Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Welchen Einblick in Denkweise und Ergebnisse der Mathematik kann und soll das Gymnasium heute seinen Schülern vermitteln?

Ein Gespräch zwischen Schule und Hochschule.
Vom 21. bis 23. Februar 1964.

Zu einem Gedankenaustausch über die Frage, was für den Mathematikunterricht an höheren Schulen heute wünschenswert und möglich erscheint, kamen Gymnasial- und Universitätslehrer aus verschiedenen Ländern der Bundesrepublik auf einer Wochenendtagung im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach zusammen. Die Leitung der Tagung hatten die Herren Professoren Dr. M. Barner und Dr. K. Fladt, beide aus Freiburg. Im einzelnen waren folgende Herren anwesend:

BARNER, Prof.Dr.M. - Freiburg	KUNLE, Prof.Dr.H. - Karlsruhe
BUNDSCHUH, P. Oberwolfach	PICKERT, Prof.Dr.G. - Gießen
FLADT, Prof.Dr.K. - Freiburg/Calw	RAITH, Gymn.Prof.F. - Freiburg
FLOHR, Dr.F. - Freiburg	RÜCKERT, O.Reg.Rat Dr. - Karlsr.
FREUND, Dr.H. - Göttingen	SCHWEIZER, O.St.Dir.W. - Tübingen
GRIESEL, St.Rat Dr.H. - Letmathe	SEEBACH, Prof.Dr.K. - München
KIRSCH, St.Rat Dr.A. - Gießen	SIEBER, Gymn.Prof.H.-Stuttgart
KRAFT, O.St.Dir.A. - Bad Hersfeld	STEINER, St.Rat.H.G. - Münster
KREUKLER, Gymn.Prof.L. - Karlsruhe	

Den Teilnehmern lagen die verschiedenen Lehrpläne der Bundesländer vor. -

In vier mehrstündigen Sitzungen wurde eingehend darüber diskutiert, wie sich die Teilnehmer den Mathematikunterricht auf den Gymnasien vorstellen, welchen Beitrag er heute zu der allgemeinen Bildung der Schüler zu leisten habe und welcher Wissensstoff auf den verschiedenen Stufen des Gymnasiums mitgeteilt werden solle. Dabei konnte natürlich nicht eine ins Einzelne gehende einheitliche Stoffzusammenstellung angestrebt werden - man denke etwa an die Vielzahl der verschiedenen Schultypen mit ihren stark voneinander abweichenden Stundenzahlen. Ausgeklammert wurde auch die Frage des Zentralabiturs, das sich ja sehr hemmend auf die Gestaltung des Unterrichts in der Oberprima auswirkt.

Aber ganz klar hat sich auf der Tagung gezeigt, daß es - trotz aller genannten Verschiedenheiten - einen einheitlichen "roten Faden" oder zumindest einige "rote Fäden" mit Querverbindungen gibt, die sich durch den gesamten heutigen Mathematikunterricht an Gymnasien von Sexta bis Oberprima hindurchziehen müssen und um die sich der übermittelte Wissensstoff gruppieren soll. Daß dieser "rote Faden" in den Sitzungen und im inoffiziellen Teil der Zusammenkunft so klar herausgearbeitet werden konnte, ist das erfreuliche Ergebnis dieser Zusammenkunft. Es soll im folgenden kurz skizziert werden:

Die Teilnehmer des Gesprächs waren sich darüber klar, daß eine Festlegung der großen Linie für den modernen gymnasialen Mathematikunterricht zweckmäßigerweise von dessen Endziel her geschehen sollte. Daneben müsse auch darauf geachtet werden, daß die Schulabgänger nach Untersekunda ein für diese Stufe abgerundetes Wissen von den Grundzügen der Mathematik mitnehmen, das sie befähigt, in die ihnen offenstehenden Berufe oder in weitere Ausbildung einzutreten und daß sie das dort benötigte mathematische Rüstzeug besitzen.

