Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

1

Bericht

Arbeitstagung - Professor Baer

3. bis 6. Januar 1964

Die Tagung befaßte sich naturgemäß mit den Themenkreisen, die im Baerschen Kreis untersucht werden: ringtheoretische, gruppentheoretische und benachbarte geometrische Fragen.

Anwesend waren:

L. FUCHS - Budapest
F. LOONSTRA - Den Haag
H. LÜNEBURG - Mainz

als Gäste; ferner aus Frankfurt:

D. ABBIW-JACKSON	P. PLAUMANN
R. BAER	J. RUST
H.H. BRUNGS	A. SCHLEIERMACHER
Y. CHEN	A. SCHLETTE
P. DEMBOWSKI	E. SCHMUCKER
B. FISCHER	S. STONEHEWER
P. GROSSE	K. STRAMBACH
H. HEINEKEN	J. WALBAUM
D. HELD	H. WALTER
Ch. HERING	I. WEIDIG
W. LIEBERT	J. WIEDERHOLT
H. MÄURER	R. WILLE
H. MERTES	D. WÖLK
M. NEWELL	

Nach den Vorträgen entspann sich häufig eine rege Diskussion, die im inoffiziellen Teil der Tagung fortgesetzt wurde. Besondere Anregungen verdanken wir unseren Gästen Professor Dr. L. FUCHS, Budapest und Professor Dr. F. LOONSTRA, Den Haag.

Es folgen die Auszüge der 12 gehaltenen Vorträge.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

L. FUCHS: Einbettung regulärer Ringe in reguläre Ringe mit 1.

Satz: Zu jedem regulären Ring R gibt es einen regulären Ring R^* mit 1, der R als Ideal enthält.

Es wird zuerst ein kommutativer regulärer Ring M mit 1 konstruiert derart, daß jeder reguläre Ring eine Algebra über M ist. Dann erweist sich der Ring R^* aller Paare (a,ϱ) mit $a \in R$, $\varrho \in M$ mit der üblichen Definition von Summe und Produkt als ein Ring mit den gewünschten Eigenschaften.

Der Satz erscheint in einer gemeinsamen Arbeit mit I. Halperin in Fund. Math.

B. FISCHER: Zweifach transitive Gruppen endlicher Ordnung.

Satz: Sei G eine endliche Gruppe, D eine Klasse konjugierter Elemente von G, die G erzeugt, und F eine Frobeniusgruppe, deren Kern eine 2-Gruppe ist. Gilt für je zwei verschiedene Elemente x und y von D

$$\{x,y\}/Z(\{x,y\}) \simeq F$$

so ist G auflösbar.

Korollar. Ist A eine endliche Gruppe, die zweifach transitiv auf einer Klasse D konjugierter Elemente operiert und ist xy^{-1} ein 2-Element für alle Elemente x, y aus D, so ist $\{D\}$ auflösbar.

P. GROSSE: Homomorphismen abelscher Gruppen;
maximale Gruppenklassen.

Def.: Sind A, W (abelsche) Gruppen, so sei $H_0(A,W)=A$ und $H_{i+1}(A,W) = \mathrm{Hom}[H_i(A,W),W]$ für $i \geq 0$. W heißt Wertegruppe von A, wenn (I) es gibt ganze Zahlen $r=r(A,W) \geq 0$, $s=s(A,W) \geq 1$, so daß

$$H_r(A,W) \cong H_{r+s}(A,W) \text{ gilt}$$

und (II) aus $a\mathrm{Hom}(A,W)=0$, $a \in A$ folgt $a=0$.

Def.: $\mathfrak{K}$ heißt Gruppenklasse mit (gemeinsamer) Wertegruppe, wenn es ein W gibt, so daß W Wertegruppe für jedes X aus $\mathfrak{K}$ ist. $\mathfrak{M}$ heißt maximale Gruppenklasse mit Wertegruppe, wenn aus $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{M}$ stets $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}$ für jede Gruppenklasse $\mathfrak{K}$ mit Wertegruppe folgt.

Satz 1: Die Klasse $\mathfrak{E}$ aller endlichen Gruppen ist eine maximale Klasse mit Wertegruppe; diese ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Satz 2: Ist $\mathfrak{M}$ eine maximale Klasse mit Wertegruppe, die nicht nur aus torsionsfreien Gruppen besteht, so folgt $\mathfrak{M} = \mathfrak{T}$.

