Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Bericht (4)

über eine

Arbeitstagung unter Leitung von Prof. Dr. P.L. Butzer (Aachen)

1. bis 8. März 1964

In der ersten Märzwoche 1964 fand in Oberwolfach eine Arbeitstagung statt, an der aus Aachen Mitarbeiter und Schüler von Herrn Prof. Dr. P.L. Butzer und aus Würzburg die Herren Dr. W. Eichhorn, Dr. L. Neckermann und Dr. P.O. Runck teilnahmen. Neben zwei Vorträgen aus dem derzeitigen Seminarthema über die Funktionalanalysis wurden in zehn weiteren Vorträgen Probleme behandelt, die im Rahmen laufender Arbeiten besonders interessieren.

Folgende Damen und Herren nahmen teil:

H. BERENS, E. BODDENBERG, A. DRESCHERS, D. ERNST, A. FETZER, J. FÖHSE, E. GÖRLICH, H. JOHNEN, W. KOENEN, A. LAHANN, A. MONHEIM, R.J. NESSEL, H.G. NEUHEUSER, S. PAWELKE, K. SCHERER, H.P. SCHMITZ, H. SCHULTE, E. STARK, W. TREBELS (alle aus Aachen),

W. EICHHORN, L. NECKERMANN, P.O. RUNCK (alle aus Würzburg).

Kurzfassungen der Vorträge, die von den einzelnen Herren selbst verfaßt wurden:

BERENS, H.: Über das singuläre Integral von Abel-Poisson

Sei f eine stetige, 2π-periodische Funktion. Mit

$$V(f;r;x;) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, P(r;\, x-u)\, du$$

$$P(r;u) = \frac{1}{2}\ \frac{1-r^2}{1-2r\cos u + r^2} \qquad (0 \leq r < 1)$$

bezeichnen wir das singuläre Integral von Abel-Poisson.
Bekannt ist das Saturationsproblem, d.h., ist $\|V(f;r;x) - f(x)\| = o(1-r)\ (r \uparrow 1) \Rightarrow f = \text{konst.}$, und $\|V(f;r;x) - f(x)\| = O(1-r)\ (r \uparrow 1) \Leftrightarrow \tilde{f}(x) \in \text{Lip } 1$. ($\tilde{f}$ ist die konjugierte Funktion von f).
In diesem Vortrag wird untersucht, was über f ausgesagt werden kann, wenn die Approximationsordnung von f durch V(f;r;x) nicht so gut ist wie die oben definierte Saturationsordnung. Es gilt der Satz:

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Sei $f \in C_{2\pi}$ und $\|V(f;r;x) - f(x)\| = \mathcal{O}(1-r)^{\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1;\quad r \uparrow 1)$, dann folgt

(i) $\omega^*(f;\delta) = \sup\limits_{0 \leq h < \delta} \| f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\| = \mathcal{O}(\delta^{\alpha})$;

(ii) $\|V'(f;r;x)\| = \begin{cases} \mathcal{O}(1-r)^{\alpha-1} & (0 < \alpha < 1) \\ \mathcal{O}(\log \frac{1}{1-r}) & (\alpha = 1) \end{cases}$;

(iii) $\|V''(f;r;x)\| = \mathcal{O}(1-r)^{\alpha-2}$.

Zusammenfassend läßt sich sagen: Sei $f \in C_{2\pi}$. Folgende Aussagen sind äquivalent für $0 < \alpha < 1$:
(i) $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$; (ii) $f \in \mathrm{Lip}^*\alpha$; (iii) $\|V'(f;r;x)\| = \mathcal{O}(1-r)^{\alpha-1}$ $(r \uparrow 1)$;
(iv) $\|V''(f;r;x)\| = \mathcal{O}(1-r)^{\alpha-2}$ $(r \uparrow 1)$; (v) $\|V(f;r;x) - f(x)\| =$
$= \mathcal{O}(1-r)^{\alpha}$ $(r \uparrow 1)$.
Die ersten vier Äquivalenzen waren bekannt; die letzte scheint neu zu sein. Die Aussagen sind auch gültig für Funktionen $f \in L^p_{2\pi}$ $(1 \leq p < \infty)$.

