, daß unwesentlicher alter Stoff durch unwesentlichen neuen Stoff ersetzt wird, muß man sich auf die unabdingbaren Elemente der Mathematik besinnen. Dabei bewahren historische Kenntnisse vor einseitigen Deutungen. Der Vortragende ging in diesem Sinne näher auf Gauß' *Disquisitiones arithmeticae*, auf die Bemühungen des Kreises um Gergonne und des Cambridger Kreises (Peacock, de Morgan) sowie auf Hankels Buch von 1867 ein. Er stellte schließlich folgende Thesen auf: Reformversuche müssen ins Zentrum der Mathematik treffen. Strukturen können im Gymnasialunterricht nur in klassischen Verkörperungen vorkommen. Strukturen helfen, über den Dingen ihren Sinnbezug nicht zu vergessen.

G. CHRISTOPH (Freiburg) berichtete über das Buch von Papy: Die ersten Elemente der modernen Mathematik. In diesem Buch, von dem im Salle-Verlag inzwischen eine Übersetzung erschienen ist, sind Unterrichtsversuche von Papy, die speziell für zukünftige Kindergärtnerinnen durchgeführt wurden, beschrieben. Der Kurs beginnt mit einer einfachen Einführung in die Mengenalgebra und führt über die Relationentheorie zur Klärung des Funktionsbegriffs. Wesentliches didaktisches Hilfsmittel ist die Verwendung farbiger graphischer Darstellungen.

Bei dem größten Teil der 12 Vorträge, die auf der Tagung gehalten wurden, handelte es sich um Berichte über Untersuchungsverläufe einzelner und über Bestrebungen und Plannungen in einzelnen Ländern anderer Länder. An die Redate schlossen sich sehr anregende Diskussionen an; eine grundsätzliche Aussprache fand am letzten Nachmittag der Tagung statt. Über einstimmig herrschte darin, daß die Strukturen der neuer selbständiger Lehrstoffe sein sollten. Dagegen war die Meinung, welche speziellen Strukturen für die Durchdringung des Unterrichts geeignet seien, nicht einheitlich. Als zu schwierig wurde durchweg eine wissenschaftlich einwandfreie Behandlung der reellen Zahlen, als geeignet vor allem die Gruppentheorie angesehen. Wenn eine Neuordnung des Lehrstoffes stattfinden sollte, müßte möglichst auch die Vorlesung miteinbezogen werden. Als sehr wünschenswert wurde die Behaltung eines neuen umfassenden Lehrwerkes (und eines Handbuchs für den Lehrer) bezeichnet, in dem die modernen Axiome zur Geltung kommen.

Im einzelnen wurden die folgenden Vorträge gehalten:

F. BRISSWANGER (Tübingen) sprach über Zusätze zum Strukturtheorie von seiner Geschichte her. Um zu vermeiden, das ungewollte Alter des Stoffes durch ungewollte Neben Stoff ersetzt wird, muß man sich auf die unabhängigen Elemente der Mathematik besinnen. Dabei bewahren historische Kenntnisse vor einseitigen Deutungen. Der Vortragende ging in diesem Sinne näher auf Gauß' Disquisitiones arithmeticae auf die Bemerkungen des Kronecker am 18. März und des Cambridge-Krises (Teacock, de Morgan) sowie auf Hankels Buch von 1867 ein. Er stellte schließlich folgende Thesen auf: Reformversuche müssen ins Zentrum der Mathematik treffen. Strukturen können im Gymnasialunterricht nur in klassischen Verkörperungen vorkommen. Strukturen helfen, über den Dingen ihren Sinnzusammenhang nicht zu vergessen.

G. CHRISTOPH (Freiburg) berichtete über das Buch von Papy Die Elemente der modernen Mathematik. In diesem Buch, von dem im Salis Verlag inzwischen eine Übersetzung erschienen ist, sind Unterrichtsversuche von Papy, die speziell für zukünftige Kindergärtnerinnen durchgeführt wurden, beschrieben. Der Kurs beginnt mit einer einfachen Einführung in die Mengenlehre und führt über die Relationentheorie zur Klirung des Funktionsbegriffes. Wesentliches didaktisches Hilfsmittel ist die Verwendung farbiger graphischer Darstellungen.



Neben den genannten grundlegenden Dingen werden auch die reellen projektiven Ebenen und einige einfache Tatsachen aus der anschaulichen Topologie näher betrachtet.

