Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Gruppentheorie und Elementarteilchen

12. bis 18. Februar 1964

Tagungsleiter: Professor Dr. P. BECKMANN (Mainz)
Professor Dr. H.G. TILLMANN (Mainz)

Teilnehmer:

G. ADAM	Mainz	N. RECH	Mainz
M. ANDRIE	Bonn	H.J. RODRIAN	Mainz
Prof.Dr.P. BECKMANN	Mainz	G. ROEPSDORF	Hamburg
Dr.G. BERENDT	Berlin	Dr.J. ROTHLEITNER	Berlin
Dr.B. GRAMSCH	Mainz	S. SCHAIBLE	Mainz
Prof.Dr.G. GRAWERT	Berlin	J. SCHELTEN	Mainz
Dr.K. HEPP	Zürich	R. SCHRADER	Hamburg
T. MENG	Mainz	Prof.Dr.E. THOMA	Heidelberg
C. NOAK	Heidelberg	Prof.Dr.H.G. TILLMANN	Mainz
E. NUNNEMANN	Mainz	Dr.E. TRÜBENBACHER	Mainz
Prof.Dr.F. PENZLIN	Berlin	Dr.D.N. WILLIAMS	Zürich
K.H. PEUCKERT	Mainz	Dr.J. WLOKA	Heidelberg

Im Wintersemester 1963/64 fand an der Universität Mainz ein gemeinsam von Mathematikern (Prof.Tillmann) und Physikern (Prof. Beckmann) gestaltetes Seminar über topologische Gruppen statt. Diesem war das Buch von PONTRJAGIN zu Grunde gelegt.

Dieses Seminar wurde in der Zeit vom 12. bis 18. Februar 1964 am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach mit einer Reihe von Vorträgen abgeschlossen, in denen verschiedene Aspekte einer Anwendung gruppentheoretischer Überlegungen auf die Physik der Elementarteilchen dargelegt und diskutiert wurden.

G. Adam: Pontrjagin: Topologische Gruppen § 23.

In diesem ersten Vortrag wurden der lokale Isomorphismus und die lokalen Eigenschaften topologischer Gruppen behandelt. Zunächst wurde eine allgemeine Methode zur Konstruktion einer Gruppe, die einer gegebenen lokal isomorph ist, besprochen. Das Ergebnis gestattete, die Untersuchungen einer topologischen Gruppe in eine

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

lokale Untersuchung und eine Untersuchung im Großen aufzuteilen. Unter lokalen Eigenschaften versteht man solche, die gleichzeitig für alle einander lokal isomorphen Gruppen gelten. Da das lokale Verhalten, d.h. das Verhalten in einer beliebig kleinen Umgebung des Einselements, sich sehr stark auf das Verhalten im Großen auswirkt, wurde der Untersuchung der lokalen Eigenschaften große Sorgfalt gewidmet. Im Anschluß daran wurden dann noch die Begriffe "einparametrige Untergruppe" und "Existenzbereich einer Gruppe" eingeführt.

K.H. Peuckert: Pontrjagin: Topologische Gruppen § 24.

Der Begriff der Transformationsgruppe einer beliebigen Menge wurde auf den Fall spezialisiert, daß es sich bei der zu transformierenden Menge um einen topologischen Raum handelt. Zunächst wurde definiert, was man unter einer stetigen Transformationsgruppe versteht und anschließend die Eindeutigkeit der Topologie einer Gruppe homöomorpher Transformationen näher untersucht. Ein anderes wichtiges Problem der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen war die Frage, wie man aus der Kenntnis einer topologischen Gruppe die topologischen Räume ermitteln kann, in denen die gegebene Gruppe als transitive Gruppe topologischer Transformationen dienen kann.

H.G. Tillmann: Pontrjagin: Topologische Gruppen § 28 und § 29.

Die Existenz und Eindeutigkeit des invarianten Integrals auf kompakten Gruppen und die wichtigsten Eigenschaften des Integrals wurden zur Verwendung in der Darstellungstheorie zusammengestellt. Dazu mußte zunächst der Begriff der auf einer topologischen Gruppe gleichmäßig stetigen Funktionen eingeführt werden sowie die damit in Zusammenhang stehenden Begriffe: gleichgradige Stetigkeit, gleichmäßige bzw. gleichgradige Konvergenz, Maximum, Minimum und Schwankung.
Das invariante Integral wurde unmittelbar als Funktional auf den stetigen Funktionen auf einer kompakten Gruppe definiert; gleichzeitig wurde aber auch der andere Weg beschrieben, bei dem man zunächst ein invariantes Maß einführt, um die Bedingung der Invarianz zu erfüllen.