EICHHÖRN, W.: Verallgemeinerte Cauchy-Riemannsche und Laplacesche Differentialgleichungen

Wir bezeichnen das System partieller Differentialgleichungen

(1) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} \alpha_{ijk} = 0 \qquad \begin{cases} k = 1,2,\dots,n \\ n,m \text{ beliebige natürl. Zahlen} \end{cases}$$

mit beliebigen konstanten Koeffizienten $\alpha_{ijk} \in K$ (K der reelle oder komplexe Zahlkörper) als "verallgemeinertes Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungssystem", wenn es regulär ist, d.h., wenn die Determinante der Matrix

(2) $$D =: \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \alpha_{ijk} \right) \qquad \text{(i Spalten-, k Zeilenindex)}$$

von Null verschieden ist. Spezielle Systeme der Art (1) findet man in Arbeiten, die sich mit Funktionentheorie in Algebren über dem reellen (oder komplexen) Zahlkörper beschäftigen.
Problem: Wie sieht die Menge der "zu (1) gehörigen verallgemeinerten Laplaceschen Differentialgleichungen" aus, d.h., die Menge aller Differentialgleichungen

$$A\,\varphi = 0 \qquad \left(A \in K\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_m}\right] \right),$$

denen jede genügend oft partiell differenzierbare Komponente eines jeden Lösungsvektors von (1) genügt?

Satz: Die zu (1) gehörigen verallgemeinerten Laplace-Operatoren bilden ein Hauptideal in $K\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1},\dots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right]$, dessen erzeugendes Element derjenige Teiler Θ der Determinante $|D|$ von (2) ist, den man erhält, wenn man $|D|$ durch den größten gemeinsamen Teiler aller Unterdeterminanten (n-1)-ter Ordnung von $|D|$ dividiert.
Zum Beweis wurden algebraische Hilfsmittel herangezogen.
Bemerkung: In Band II von Courant, R. und D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics, New York-London 1962, S. 179 ist offensichtlich von $\Theta\varphi = 0$ die Rede, wenn (nicht ganz eindeutig) von "one single equation ... obtained by elimination from a given system of differential equations" gesprochen wird.

ERNST, D.: Laguerresche Polynome

Die Laguerreschen Polynome

$$L_n^{(\alpha)}(x) = e^x x^{-\alpha} \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] \qquad (\alpha > -1)$$

genügen auf dem Intervall (o,∞) der Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x)\, L_m^{(\alpha)}(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

Folglich existiert zu einer Funktion f(x) eine Fourier - Laguerre Reihe der Form

$$(*) \begin{cases} f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=o}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} T_n^{(\alpha)}[f]\, L_n^{(\alpha)}(x) \\ T_n^{(\alpha)}[f] = \displaystyle\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) f(x)\, dx \end{cases}$$

Für die $T_n^{(\alpha)}[f]$ gelten auf Grund von bekannten Relationen zwischen den Laguerreschen Polynomen Beziehungen, die im einfachsten Falle folgendermaßen lauten:

$$T_n^{(\alpha)}[f] = (n+\alpha)\, T_n^{(\alpha-1)}[f] - (n+1)\, T_{n+1}^{(\alpha-1)}[f] \qquad (\alpha > 0)$$

$$T_n^{(\alpha)}[xf] = T_n^{(\alpha+1)}[f] - T_{n-1}^{(\alpha+1)}[f] \qquad (\alpha > -1)$$

$$T_n^{(\alpha)}\left[\frac{d^l f}{dx^l}\right] = (-1)^l \frac{\Gamma(n+l+1)}{\Gamma(n+1)} T_{n+l}^{(\alpha-l)}[f] \qquad (\alpha > l-1)$$

Bezeichnen wir mit $\sigma_N^{(r)}[x,f]$ die (C,r)-Mittel der Reihe (*), dann gilt ferner für $r > \alpha + \frac{1}{2}$ und $p > 1$ mit der Gewichtsfunktion $\mu = x^\alpha e^{-x}$.