F. DENK (Erlangen) beschäftigte sich mit dem notwendigen Umbau des Mathematikunterrichts unter besonderer Berücksichtigung der diesbezüglichen Bestrebungen in Frankreich und Belgien. Neben der Notwendigkeit, die Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik zu verringern, sind es die Wünsche der Wirtschaft, die eine Modernisierung des Mathematikunterrichts erforderlich machen. Um eine Fehlentwicklung zu vermeiden, müssen auch die im Ausland gemachten Versuche sorgfältig studiert und die Lehren aus den dort gemachten Erfahrungen gezogen werden. Es wird hingewiesen auf die Forderungen von Dieudonné, auf die Versuche von Papy (Brüssel), auf die Werke von Lucienne Félix, auf die vor französischen Gymnasiallehrern gehaltenen Vorträge von Revuz und auf die Vorschläge von Walusinski - St. Cloud.

K. FLADT (Freiburg/Calw) berichtete über das neue französische Unterrichtswerk von Bréard, wobei das Hauptaugenmerk darauf gerichtet war, inwieweit die Vorstellungen des Bourbakikreises in diesem Werk berücksichtigt worden sind.

F. FLOHR (Freiburg) wies in seinem Vortrag über die koordinatenfreie analytische Behandlung der Kegelschnitte und der affinen Abbildungen darauf hin, daß auch die analytische Geometrie geeignet sein kann, neuere, mehr begriffliche Schlußweisen im Schulunterricht wirksam werden zu lassen. Die angemessenen Werkzeuge zur Behandlung der affinen Abbildungen und der Kegelschnitte sind die Begriffe der linearen und der bilinearen Abbildung. Es wurde angedeutet, wie sich das Klassifizierungsproblem in durchsichtiger Weise lösen läßt.

K. HÄRTIG (Berlin) berichtete über die Neugestaltung des Mathematikunterrichts in seinem Lande. Schon im Rechenunterricht der unteren Klassen soll eine "Mathematisierung" erfolgen. Wenn genügend gut ausgebildete Lehrer vorhanden sind, soll die Rolle der Logik und der Mengenlehre deutlich hervorgehoben werden, und zwar für alle Altersstufen der Schüler. In der Analysis soll allen Schülern bis zum 10. Schuljahr der Konvergenzbegriff in sauberer Darstellung vermittelt werden. Für die Algebra ist die Behandlung des Homomorphie-

Neben den genannten erfindlichen Dingen werden auch die reellen projektiven Ebenen und einige einfache Tatsachen aus der anschaulichen Topologie näher betrachtet.

F. DENK (Erlangen) beschäftigte sich mit dem notwendigen Umlauf der Mathematik unter besonderer Berücksichtigung der algebraischen Bestrebungen in Frankreich und Belgien. Neben der Notwendigkeit, die Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik zu verringern, sind es die Wünsche der Wirtschaft, die eine Modernisierung der Mathematikunterrichts erforderlich machen. Um eine Fehleinschätzung zu vermeiden, müssen auch die im Ausland gemachten Erfahrungen sorgfältig studiert und die Lehren aus den dort gemachten Erfahrungen gezogen werden. Es wird hingewiesen auf die Forderungen von Dieudonné, auf die Versuche von Papp (Brüssel), auf die Werke von Maurice Félix, auf die vor französischen Gymnasiallehrern gehaltenen Vorträge von Revuz und auf die Vorschläge von Waisanski - St. Omer.

K. KLATT (Freiburg/Galw) berichtete über das neue französische Unterrichtsnetzwerk von Bréard, wobei das Hauptaugenmerk darauf gerichtet war, inwieweit die Vorkenntnisse der Bourgeoisie in diesem Werk berücksichtigt worden sind.

P. FLOHR (Freiburg) wies in seinem Vortrag über die Koordinatentheorie analytische Behandlung der Kegelschnitte und der affinen Abbildungen darauf hin, daß auch die analytische Geometrie geeignet sein kann, neuere, mehr begriffliche Sichtweisen im Schulunterricht wirksam werden zu lassen. Die angemessenen Werkzeuge zur Behandlung der affinen Abbildungen und der Kegelschnitte sind die Begriffe der linearen und der bilinearen Abbildung. Es wurde angedeutet, wie schon das Klassifizierungsproblem in überaus einfacher Weise lösen läßt.