S. Schaible: Pontrjagin: Topologische Gruppen § 31 und § 32.

Als Vorbemerkung zur Theorie der linearen Darstellungen wurden anfangs einige elementare Sätze aus der Theorie der Matrizen wieder-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

holt, insbesondere wurde das Schur'sche Lemma bewiesen.
Da es wünschenswert ist, die allgemeinen topologischen Gruppen mit bestimmten Objekten, z.B. den Matrizengruppen, in Verbindung zu bringen, die leichter eine unmittelbare Untersuchung gestatten, wurden die linearen Darstellungen ausführlich behandelt. Dabei versteht man unter einer linearen Darstellung einer Gruppe G einen Homomorphismus von G in die topologische Gruppe der Matrizen einer gewissen Ordnung.
Insbesondere wurde dann näher auf unitäre, irreduzible, nicht äquivalente Darstellungen und deren Charaktere eingegangen.

E. Trübenbacher: Neumark: Normierte Algebren § 28 und § 29.

Als Ausgangspunkt dieses Vortrags diente die Definition der Gruppenalgebra für endliche Gruppen, die dann auf beliebige lokal kompakte Gruppen mit Hilfe des invarianten Maßes erweitert wurde. Im Anschluß daran wurden zwei Sätze formuliert, die die Zugehörigkeit des Einselements zur Gruppe zum Gegenstand haben. Der Zusammenhang zwischen der Gruppenalgebra und den Darstellungen einer Gruppe war der nächste Punkt dieses Vortrages. Es wurde ein Satz bewiesen, der jeder Darstellung einer Gruppenalgebra umkehrbar eindeutig eine stetige unitäre Darstellung der Gruppe zuordnet.
Skizziert wurde dann der Beweis für einen Satz, der aussagt, daß jede lokal kompakte Gruppe ein vollständiges System irreduzibler, unitärer Darstellungen besitzt. Schließlich wurden dann diese Sätze am Beispiel der unitären Darstellungen der Lorentzgruppe näher erläutert.

K. Hepp: Komplexe Lorentzgruppe in der Feldtheorie.

In diesem Vortrag wurde für den Rahmen einer relativistischen Quantenfeldtheorie das Axiomensystem von Wightman studiert. Hier fordert man für ein abzählbares System von Feldoperatoren $\psi_{\varkappa}^{(n)}(x)$ Distributionseigenschaften, Kovarianz unter der Überlagerungsgruppe i $\tilde{L}_{+}^{\nearrow}$ der inhomogenen Lorentzgruppe, Spektrumsbedingungen für den Energie- und Impulsoperator, Lokalität der $\psi_{\varkappa}^{(n)}(x)$ und die Zyklizität des Vakuums Ω. Die Theorie ist dann eindeutig durch eine Folge von temperierten Distributionen $\mathfrak{W}_{\varkappa}^{(n)}(\xi)$ charakterisiert, die aufgrund der positiv-Definitheit der Energie-Randwerte von unter $L_{+}^{\nearrow}$ kovarianten holomorphen Tensorfeldern $\mathfrak{W}_{\varkappa}^{(n)}(\zeta)$ in den "Vorwärtsröhren" $\mathfrak{T}_n$ sind. Die analytische Fortsetzung der $\mathfrak{W}_{\varkappa}^{(n)}(\zeta)$ zu holomorphen Tensorfeldern, die sich kovariant unter

der komplexen eigentlichen Lorentzgruppe $L_+(C)$ transformieren, erfolgt nach einem Theorem von Bargmann, Hall und Wightman. Invariant unter $L_+(C)$ ist auch die analytische Fortsetzung der 2-Teilchen-Streuamplitude T_{22}. Streuamplituden Tmn für m einlaufende und n auslaufende Teilchen lassensich als temperierte Distributionen auf der Massenschale streng unter gewissen Spektrums- und Vollständigkeitsbedingungen definieren.

D.N. Williams: Lorentzgruppe und S-Matrix-Theorie.

Hier wurde das gleiche Problem behandelt wie in dem Vortrag von Dr.Hepp. Dr.Williams faßte seinen Vortrag folgendermaßen zusammen: "Complex Lorentz covariance of real-covariant holomorphic tensors (Stapp's Theorem): Let $f^{\mu_1 \ldots \mu_\ell}(K)$ be a tensorvalued function of n fan-vectors, $K = (k_1, \ldots, k_n)$. Let f be a holomorphic (either on the mass shell or not) in a real environment R of a point $K^{(o)}$ and covariant under the unit component of the real, homogeneon Lorentz-group $L_+^{\uparrow}$. That is $f^{\mu_1 \ldots \mu_\ell}(\Lambda K) = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \ldots \Lambda^{\mu_\ell}{}_{\nu_\ell}(K)$ for all K, Λ such that $K, \Lambda K \in R$ and $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$. Let R be such that if K', $K \in R$ and $K' = \Lambda K$ with $\Lambda \in L_+(C)$, then there exists a $\Lambda' \in L_+^{\uparrow}$ such that $K' = \Lambda' K$.