Satz 1: $\qquad \|\sigma_N^{(r)}[x,f]\|_p = O(1) \Leftrightarrow f(x) \in L_\mu^p(o,\infty)$

Die Bestimmung der Saturationsklasse $\mathfrak{S}$ der Reihe (*) führt für beispiels-

weise die (C,q)-Summation auf die Bedingung $(**)$

$$\Big\| \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \left(1-\frac{n}{N+1}\right) \cdots \left(1-\frac{n}{N+r}\right) nT_n^{(\alpha)}[f]\, L_n^{(\alpha)}(x) \Big\|_p = O(1)$$

Mit $(**)$ und Satz 1 folgt für $p > 1$ und $\mu = x^{\alpha} e^{-x}$

<u>Satz 2:</u> $\mathcal{X} = \{ f\colon -x f'' + (x-\alpha-1) f' \in L_{\mu}^{p}(0,\infty) \}$.

FÖHSE, J.: <u>Über die Cesaro-Summierbarkeit von Laplace-Reihen von Kugelfunktionen</u>

Sei η ein Punkt auf der p-dimensionalen Einheitskugel Ω_p im p-dimensionalen Euklidischen Raum ($p \geq 3$) dw_p das Flächenelement von Ω_p, $P_n^{\lambda}[(\zeta_o \eta)]$ das Gegenbauersche Polynom, wobei $(\zeta_o \eta)$ der Winkel zwischen zwei Punkten ζ_o und η auf der Kugel Ω_p sei, $\lambda = \frac{p-2}{2}$.

Dann ist bekannt, daß die Laplace-Reihe

$$(*) \quad \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \int_{\Omega_p} f(\eta)\, P_n^{\lambda}[(\zeta_o \eta)]\, dw_p(\eta)$$

einer stetigen Funktion $f(\eta)$ (C,α)-summierbar ist $(\alpha > \lambda)$ zu $f(\zeta_o)$.
Ferner ist bekannt, daß die Laplace-Reihe $(*)$ einer absolut integrierbaren Funktion $f(\eta)$ (C,α)-summierbar ist $(\alpha > \lambda)$ zu $f(\zeta_o)$ in jedem Stetigkeitspunkt ζ_o von $f(\eta)$, vorausgesetzt, daß im Gegenpol ζ_o' genau gegenüber von ζ_o gilt:

$$(**) \quad \int_{D(\zeta_o', \varepsilon)} |f(\eta)|\, [1-(\zeta_o \eta)]^{-\lambda}\, dw_p(\eta) < +\infty \; .$$

Dabei ist $D(\zeta_o', \varepsilon)$ die Kugelkappe um ζ_o' mit dem Kugelradius $\varepsilon > 0$.
Man kann folgenden Satz beweisen:

<u>Satz:</u> Sei $f(\eta)$ eine absolut integrierbare Funktion und $\zeta_o \in \Omega_p$ ein Lebesgue-Punkt von $f(\eta)$, d.h.

$$|D(\zeta_o,\varepsilon)|^{-1} \int_{D(\zeta_o,\varepsilon)} | f(\eta) - f(\zeta_o) |\, dw_p(\eta) = o(1) \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Dabei ist $|D(\zeta_o,\varepsilon)|$ die Oberfläche der Kugelkappe $D(\zeta_o,\varepsilon)$ um ζ_o.
Sei ferner die Gegenpolbedingung $(**)$ in ζ_o' genau gegenüber ζ_o erfüllt.
Dann ist die Laplace-Reihe $(*)$ (C,α)-summierbar $(\alpha > \lambda+1)$ zu $f(\zeta_o)$.

GÖRLICH, E.: <u>Zum Saturationsproblem für Summationsverfahren von Fourierreihen</u>

Es werden Summationsverfahren $\{P_n(f;x);\ n = 1,2,\ldots;\ n \to \infty\}$ der

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Fourierreihe $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$ einer Funktion $f(x) \in X$ betrachtet, wobei X einer der Räume $C_{2\pi}$ oder $L^p_{2\pi}$ $(1 \leq p < \infty)$ ist und $P_n(f;x)$ die Gestalt $P_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} g_k(n)\, A_k(x)$ hat. ($N = N(n)$ oder $N = +\infty$).

Als Saturationsklasse des Summationsverfahrens wird diejenige Klasse von Funktionen aus X bezeichnet, für die das Verfahren die bestmögliche nicht-identische Approximation liefert.

Gesucht ist ein Saturationssatz für eine größere Klasse von Summationsverfahren, d.h. eine Äquivalenzbeziehung zwischen einer Eigenschaft der Funktion $f(x) \in X$ und der Aussage $\| f(x) - P_n(f;x) \|_X = O\left(\frac{1}{n^{\tau}}\right)$, $(n \to \infty;\ \tau \to 0)$, wobei $\frac{1}{n^{\tau}}$ die Saturationsordnung ist.