Welchen Einblick in Denkweise und Ergebnisse der Mathematik soll ein Abiturient haben? Dabei muß man immer im Auge behalten, daß ja längst nicht jeder Abiturient Mathematik studiert. Aber auch unter dieser Einschränkung scheint es wünschenswert, daß das begriffliche Denken im Mathematikunterricht viel stärker in den Vordergrund gerückt wird, als das noch vielfach der Fall ist. Das abstrakte Denken ist das Charakteristikum der mathematischen Wissenschaft und hat als solches zur allgemeinen Bildung der Schüler seinen ganz spezifischen Beitrag zu leisten. Gewiß müssen die Schüler auch das konkrete Rechnen lernen, schon weil diejenigen es brauchen, die später in die Praxis hinausgehen. Aber lernen sie das denn nicht genau so schnell und besser, wenn sie mit den zugrunde liegenden Begriffen und Gesetzen vertraut gemacht worden sind, als wenn sie eine Vielzahl von Rechenrezepten, womöglich noch mit einer Unmenge von Beispielen, kennengelernt haben? Was geeignet erscheint, den Schüler diese Denkweise zu lehren, wurde auf der Tagung in großen Zügen herausgearbeitet.

<u>Erweiterung des begrifflichen Gerüsts für den Unterricht</u>.
Welche <u>allgemeinen mathematischen Begriffe</u> einzuführen seien, wurde zuerst besprochen. Dabei wurde ausdrücklich betont, daß es nur dann zweckmäßig und nützlich sei, einen neuen Begriff einzuführen, wenn die Schüler vorher schon genügend Einzelbeispiele parat haben, die sich unter den neuen Begriff einordnen. Diesem "Auswahlkriterium" halten stand die Begriffe <u>Menge</u>, <u>Abbildung</u> (= Funktion), <u>Verknüpfung</u>, <u>Gruppe</u>, <u>Körper</u>, <u>Anordnung</u>, <u>Vektorraum</u>, <u>Äquivalenzrelation</u>. Wenn es wünschenswert scheint, Begriffe wie Menge, Gruppe, Körper in die Schulmathematik einzuführen, dann heißt das natürlich nicht, daß eine regelrechte Mengenlehre, Gruppen- oder Körpertheorie im Sinne der Universitätsmathematik gemacht werden soll. Allgemeine Sätze über Gruppen zum Beispiel sollten im wesentlichen nur in dem Umfange hergeleitet werden, daß die Schüler Aussagen über Bereiche machen können, die bezüglich der gerade betrachteten Verknüpfung eine Gruppe bilden, ohne daß sie diese Aussagen für den speziellen Bereich noch extra zu beweisen brauchen. In diesem Sinne wurde gesagt, die Begriffe seien zu thematisieren und es seien nicht nur ihre Namen zu nennen. Daß nicht alle genannten Begriffe in gleicher Weise thematisiert werden sollen,darüber waren sich wohl alle Teilnehmer einig.

Besonders geeignet erscheint der Gruppenbegriff. Man wird mit endlichen Gruppen beginnen; diese haben den Vorteil, daß alles explizit aufgeschrieben werden kann, etwa mit Hilfe der Gruppentafel. Auch nichtkommutative endliche Gruppen könnten behandelt werden. Es wurde von einem Versuch berichtet, der in Obertertia innerhalb sechs Wochen bis zur Diedergruppe führte.

Inwieweit kann den Schülern die axiomatische Methode nahegebracht werden? Es ist jedenfalls pädagogisch unmöglich, vornehin die Axiome eines Systems zu stellen und daraus eine Anzahl von Sätzen deduzieren zu wollen. Man sollte sich vielmehr zu einem späteren Zeitpunkt die Frage stellen, was für "Regeln" früher benutzt worden sind und sollte dann daraus die Schüler ein möglichst kleines System von "Regeln" (den Axiomen) gewinnen lassen derart, daß hieraus wiederum das ganze schon vorher vorhandene Lehrgebäude folgt und zwar nur durch Anwendung logischer Schlüsse. Auf diese Weise sollten die Schüler Einblick in die <u>logische Methode</u> bekommen,und zwar sollte dies schon auf sehr früher Stufe geübt werden.