D. HELD: Induzierte Automorphismengruppen in endlichen Gruppen.

$\mathfrak{T}_p$: Die Gruppe G induziert in ihren p-Untergruppen nur Primärgruppen von Automorphismen.

Es werden eine Reihe charakteristischer Eigenschaften von $\mathfrak{T}_p$-Gruppen hergeleitet. Ferner wird die Vererblichkeit von $\mathfrak{T}_p$ untersucht. Unter anderem beweisen wir folgendes Auflösbarkeitskriterium: Sei M eine maximale Untergruppe der Gruppe G. Ist M nilpotent, und induziert G in den 2-Untergruppen von M nur Primärgruppen von Automorphismen, so ist G auflösbar.

Ch. HERING: Dreifach transitive Gruppen mit auflösbarer Standgruppe.

Der folgende Satz wird bewiesen:

Sei G eine endliche, dreifach transitive Permutationsgruppe und sei die Standgruppe G_A auf einem Symbol A auflösbar. Dann ist G isomorph zu einer Untergruppe der $P\Gamma L(2,q)$ für ein geeignetes q.

W. LIEBERT: Auflösbarkeit endlicher Ringe.

Definition: Ein Ring R heißt "auflösbar", wenn jedes von o verschiedene epimorphe Bild von R ein von o verschiedenes kommutatives Ideal besitzt.

Sei E ein endlicher Ring mit 1, E^{-1} seine Einheitengruppe. Es werden einige Kriterien für die Auflösbarkeit von E gegeben. Dann wird Folgendes bewiesen:

(1) Ist E auflösbar, dann ist auch E^{-1} auflösbar.
(2) Sei 2E = E = 3E. Dann folgt aus der Auflösbarkeit von E^{-1} diejenige von E.

Beispiel: Sei A eine endliche abelsche p-Gruppe, n_i die Anzahl der Elemente der Ordnung p^i in einer Basis von A. Sei weiter EA der volle Endomorphismenring von A. EA ist dann und nur dann auflösbar, wenn sämtliche n_i gleich 1 oder o sind.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

F. LOONSTRA: Die Ordnungsbeziehungen in der Ext-Gruppe.

Die abelschen Erweiterungen $G(A)$ einer festen abelschen Gruppe A kann man auf eine natürliche Weise anordnen und diese Anordnung induziert ein teilweise geordnetes System $V(A)$ mit Verbandseigenschaften. Auf analoge Weise kann man die Erweiterungen $G(\alpha)$ durch eine feste Gruppe B anordnen; diese Anordnung induziert ein System $P(B)$. Man betrachtet nun die Gruppe $Ext(B,A)$ als eine Teilmenge von $V(A)$ und $P(B)$ und fragt in beiden Fällen nach den Ordnungsbeziehungen. Es stellt sich heraus, daß man sich beschränken kann auf die analogen Fragen für $Ext(B,A)$, wenn $A = C(p^n), B = C(p^m)$. Die Erweiterungen $G(A,B)$ sind in diesem Fall charakterisiert von den Invarianten (p^{m_1}, p^{m_2}) von G (mit $m_1+m_2=m+n$). Die A-Ordnung (resp. B-Ordnung) wird nun bestimmt durch die lexikographische Ordnung der Zahlenpaare (m_1,m_2) ; sie ist also linear.

H. LÜNEBURG: Über den wirklichen Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.

Ist S ein projektiver Raum vom Range $r(S) \geqslant 3$ und setzt man im Falle $r(S) = 3$ die Gültigkeit des desarguesschen Satzes voraus, so gibt es einen Vektorraum V, so daß der Verband L_S der Unterräume von S zu dem Verband L_V der linearen Unterräume von V isomorph ist.
Für diesen Satz, der bereits lange bekannt ist (s. z.B. BAER, Linear Algebra and Projective Geometry), wurde ein neuer Beweis gegeben. Wesentliche Hilfsmittel bei diesem Beweis sind die Struktursätze der linearen Algebra.

H. MERTES: Lagrange-Halbgruppen.

Der in endlichen Gruppen geltende Satz von Lagrange gibt Anlaß zu der
<u>Definition:</u> Eine endliche Halbgruppe H heißt <u>Lagrange-Halbgruppe</u>, wenn die Ordnung jeder Unterhalbgruppe von H die Ordnung von H teilt.
Durch die folgenden Sätze werden alle Lagrange-Halbgruppen angegeben.