K. HÄRTIG (Berlin) berichtete über die Kegelstumpfung des Mathematikunterrichts in seinem Lande. Neben im Rechnenunterricht der unteren Klassen soll eine "Mathematisierung" erfolgen. Wenn es gelingt, gut ausgebildete Lehrer vorhanden sind, soll die Rolle der Logik und der Mengenlehre deutlich hervorgehoben werden, und zwar für alle Altersstufen der Schüler. In der Analysis soll allen Schülern die zur 10. Schuljahr der Konvergenzbegriff in anderer Darstellung vermittelt werden. Für die Algebra ist die Behandlung des Homomorphismus



und Isomorphiebegriffe die wesentlichste Neuerung. Als methodische Prinzipien, die bei der Neugestaltung zu beachten sind, wurden genannt: a) Verallgemeinerungen und abstrakte Begriffsbildungen sind nur dann zulässig, wenn genügend viele Spezialfälle bekannt sind und mit der Abstraktion auch wirklich gearbeitet wird. b) Häufungsstellen von Schwierigkeiten sind zu vermeiden. c) Der (manchmal langweilige) Stoff ist zeitlich möglichst günstig zu verteilen. - Schließlich wies der Vortragende darauf hin, daß sehr wesentlich für die Realisierung des Projektes ein "Lehrbuch für den Lehrer" sein wird.

M. JEGER (Luzern) gab einen Bericht über einen Versuch mit der Abbildungsgeometrie. Da in der analytischen Geometrie leicht der geometrische Gehalt der Probleme von den algebraischen Schwierigkeiten in den Hintergrund gedrängt wird, bevorzugt der Vortragende die synthetisch-konstruktive Methode. Im Oberstufenunterricht liegt das Hauptinteresse nicht mehr bei der einzelnen Abbildung, es verlagert sich zunehmend auf das Zusammensetzen mehrerer Abbildungen und das Operieren in bestimmten Gruppen. Es wurde gezeigt, wie man mit Hilfe der perspektiven Kollineationen viele schöne geometrische Resultate erhalten kann.

A. KIRSCH (Gießen) sprach über die Veranschaulichung von Gruppenhomomorphismen. Homomorphe Abbildungen endlicher (ebener) Bewegungsgruppen können anschaulich durch einfache Mechanismen realisiert werden. Durch das Anbringen von "Verzierungen" kommt man in natürlicher Weise zu einer Motivierung der Begriffsbildung "Normalteiler". Das Verständnis des allgemeinen Homomorphiesatzes der Gruppentheorie kann so vorbereitet werden. Besonders suggestive Veranschaulichungen von Homomorphismen $h : Z_n \rightarrow Z_k$ zyklischer Gruppen sind genau dann möglich, wenn k und $\frac{n}{k}$ teilerfremd sind. Ein ähnliches Kriterium gilt für Diedergruppen.

H. LIERMANN (Berlin) befaßte sich mit dem Begriff der Äquivalenzrelation in der Schulmathematik. Im ersten Teil des Vortrages wurde darüber berichtet, wie (in der Oberstufe eines Mädchengymnasiums) der allgemeine Begriff der Relation und insbesondere der Begriff der Äquivalenzrelation behandelt wurde. Im zweiten Teil wurden folgende Beispiele für das Auftreten von Äquivalenzrelationen in der Schulmathematik gegeben: Einführung der Kardinalzahlen, Einführung der negativen, der rationalen, der reellen Zahlen, Äquivalenzrelationen zwi-

und Isomorphiebedeutung die wesentlichste Bedeutung. Als methodische Prinzipien, die bei der Neugestaltung zu beachten sind, wurden genannt: a) Verallgemeinerungen und abstrakte Beweismethoden sind nur dann zulässig, wenn genügend viele Spezialfälle bekannt sind und mit der Abstraktion auch wirklich gearbeitet wird. b) Hauptgesetze von Schwierigkeiten sind zu vermeiden. c) Der (männlich langweilige) Stoff ist zeitlich möglichst gleichmäßig zu verteilen. - Schließlich wies der Vortragende darauf hin, daß sehr wesentlich für die Realisierung des Projektes ein "Lehrbuch für den Lehrer" sein wird.

M. JEGGER (Lucern) gab einen Bericht über einen Versuch mit der Abbildungstheorie. Da in der analytischen Geometrie leicht der geometrische Gehalt der Probleme von den algebraischen Schwierigkeiten in den Hintergrund gedrängt wird, bevorzugt der Vortragende die synthetisch-konstruktive Methode. In Obersekundarunterricht liegt das Hauptinteresse nicht mehr bei der einzelnen Abbildung, es verlagert sich zunehmend auf das Zusammensetzen mehrerer Abbildungen und das Operieren in bestimmten Gruppen. Es wurde gezeigt, wie man mit Hilfe der perspektiven Kollineationen viele schöne geometrische Resultate erhalten kann.