Gefördert durch
Deutsche Forschungsgemeinschaft

Im Zusammenhang damit sollte man auch hie und da einfache Logische Begriffe und Regeln in den Unterricht einstreuen. Etwa, was die Verneinung einer "und"-Aussage ist oder ähnliches. Auf den (semantischen) Folgerungsbegriff in der Schule näher einzugehen, erscheint dagegen unzweckmäßig.

Welche Gebiete soll der Mathematikunterricht umfassen?

Zwei Dingen muß sich die Mathematik in der Schule fast ausschließlich widmen: Der Analyse des Zahlbegriffs und des Raumbegriffs. Vom Zahlbegriff führt der Weg hin zur Algebra und zur Differential- und Integralrechnung sowie zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik und vom Raumbegriff zur Geometrie. Was nun im einzelnen auf den verschiedenen Stufen gebracht werden sollte, wenn man genetisch aufbaut, soll jetzt dargestellt werden.

Um den Zahlbegriff zu erfassen, um den Schülern zu zeigen, was eigentlich eine Zahl ist, arbeitet man in der Schulmathematik auf eine Charakterisierung der wichtigsten Bereiche hin: Der Körper Q der rationalen Zahlen (der kleinste angeordnete), der Körper der reellen Zahlen (angeordnet und vollständig) und der Körper der komplexen Zahlen als der kleinste Oberkörper von R , in dem $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung hat. Wie man auf diese Charakterisierung hinarbeiten kann, wurde im einzelnen entwickelt von einem Tagungsteilnehmer, der das sogleich zu skizzierende Programm selbst mit gutem Erfolg im Unterricht erprobt hat.

In Sexta (= 5. Schuljahr) werden die natürlichen Zahlen eingeführt, und zwar als Kardinalzahlen endlicher Mengen. Das sagt man natürlich nicht explizit! Es werden ferner zwei Verknüpfungen + und $\cdot$ in N definiert, die Addition und die Multiplikation; und es werden auch die Regeln (Vertauschbarkeit usw.) für diese Verknüpfungen in N angegeben. Die Anordnung der natürlichen Zahlen der Größe nach, die "Kleiner"-Beziehung $<$ wird besprochen. In Quinta (= 6.Sj.) treten Paare (a,b) von Elementen aus N auf,und man möchte die Gleichungen $a \cdot x = b$ bzw. $a + x = b$ uneingeschränkt lösen können, d.h. auch in den Fällen: a nicht Teiler von b bzw. $b < a$ oder $b = a$. Die positiven Brüche bzw. die negativen ganzen Zahlen und die Null werden so zugänglich,und von da gewinnt man die negativen Brüche und damit die Gesamtheit Q der rationalen Zahlen. In Quarta und Untertertia (= 7. und 8. Sj.) wird von der Geometrie her der Gruppenbegriff explizit entwickelt,und erneut stößt man auf ihn

Gefördert durch
Deutsche Forschungsgemeinschaft

bei der Analyse des Zahlbereichs. Man denke etwa an die Gruppe der Restklassen zu einem bestimmten Modul, der eine natürliche Zahl ist. Der Begriff der Untergruppe ist auch da. In Obertertia (= 9. Sj.) werden dann Gruppentafeln eingeführt; es werden also endliche Gruppen studiert und Modelle dafür gesucht. Gleich aufgebaute Gruppentafeln legen die Erklärung dessen nahe, was man Isomorphie nennt (isomorphe Gruppen). Spätestens kann dies in Untersekunda (1o. Sj.) geschehen, wenn die Logarithmen behandelt werden.