<u>Satz 1:</u> Eine Lagrange-Halbgruppe mit Nullelement ist entweder zur Nullhalbgruppe mit zwei Elementen oder zur multiplikativen Halbgruppe von $GF(2)$ isomorph.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Satz 2: Sei H eine endliche Halbgruppe ohne Nullelement. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) H ist Lagrange-Halbgruppe und

(b) H ist isomorph zu einer Rees'schen Matrizen-Halbgruppe (G,r,s,P_{sr}) mit $1 \leqslant r,s \leqslant 2$. wobei G eine endliche Gruppe ist und P_{sr} als "Sandwich"-Matrix nur Elemente aus G enthält.

Literatur: A.H. Clifford and G.B. Preston, The algebraic theory of semigroups, Vol. 1, Providence 1961, chapter 3.

S.E. STONEHEWER: Abnormale Untergruppen einer Klasse von lokal auflösbaren Torsionsgruppen.

R.W. Carter hat gezeigt, daß jede endliche auflösbare Gruppe G nilpotente normalisatorgleiche Untergruppen besitzt und daß alle diese Untergruppen untereinander konjugiert sind in G. Wir kommen zu folgender Verallgemeinerung dieses Ergebnisses:

Sei G eine lokal auflösbare Torsionsgruppe, deren (lokal nilpotentes) Radikal endlichen Index hat. Dann besitzt G normalisatorgleiche maximale lokal nilpotente Untergruppen, und irgend zwei von ihnen sind in G konjugiert. Außerdem sind diese Untergruppen abnormal.
Hierbei ist L abnormal, wenn L nicht in zwei zueinander konjugierten Untergruppen liegt und jede L enthaltende Untergruppe normalisatorgleich ist.

Der oben angegebene Satz wird falsch, wenn eines der folgenden Worte gestrichen wird: Torsion, endlicher Index, maximal.

H. WALTER: Reellwertige Funktionenringe.

Sei C(X) der Ring aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem vollständig regulären reellkompakten topologischen T_1-Raum. Dann gilt:

(1) Es existiert ein Homöomorphismus, der die Punkte p und q aus X ineinander überführt, genau dann, wenn die an diese beiden Punkte gebundenen maximalen reellen Ideale algebraisomorph sind.

(2) X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom genau dann, wenn für jedes maximale reelle Ideal M das Ideal $S=\{f \in C(X), \forall g \text{ mit } g(p) \neq o, \text{ so daß } fg=o \text{ für alle } x\}$ abzählbar erzeugt ist.

Am Beispiel des Raumes W, der aus allen Ordinalzahlen besteht, die kleiner sind als die erste überabzählbare Ordinalzahl (Ordnungstopologie), wurde die Notwendigkeit der Reellkompaktheit von X gezeigt.

<u>D. WÖLK:</u> Allgemeine Eigenschaften topologischer Möbiusebenen.

Eine Möbiusebene heißt topologisch, wenn in der Menge der Punkte und der Menge der Kreise Topologien gegeben sind, bezüglich der die Verknüpfungsrelationen stetig sind.

<u>Satz 1:</u> Bei gegebener Punkttopologie ist die Topologie der Kreise eindeutig festgelegt durch die Quotiententopologie $\mathbb{P}^3 - \Delta/\equiv$ ($\mathbb{P}$ Punktraum, Δ 'Diagonale', $\equiv$ Äquivalenzrelation).

<u>Satz 2:</u> Zu einer affinen Ebene $\mathfrak{A}$ gibt es eine bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmte projektive Ebene $\mathfrak{P}$ derart, daß $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{P}_\omega$, wobei die Topologie von $\mathfrak{A}$ in genau einer Weise die Topologie von $\mathfrak{P}$ induziert.

<u>Satz 3:</u> Der Punktraum einer topologischen Möbiusebene ist regulär.

<u>Satz 4:</u> In einer topologischen Möbiusebene sind affine Geraden, affine Unterebenen, Kreise und die gesamte Ebene entweder alle zusammenhängend oder alle nirgends zusammenhängend.

H. Heineken (Frankfurt a.M.)