Dieses Problem ist in der einen Richtung gelöst durch einen Satz von G.I. Sunouchi und Ch. Watari (Tôhoku Math. Journal <u>11</u>, (1959), p. 480-488). Für die andere Richtung, (die "direkte" Richtung in der Approximationstheorie) läßt sich der Satz beweisen, wenn man zusätzliche Voraussetzungen über das Summationsverfahren macht.

Diese Voraussetzungen sind u.a. beim Summationsverfahren von Fejér-Korovkin, und nach einer einfachen Modifikation für kontinuierliche Summationsparameter, auch bei den Verfahren von Abel-Cartwright und Riemann erfüllt.

JOHNEN, H.: <u>Symmetrische Operatoren in Hilbert-Räumen</u>

Extremaleigenschaften von Eigenwerten symmetrischer, kompakter Operatoren $K \in [X,X]$, wobei X ein nicht notwendig vollständiger Innerer-Produktraum ist. Ferner: Approximation und Fehlerabschätzung von Eigenwerten solcher nicht positiv- oder nicht negativ-definiten Operatoren nach einem Satz von Kryloff-Weinstein.

NECKERMANN, L.: <u>Reihenentwicklungen nach einem System orthogonaler Gegenbauerscher Funktionen</u>

Für die aus der Gegenbauerschen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}\right] + \lambda\,(\lambda + 2\nu)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, y = 0$$

mit reellen λ und $\nu > -\frac{1}{2}$ und den beiden Randbedingungen

$y(c) = 0$ $\qquad (-1 < c < 1)$ und

$y(x) = O(1)$ für $x \to 1-0$ im Fall $\nu \geq \frac{1}{2}$ bzw.

$y'(x) = O(1)$ für $x \to 1-0$ im Fall $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

bestehende, singuläre Sturm-Liouvillesche Randwertaufgabe wurde im Anschluß an einen Gedankengang von E. Hille (1918/9) mittels des Satzes über implizite Funktionen und stetiger Fortsetzung die Existenz eines Systems von zueinander orthogonalen Eigenfunktionen gezeigt und danach deren Oszillationsverhalten bestimmt. Weiter ließen sich auf diese Gegenbauersche Funktionen die Beweise der Lösbarkeit der Interpolationsaufgabe und des Abgeschlossenheitssatzes übertragen, die H. Prüfer (1926) für Sturm-Liouvillesche Reihenentwicklungen hergeleitet hatte. Abschliessend wurden dann ein Konvergenz- und ein Darstellungssatz für Fouriersche Reihen nach diesen Gegenbauerschen Funktionen haptsächlich mit Hilfe asymptotischer Koeffizientenabschätzungen bewiesen.
(Erscheint im Archiv der Mathematik)

NESSEL, R.J.: <u>Mehrdimensionale Fourier-Transformationen in der Approximationstheorie</u>

Es sei $\hat{f}(v)$ die Fouriertransformierte einer Funktion $f(x) \in L_1(E_n)$ und $\hat{\mu}(v)$ die Fourier-Stieltjes-Transformierte eines endlichen Maßes $\mu \in \mathcal{M}(E_n)$. Die Funktion $K(x)$, definiert für alle Punkte x des n-dimensionalen Euklidischen Raumes E_n, erfülle die folgenden Bedingungen:

1) $K(x) \geq 0$ für alle $x \in E_n$; $K(x)$ ist stetig in $x = 0$ und $K(x) = K(-x)$,
$K(x) \in L_1(E_n)$ mit $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} K(x)\, dx = 1$

2) Es existieren Konstanten $\gamma > 0$ und $C > 0$, so daß für alle v gilt

$$\lim_{\rho \uparrow \infty} \frac{\rho^{\gamma}}{|v|^{\gamma}} \left[1 - \hat{K}\left(\frac{1}{\rho} v\right)\right] = C$$

Dabei ist ρ ein positiver Parameter.