Die Isomorphie der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen mit der additiven Gruppe aller reellen Zahlen, ist unmittelbar am Rechenstab erkennbar. Außerdem werden auf dieser Stufe zyklische Gruppen und Permutationsgruppen betrachtet, die dann in kombinatorischen Fragen und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebraucht werden. Der Körperbegriff steht noch etwas zurück, aber lediglich seine explizite Nennung. In Wirklichkeit werden anläßlich der Gleichungslehre schon alle Regeln angeschrieben. (Einige Herren waren der Meinung, man sollte dann auch den Namen nennen.) Tatsächlich gibt es bis dahin schon viele Beispiele für Gruppen, nicht aber für Körper. Intervallschachtelungen z.B, für $\sqrt{2}$ und Flächeninhalte (Zahl π) vervollständigen den Stoff dieser Stufe.

Die Oberstufe beginnt dann mit der Rekapitulation der Körpergesetze und der Körperbegriff wird ausgesprochen. Die Stetigkeit der reellen Zahlen wird nachgeholt, sobald die Inkommensurabilität auftritt: Quadrat und seine Diagonale. In der Unterprima (= 12.Sj.) werden die reellen Zahlen axiomatisiert. Das Vollständigkeitsaxiom wird ausdrücklich aufgenommen. Der Satz von der oberen Grenze oder von der Intervallschachtelung wird hier zur Kennzeichnung der reellen Zahlen verwendet. In der höchsten Klasse wird der Körper C der komplexen Zahlen noch nachgeholt und dabei auf eine Art negativer Aussage hingewiesen: C kann nicht angeordnet werden.

In der Diskussion dieses Programms traten Bedenken auf. Z.B. ob jeder Beifachmathematiker im Studienseminar solch eine Charakterisierung exakt durchführen könnte? Ob der Stoff nicht zu umfangreich sei? Sicher läßt sich das Programm für die Unterstufe durchführen, aber die Schwierigkeiten beginnen in Untertertia oder Obertertia. In der Mittelstufe müsse man sich einschränken auf das, was nötig und möglich ist. Ob die Rechentechnik bei der Durchführung eines solchen Programms nicht viel zu kurz kommt? Etwas wohl; aber der

"Rechendrill" soll nicht in so hohem Maße durchgeführt werden. Übrigens würde erfahrungsgemäß die Einsicht in die Strukturen die Rechentechnik günstig beeinflussen.

Wenn auf der Oberstufe der reelle Zahlkörper R genügend untersucht ist und der Begriff "konvergent in R " klargelegt ist, kann man den Aufbau der Differential- und Integralrechnung beginnen. Zunächst wird erklärt, was eine reelle Funktion ist. Es werden spezielle Eigenschaften von Funktionen besprochen: Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw.; es wird das bestimmte Integral einer in einem endlichen Intervall stetigen Funktion erklärt. Ausgerüstet mit diesen Hilfsmitteln werden dann die einfachsten Funktionen untersucht: ganz rationale Funktionen (= Polynome), rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen und deren Umkehrungen, Exponentialfunktionen und deren Umkehrungen und Zusammensetzungen dieser "elementaren" Funktionen. Ferner werden Anwendungen der Differential- und Integralrechnung studiert.

Parallel zur Differential- und Integralrechnung sollte vielleicht etwas Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie betrieben werden. Eine ganze Menge kann man zur Vorbereitung schon am Ende der Mittelstufe machen, etwa den intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff präzisieren. Der Hauptteil gehört allerdings in die Oberstufe. In Schulklassen und Arbeitsgemeinschaften der Unterprima wurde das Kolmogoroff'sche Axiomensystem besprochen und die Schüler brachten diesen Ausführungen reges Interesse entgegen. Es wurde vorgeschlagen, über die Statistik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zu kommen (Definitionen des Mittelwerts und der Streuung). Bei alledem könnten ausländische Unterrichtserfahrungen sehr nützlich sein, wie sie vor allem in Holland und der Schweiz bereits gemacht wurden. Übrigens hat auch die OECD in Athen empfohlen, diese Dinge in den Unterrichtsstoff aufzunehmen, und es gibt dazu schon sehr schöne Hefte für Lehrer und Schüler.