A. KIRSCH (Gießen) sprach über die Veranschaulichung von Gruppenmorphismen. Homomorphe Abbildungen endlicher (eener) Bewegungsgruppen können anschaulich durch eine solche Mechanismen realisiert werden. Durch das Anbringen von "Verzierungen" kommt man in natürlicher Weise zu einer Motivierung der Begriffsbildung "Normalteiler". Das Verständnis des allgemeinen Homomorphismus der Gruppentheorie kann so vorbereitet werden. Besonders suggestive Veranschaulichungen von Homomorphismen $h: X_n \rightarrow X_n$ zyklischer Gruppen sind genau dann möglich, wenn k und $\frac{n}{k}$ teilerfremd sind. Ein ähnliches Kriterium gilt für Diedergruppen.

H. LIEBMAN (Berlin) behandelte sich mit dem Begriff der Äquivalenzrelation in der Schulmathematik. Im ersten Teil des Vortrages wurde darüber berichtet, wie (in der Oberstufe eines Mathematikunterrichts) der allgemeine Begriff der Relation und insbesondere der Äquivalenzrelation behandelt wurde. Im zweiten Teil wurden folgende Beispiele für das Auftreten von Äquivalenzrelationen in der Schulmathematik gegeben: Einordnung der Erdbebenjahre, Einordnung der negativen, der rationalen, der reellen Zahlen, Äquivalenzrelationen zwischen



schen ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen, Äquivalenzrelationen bei Abbildungen der Ebene auf sich, Äquivalenzrelationen bei Gruppen und bei Differentialgleichungen.

H. G. STEINER (Münster) hielt ein einleitendes Referat über Menge, Struktur, Abbildung als Leitlinie für den Mathematikunterricht.

Es wurde der Begriff der konkreten (algebraischen) Struktur auf einer Menge eingeführt und die wichtigsten Verfahren zur Konstruktion neuer Strukturen aus gegebenen Strukturen geschildert. Weiter wurde die Rolle der Abbildungen erläutert: Homomorphismen und Isomorphismen, Homomorphiesatz für algebraische Strukturen. Man sagt, daß isomorphe konkrete Strukturen dieselbe abstrakte Struktur haben.

Der Vortragende warnte davor, das Strukturdenken im Unterricht lediglich klassifikatorisch zu gebrauchen, vielmehr muß es Leitlinie sein. Als Ansatzpunkte wurden zur Diskussion gestellt: Relationsstrukturen (Äquivalenz, Ordnung), Verknüpfungsstrukturen (Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum, Verband), gemischte Strukturen (geordnete Gruppe und geordneter Körper) sowie affine Inzidenzstrukturen, metrische Räume, Maßstrukturen und topologische Strukturen.

H. G. STEINER (Münster) befaßte sich in einem zweiten Vortrag mit der Didaktik der elementaren Gruppentheorie. Er berichtete über Unterrichtserfahrungen in Untertertia und Unterprima. Anknüpfend an die Kongruenzabbildungen einerseits und die Zahlen andererseits wurde in der Mittelstufe der Gruppenbegriff induktiv erarbeitet.

In dem Lehrgang in der Unterprima wurde von den Permutationen ausgegangen. Als Anwendungen gruppentheoretischer Sätze wurden Resultate der elementaren Zahlentheorie bewiesen. Außerdem wurde die Bedeutung der Gruppentheorie für den Aufbau des Zahlensystems besprochen.

H. THIELE (Berlin) sprach über die Frage, inwieweit graphentheoretische Begriffe im Mathematikunterricht Eingang finden sollten. Ein moderner Unterricht sollte unter anderem auch aufzeigen, daß die Mathematik heute laufend in neue Anwendungsbereiche eindringt. Bei dieser Zielsetzung ist die Behandlung graphentheoretischer Begriffe und Probleme von großem Wert. In der Schule können Graphen zur Veranschaulichung von Abbildungen und Relationen sowie von Deduktionszusammenhängen und auch von Rechenverfahren schon sehr früh benutzt werden. In welcher Form und in welchem Umfang dies geschehen kann, muß noch durch Unterrichtsversuche geklärt werden.