F. Penzlin: Gruppentheorie und Elementarteilchen.

Prof. Penzlin führte zunächst die beiden Punkte an, die Physiker auf die Gruppen führen.

a) Homogenität und Isotropie der Raum-, Zeitwelt führen auf die inhomogene Lorentzgruppe.
b) Die Ähnlichkeit gewisser Elementarteile untereinander führt auf die Vermutung, daß diese Teilchen in gewissem Umfange durcheinander ersetzbar seien.

Das Problem ist: Welche Gruppen von Transformation kommen hierfür in Frage?

Sie müssen folgenden Bedingungen genügen:

a) Sie müssen die Isospingruppe SU_2 (sogar U_2) enthalten.
b) Sie müssen eine Darstellung der Dimension 8 besitzen, die bei Einschränkung auf die Untergruppe SU_2 in ein Singlett (Λ), zwei Dubletts (N, Ξ) und ein Triplett (Σ) zerfällt. Es soll sich umeine halbeinfache Liesche Gruppe handeln. Die kleinsten Gruppen diesert Art sind SU_3, $SU_2 \otimes SU_2$, G_2.

C. Noak: Anwendung der SU_3 in der Kernphysik.

Herr Noak untersuchte in seinem Vortrag die Rolle der SU_3 in der Kernphysik.

Im Schalenmodell benutzt man als nullte Näherung meist Oszillatorfunktionen. Der Hamiltonoperator von N unabhängigen isotropen Oszillatoren $H = \sum_{i=1}^{3N} p_i^2+q_i^2$ ist invariant gegenüber U_{3N}. Eigenfunktionen zu H bilden eine Basis für die irreduzible Darstellung $(E,0,0,\ldots,0)$ von U_{3N}. Die Basis kann festgelegt werden durch die Reduktionskette $U_{3N} \supset U_N \otimes U_3 \supset U_N \otimes O_3^+$. Für N=2 erhält man bereits beim 2. Schritt alle irreduziblen Darstellungen von SU_3. Die Einschränkung von SU_3 auf O_3^+ liefert keinen vollständigen Satz von Quantenzahlen. Zur Definition der fehlenden Quantenzahlen sucht man einen weiteren skalaren Operator zu diagonalisieren. Es gibt in SU_3 fünf unabhängige skalare Operatoren: den Casimiroperator G_2 und seine Verallgemeinerung G_3, L_2 und zwei weitere R, S. Racah konnte zeigen, daß es keine Kombination von R und S gibt, die ein orthogonales Schema mit rationalen Eigenwerten liefert. Die in der Physik gebräuchlichen Konstruktionen (Elliott-Modell der Rotationsbanden) sind alle nicht orthogonal.

G. Berendt: Experimentelle Prüfung der SU_3-Symmetrie.

Die Voraussetzung der Vertauschbarkeit des Streuoperators mit den Operatoren der SU_3 führt auf Ungleichungen bzw. Gleichungen zwischen experimentell beobachteten Größen. Unter der Annahme, der Einfluß des symmetriebrechenden Terms in der Wechselwirkung könne dadurch berücksichtigt werden, daß man die Wirkungsquerschnitte nicht bei gleichen Energien, sondern bei gleichen kinetischen Energien der Reaktionspartner im C.M.S. vergleicht, stellt sich bei Prozessen der Form $K^+ + p \rightarrow$ Baryonresonanz + Meson eine halbwegs befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie heraus.

R. Schrader: Charaktere der inhomogenen Lorentzgruppe.

Die irreduziblen Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe sind alle induzierte Darstellungen im Sinne von Mackey: Sei G eine separable, lokal kompakte Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe von G und L eine Darstellung von H. Sei μ das Quasimaß auf $G/_H$ und sei K die Menge aller Abbildungen f von G in den Raum H(L) von H, so daß

(1.) $(f(x),\phi)$ ist eine Borelfunktion in x für jedes $\phi \in H(L)$

(2.) $f(\xi x) = L_\xi f(x)$ für alle ξ in H, x in G.

(3.) $\int_{G/H} \|f(x)\|^2 d\mu(s) < \infty$.

K wird dadurch zu einem separablen Hilbertraum. Die induzierte Darstellung wird jetzt definiert als

$(U_x f)(y) = f(yx) \sqrt{\rho_x(y)}$ mit

$\rho_x(y) = \frac{d\mu x(y)}{d\mu(y)}$ als der Radon-Nikodym-Ableitung.

Im Falle der inhomogenen Lorentzgruppe erhält man alle irreduziblen Darstellungen, indem man von folgenden Gruppen ausgeht: Die Drehgruppe S^+, die 3-dimensionale homogene Lorentzgruppe S^-, die 2-dimensionale euklidische Gruppe S^0 und die homogene Lorentzgruppe $Lg_+^{\uparrow}$. Anschließend wurden die Charaktere $X_j(\beta)$ (j-halbzahlig, ß=Drehwinkel) der Drehgruppe behandelt.

N. Rech (Mainz)