Am zweiten Tag wurde über den Geometrieunterricht gesprochen. Ziemlich einhellig war die Meinung, daß der Vektorbegriff(unabhängig von einem Koordinatensystem!) zu einer Ausbildung des Raumbegriffs hinführen sollte. Dabei bestehen von Anfang an viele Querverbindungen zur Algebra. In Sexta wird bereits die Vektoraddition auf dem Zahlenstrahl geübt: Vektorraum der Dimension 1 (= V_1) über dem reellen Zahlkörper R . In Sexta oder Quinta können dann Gitter

eingeführt werden, und zwar affine Punktgitter mit nicht notwendig orthogonalen Basisvektoren, in Untertertia dann die Multiplikation von Vektoren mit rationalen Zahlen. Bis zur Obersekunda können die Rechengesetze des Vektorraums über dem reellen Zahlkörper bewußt gemacht werden, wobei man sich nicht auf die Ebene beschränken sollte. Jedenfalls müßten die Gesetze des Vektorraums einmal zusammengestellt werden, und zwar zwischen Obertertia und Obersekunda. Hieran sollten sich einfache Aufgaben der ebenen und räumlichen (affinen) Geometrie anschließen, wobei das Folgern aus den zusammengestellten Regeln geübt werden müßte. - Ein anderer Vorschlag ging dahin, ab Quarta die Geometrie vom Spiegelungsbegriff her aufzubauen und parallel hierzu die Einführung des V_2 laufen zu lassen.

Bis dahin ist lediglich die Addition von Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einem skalaren Faktor erklärt. Es können also mit diesen Hilfsmitteln nur Aufgaben der affinen Geometrie bearbeitet werden.

Für die Behandlung der euklidischen Geometrie wird das Skalarprodukt eingeführt. Zuvor sollte - auch im Interesse der mit der mittleren Reife abgehenden Schüler - die Trigonometrie in nicht zu großer Ausführlichkeit besprochen werden.

Mit Hilfe des Skalarprodukts können Aufgaben über Senkrechtstehen, über Längen von Strecken, über Winkel zwischen Geraden, kurz: metrische Aufgaben gelöst und ferner Kreis und Kugel behandelt werden. Man wird sich fragen, wieviel an Koordinatenschreibweise hereingenommen werden soll. Dabei muß zu allererst im Auge behalten werden, daß das Koordinatensystem sinnvoll, d.h. der Natur der Sache angepaßt ist. Auch beim Skalarprodukt sollten charakterisierende Eigenschaften zusammengestellt und daraus Folgerungen gezogen werden.

Neben die gründliche Behandlung der Geometrie mit Hilfe der Vektorrechnung sollte in der Oberstufe auch eine Präzisierung der synthetischen Methode treten. Dabei ergeben sich wieder Querverbindungen zum Aufbau des Systems der reellen Zahlen.

Wieweit sich ein "Axiomensystem für den Lehrer" etappenweise auch für die Schüler verwenden läßt, müßte noch an Hand der in dieser

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Richtung zielenden Versuche von Bachmann, Sperner und Papy geprüft werden.

Zum Abschluß des Gesprächs erklärten sich mehrere Herren bereit, einzelne der besprochenen Teilgebiete genauer durchzudenken, und zwar: "Über Gruppen und Körper in der Schule", "Deduktive Begründung der Geometrie auf der Oberstufe", "Entwicklung des Vektorbegriffs in der Schule", "Analytische Geometrie unter Anwendung der Vektorrechnung", "Vorstufe der Analysis, elementare Funktionen", "Grenzwertbegriff, Differential- und Integralrechnung", Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik". Diese Ergebnisse sollen dann auf einer Tagung Ende Oktober 1964 in Oberwolfach beraten werden.

P. BUNDSCHUH (Oberwolfach)