3) Es existiert ein endliches Maß $\psi \in \mathcal{M}(E_n)$, so daß für ein $C > 0$ die Darstellung gilt

$$\frac{\rho^{\gamma}\left[1 - \hat{K}\left(\frac{1}{\rho} v\right)\right]}{C\, |v|^{\gamma}} = \check{\psi}\left(\frac{1}{\rho} v\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{-i\frac{\langle v, x\rangle}{\rho}}\, d\psi .$$

Für das singuläre Integral

$$J_{\rho}(f; x) = \frac{\rho^n}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} f(x - u)\, K(\rho u)\, du$$

wurde der folgende Satz bewiesen

<u>Satz a)</u> Es sei $f \in L_1(E_n)$ und $K(x)$ erfülle die Bedingungen 1) und 2). Dann folgt aus

$$\| J(f; x) - f(x) \|_1 = o(\rho^{-\gamma}) \qquad (\rho \uparrow \infty),$$

daß $f(x) = 0$ fast überall.

b) Es sei $f \in L_1(E_n)$ und $K(\chi)$ erfülle die Bedingungen 1) und 2). Dann folgt aus

$$\| J_\rho(f;x) - f(x) \|_1 = O(\rho^{-\gamma}) \qquad (\rho \uparrow \infty),$$

daß ein endliches Maß $\mu \in \mathcal{M}(E_n)$, so daß für alle ω gilt

$$c\,|\omega|^\gamma \hat{f}(\omega) = \hat{\mu}(\omega).$$

c) Es sei $f \in L_1(E_n)$ und $K(\chi)$ erfülle die Bedingungen 1) und 3). Dann folgt aus

$$c\,|\omega|^\gamma \hat{f}(\omega) = \hat{\mu}(\omega) \qquad (\text{für alle } \omega \in E_n),$$

wobei $\mu \in \mathcal{M}(E_n)$ ist, daß

$$\| J_\rho(f;x) - f(x) \|_1 = O(\rho^{-\gamma}) \qquad (\rho \uparrow \infty).$$

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines bekannten Ergebnisses auf mehrere Dimensionen.

NEUHEUSER, H.G.: Über Tauber-Bedingungen der (C,k)- und Abel-Limitierung

Ist eine Funktion $s(x)$ bei der Bewegung $x \to \infty$ limitierbar nach einem Verfahren B, so muß in dieser B-Limitierbarkeit noch eine weitere Bedingung an $s(x)$, eine sogenannte Tauberbedingung, hinzutreten, wenn $s(x)$ notwendigerweise konvergieren soll. Die bisher bekannten Tauberbedingungen für die (C,k)- und Abel-Verfahren gelten für jedes dieser Verfahren in gleicher Weise. Da diese Verfahren aber verschieden stark sind, ist zu vermuten, daß Tauberbedingungen existieren, die zwar für eines der hier betrachteten Verfahren gelten, aber für das nächst stärkere schon zu allgemein sind. Dieses zum ersten Male von Herrn Prof. Dr. P.L. Butzer aufgeworfene Problem wurde folgendermaßen beantwortet: Zu einem festen ganzzahligen k wurden 4 Bedingungen T_i^k $(i = 0,1,2,3)$ angegeben, von denen jede eine Tauberbedingung für die (C,k)- nicht aber für die $(C,k+1)$-Methode ist. Im Beweis wurde gezeigt, daß $s(x) = x^{k+\frac{1}{2}} e^{ix} \in T_i^k$ $(i = 0,1,2,3)$ und $(C,k+1)$- aber nicht (C,k)-limitierbar ist. Weiter ist jede der 4 Bedingungen T_i $(i = 0,1,2,3) = \bigcap_{k=1}^{\infty} T_i^k$ eine Tauberbedingung für jedes (C,k)-Verfahren, aber nicht für die Abel-Limitierung. Hier wurde das Gegenbeispiel von G.H. Hardy: $s(x) = \int_0^x e^{iv+\sqrt{v}}\,dv$ benützt, daß $\in T_i$ $(i = 0,1,2,3)$ und Abel- aber für kein k (C,k)-limitierbar ist, wie bewiesen wurde.

RUNCK, P.O.: Über Sätze vom Banach-Steinhausschen Typ

Fragen der Beschränktheit, Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit stetiger linearer Operatoren, die einen Banach-Raum X in einen Banach-

Raum Y abbilden, lassen sich in vielen Fällen mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Satzes von Banach-Steinhaus lösen. Das wesentliche Merkmal dieser Sätze besteht darin, daß 1. Konvergenz bzw. Beschränktheit der linearen Operatoren vorliegt, angewandt auf die Elemente einer Teilmenge S. 2. Jedem $x \in X$ einer beschränkten Folge $\{s_m \in S\}$ $(m = m(n))$ zugeordnet werden kann derart, daß für die linearen Operatoren, angewandt auf die Differenzen $x - s_m$ weitere Konvergenz- bzw. Beschränktheitsbedingungen erfüllt sind.

Als Beispiel werde folgender Satz für die Konvergenzgeschwindigkeit angegeben:

Satz: $\{U_n : X \to Y\}$ sei eine Folge linearer stetiger Operatoren, die den (B)-Raum X in den (B)-Raum Y abbilden, K sei eine Kugel aus X.

Die Bedingung:

Es existiert in der Kugel K eine Teilmenge S derart, daß es zu jedem $x \in K$ eine Folge $\{s_m \in S\}$ $(m = m(n))$ gibt, für die gilt:

$$\| U_n(\Phi(n)(s_m - x)\| = O(1), \quad \| U(\Phi(n)(s_m - x)\| = O(1) \text{ sowie}$$

$$\| \Phi(n)(U_n - U)(s_m)\| = O(1), \qquad n \to \infty, \ \Phi(n) \to \infty$$

ist notwendig und hinreichend dafür, daß $\{\| \Phi(n)(U_n - U)(x)\|\}$ für alle $x \in X$ und $\{\| \Phi(n)(U_n - U)\|\}$ beschränkt sind.

(Vergleiche hierzu auch Vortragsbuch Nr. 7, Seite 224-225)

SCHERER, K.: Kompakte symmetrische Operatoren im Hilbert-Raum

Thema: Untersuchung der Struktur des Operators, indem man seine Eigenwerte und Eigenelemente angibt und durch diese Bildraum und Nullraum bestimmt und darstellt. Außerdem Bestimmung von Spektrum und Resolventenmenge.

SCHULTE, H.: Über den Operatorenkalkül von Mikusinski in Folgenräumen

Der Folgenraum sei definiert durch Pseudo-Normen. Er besteht aus der Menge

$$\left\{ f_n ; \left\langle \sum_{k=0}^{N} |f(k)|^p \right\rangle^{1/p}, \ \forall N \in [0, \infty) \right\}.$$ Aus diesem Raum läßt sich mit Hilfe der gliedweisen Addition und dem Cauchy-Produkt als Multiplikation ein Operatorenkalkül im Sinne Mikusinskis aufbauen. Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten werden gelöst.

Mit dem Ziel der Lösung linearer partieller Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten wird eine Operatorenanalysis aufgebaut. Die Begriffe der Differenzenbildung, der Summierung im Operatorenkörper werden eingeführt. Die Eigenschaften von Differenzengleichungen im Körper werden betrachtet, insbesondere die notwendige Körperadjunktion wird dargestellt.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vom Beispiel der vorgelegten geschlossenen Lösung der diskretisierten Wärmeleitungsgleichung ausgehend wird untersucht, wie im Operatorenkörper der Begriff der Konvergenz sinnvoll eingeführt werden kann. Das Ziel ist, komplizierte Lösungen von Differenzengleichungen im Operatorenkörper zu vereinfachen und dabei gleichzeitig Abschätzungen zu gewinnen. Es stellt sich heraus, daß die fast gleichmäßige Konvergenz von Elementen in den Folgenräumen eine geeignete Konvergenzdefinition im Körper zuläßt. Führt man die äquivalente Definition der Pseudo-Normkonvergenz von der Ordnung $p(1 \leq p \leq \infty)$ ein, so zeigt sich mit Hilfe der Jensen-Ungleichung, daß beispielsweise aus der Normkonvergenz in den bekannten Räumen $l^p(1 \leq p \leq \infty)$ die fast gleichmäßige Konvergenz folgt. Die Forderung der fast gleichmäßigen Konvergenz ist daher schwach. Es läßt sich zeigen, daß die Teilräume in ihrer Pseudo-Normkonvergenz vollständig und zum Teil separabel sind. Findet man die obigen Näherungen und Abschätzungen in den Ergebnissen aus einer Approximationstheorie in Folgenräumen?

H. Schulte (Aachen)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft