5

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Mathematische Methoden der Himmelsmechanik und Astronautik und damit zusammenhängende Fragen der numerischen Mathematik

15. - 21. März 1964

Leitung: Professor Dr. E. STIEFEL, Eidg. Technische Hochschule Zürich

Künstliche Erdsatelliten sind ein wesentliches Instrument der Forschung in der Physik der Atmosphäre, in der Geodäsie und in der Strahlenphysik geworden, und manche diesbezügliche Messungen beruhen auf den Abweichungen der beobachteten Bahnen von den vorausberechneten Bahnen. Solche Vorausberechnungen stellen neuartige mathematische Probleme und haben eine Renaissance der Himmelsmechanik bewirkt. Da nun auch die europäischen Staaten den Plan haben, Satelliten für Forschungszwecke und für die Nachrichtentechnik anzuwenden, schien es an der Zeit, einmal europäische Mathematiker, Astronomen und eigentliche Himmelsmechaniker zu einer Tagung zusammenzurufen.

An dieser Tagung wurden hauptsächlich vier Teilgebiete behandelt, nämlich:

I. die Bahnberechnungsmethoden im Drei- und Mehrkörperproblem,
II. die eigentliche Satellitenmechanik im Vakuum und in der Atmosphäre,
III. Optimierungsfragen
und
IV. Methoden der Analysis und der numerischen Mathematik.

Die Tagung hat einige beachtliche Resultate geliefert; insbesondere ist zu Tage getreten, daß mathematische Methoden, die in andern Gebieten entwickelt worden waren, nun auch für die Himmelsmechanik bedeutungsvoll werden (Stabilitätsuntersuchungen bei nichtlinearen Differentialgleichungen, Spinoren, Numerik der Differentialgleichungen, mathematische Technik der Optimierung gesteuerter Vorgänge).

An der Tagung nahmen die folgenden Herren teil:

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

ADAMS, Dr.-Ing.E.	Deutsche Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt, Freiburg i.Br.
AKSNES, cand.real.K.	Lilleström
AMANN, Dipl.-Math.H.	Freiburg i.Br.
ARENSTORF, Dr.R.R.	Marshall Space Flight Center, NASA Huntsville USA
BLANC, Prof.Dr.Ch.	EPUL, Lausanne
BOCKEMÜLLER, E.A.,Dipl.-Math.	Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt, Braunschweig
BOLLERMANN, Dr.W.	Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Oberpfaffenhofen
DEARMAN, Commodore, C.	NASA, Washington / USA
DELIE, A.	Université catholique, Louvain
DEPRIT, Dr.A.	Boeing Scientific Research Laboratories Seattle / USA
DIERSTEIN, R.	Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Oberpfaffenhofen
FILIPPI, Dr.S.	Technische Hochschule, Aachen
GOLDSTEIN, Dr.A.A.	The University of Texas, Austin / USA
GROVES, Dr.G.V.	University College London
HEINDL, G.	München
HENRARD, Y.	Université catholique, Louvain
HESSE, Dr.K.	Deutsches Rechenzentrum, Darmstadt
HIGGINS, Dr.T.P.	Seattle
KNAPP, Dr.H.	Universität Innsbruck
KRÜCKEBERG, Dr.F.	Universität Bonn
KUSTAANHEIMO, Prof.Dr.P.	Observatorium Helsinki
MÜLLER, Prof.Dr.C.	Technische Hochschule, Aachen
NITSCHE, Prof.Dr.J.	Freiburg i.Br.
REINHART, E., Dipl.-Ing.	München
ROTH, Dr.E.	Universität Bern
RÖSSLER, M., Dipl.-Math.	Eidg.Technische Hochschule, Zürich
SCHNEIDER, M., Dipl.-Phys.	München
SCHUBART, Dr. J.	Astronomisches Recheninstitut, Heidelberg
SCHÜRER, Prof.Dr.M.	Universität Bern
STIEFEL, Prof.Dr.E.	Eidg.Technische Hochschule, Zürich
STUMPFF, Prof.Dr.K.	Universität Göttingen
SZEBEHELY, Prof.V.	Yale University
VELTE, Dr.W.	Freiburg i. Br.
VINTI, Dr.J.	National Bureau of Standards, Washington
VOLK, Prof.Dr.O.	Würzburg
WALDVOGEL, J., Dipl.-Math.	Eidg.Techn.Hochschule, Zürich

WALTER, Dr.H.G.	Deutsches Rechenzentrum, Darmstadt
WEISE, Prof.Dr.K.H.	Kiel
SHAIK, N.A.	London

Es wurden folgende Vorträge gehalten:

I.A. Bahnberechnungsmethoden im Drei- und Mehrkörperproblem

1. Prof.Dr.K.Stumpff: Einheitliche Lösung des Wurfproblems.

Es handelt sich um das Anfangswertproblem im Zweikörperproblem, das bekanntlich auf eine Keplerbahn führt. Bei der klassischen Behandlung ergeben sich Schwierigkeiten, wenn die Bahn nahezu eine Parabel ist. Stumpff hat daher mit Hilfe seiner c-Funktionen eine Lösung ausgearbeitet, die unabhängig von der Art des Kegelschnittes ist und bereits im Buch des Vortragenden (Himmelsmechanik, Band 1, 1959, Dt.Verlag der Wissenschaften) dargelegt wurde.

2. Dr. R. Arenstorf: A New Method of Perturbation Theory and its Application to Periodic Motions in the Restricted Problem of Three Bodies.

Zur Lösung von Differentialgleichungen wird eine neue Störungstheorie entwickelt, die mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln arbeitet,und es erlaubt, Existenzbeweise für Bahntypen aufzustellen, die bisher nicht bekannt waren. Der Vortragende zeigt außerdem eine reiche Kollektion von periodischen Bahnen, die im Marshall Space Flight Center berechnet wurden und neue Einsichten in das restringierte Dreikörperproblem vermitteln.

3. A. Delie: Librations périodiques autour de L_4.

Bekanntlich hat schon Lagrange spezielle Lösungen des restringierten Dreikörperproblems gefunden, die in einem rotierenden Koordinatensystem Gleichgewichtslagen sind. Drei dieser Gleichgewichtslagen (L_1, L_2, L_3) befinden sich auf der Verbindungsgeraden der beiden anziehenden Massen und zwei andere (L_4, L_5) sind Spitzen gleichseitiger Dreiecke, die ihre andern Ecken in den anziehenden Massen haben. L_4 und L_5 können stabile Gleichgewichtslagen sein. Der Vortragende schildert die in Louvain mit hoher Genauigkeit durch Reihenentwicklungen berechneten Librationsbahnen des Mobils um L_4 herum.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

J. Henrard: Orbites doublement asymptotiques aux équilibres colinéaires.

Die oben eingeführten Librationspunkte L_1, L_2, L_3 sind keine stabilen Gleichgewichtslagen, und daher kann ein Mobil in zwei Richtungen aus dem Librationspunkt herauslaufen. Es werden die Ergebnisse vieler numerischer Berechnungen solcher Bahnen (bei verschiedenen Massenverhältnissen der anziehenden Körper) gezeigt, die auf elektronischen Geräten in Louvain gemacht worden sind.

5. Dr. J. Schubart: Planetoidenbewegung.

Als Angehöriger des Astronomischen Recheninstituts in Heidelberg berichtet der Vortragende über seine und andere Untersuchungen hinsichtlich der Planetoidenbewegung unter dem Einfluß der Jupiterstörungen und beleuchtet auch spezielle Fragenstellungen, z.B. die Librationsbewegungen der Trojaner und die Kommensurabilitätslücken der Planetoiden. Er schildert auch einfache, aber wirkungsvolle, auf Poincaré zurückgehende Methoden zur Berechnung der langperiodischen Bewegungen der Planetoiden.

6. Prof.Dr. M. Schürer: Numerische Untersuchungen über die Kommensurabilitätslücken bei den kleinen Planeten.

Die Kommensurabilitätslücken bei den kleinen Planeten können auch durch physikalische Überlegungen verständlich gemacht werden. Es scheint, daß diese Lücken mehr im statistischen Sinne aufzufassen sind, d.h. daß der Planetoid erst nach langer Zeit in die Lücke zurückkehrt, so daß die Wahrscheinlichkeit, ihn dort zu beobachten, klein ist.

7. Prof.Dr. P. Kustaanheimo: Numerische Methoden für die Bahnbestimmung von Planeten, Kometen und Satelliten.

Die Aufgabe der Bestimmung einer Bahn eines Himmelskörpers aus drei Richtungsbeobachtungen ist eine Grundaufgabe der Astronomie, und heute wird meistens die von Gauss erfundene Lösung angewendet. Es wird jedoch gezeigt, daß auch hier die im Vortrag 1 erwähnten Stumpff'schen c-Funktionen zur Lösung sehr geeignet sind und einen stabilen Iterationsprozeß liefern.

8. Prof.Dr. E. Stiefel: Über die Störungsrechnung in cartesischen Koordinaten.

Rekapitulation der klassischen Methoden der Störungsrechnung in rechtwinkligen Koordinaten, die alle durch Linearisierung, d.h. Bildung der Variationsgleichung, das Problem approximativ auf eine

lineare Differentialgleichung zurückführen. Die Methoden (Dziobek, Encke, Musen usf.) unterscheiden sich in der Integrationsmethode dieser Variationsgleichung für Störungen höherer Ordnung. Weiterhin wird darauf hingewiesen, daß die Einführung von regularisierenden Variablen von selbst bewirkt, daß der homogene Teil der Differentialgleichungen linear wird und sogar konstante Koeffizienten hat, so daß nicht linearisiert werden muß.

9. E. Bockemüller: Eine Normalform der Bewegungsgleichungen des allgemeinen Dreikörperproblems.

Dur ch Einführung von Zylinderkoordinaten können verschiedene bekannte Sätze im Dreikörperproblem einfacher und durchsichtiger begründet und außerdem neue Lösungen gefunden werden.

I.B. Regularisierung

Wenn zwei Körper in einem Mehrkörperproblem zusammenstoßen, so haben die Differentialgleichungen an dieser Stelle Singularitäten. Bereits die klassischen Bearbeiter (Birkhoff, Lemaître, Levi-Civita, Sundman, Thiele) haben gezeigt, daß die Singularitäten hebbar sind und daß überdies noch verschiedene Methoden für eine solche Regularisierung verfügbar sind. In der Astronautik haben diese Methoden erhebliche praktische Bedeutung bekommen, da man nun Bahnen berechnen will, die in unmittelbare Nähe eines Attraktionszentrums führen (Beispiel: Rakete von der Erde zum Mond).

1. Dr. A. Deprit: Computing of Orbits in the Restricted and in the General Three Body Problem by Means of Regularizing Coordinates.

Es wird eine Übersicht über die verschiedenen Regularisierungsmethoden gegeben und ihre Wertung vom Standpunkt der elektronischen Rechnung aus vorgenommen. Weiterhin werden interessante neuartige Modifikationen von Regularsierungen vorgeführt, die sich auch für das allgemeine Dreikörperproblem eignen.

2. Prof. V. Szebehely: Perturbation Theory of the Regularized Restricted Problem of Three Bodies.

Die Differentialgleichungen des restringierten Dreikörperproblems werden mit Hilfe der Birkhoff'schen Transformation regularisiert. Zur Bestimmung der Bewegung des Mobils werden Reihenentwicklungen nach dem Massenverhältnis der beiden anziehenden Körper benutzt. Zusammenstöße des Mobils mit diesen beiden Körpern stören daher die Rechnung nicht, deren Ergebnisse in vielen graphischen Darstellungen demonstriert werden.

3. J. Waldvogel: Funktionentheoretische Aspekte der Regularisierung.

Die Uniformisierung von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen wird verwendet, um die zur Regularisierung des ebenen restringierten Dreikörperproblems gebräuchlichen Transformationen (Levi-Civita, Birkhoff, Thiele) zu klären. Das dabei offenbar werdende Prinzip ermöglicht die simultane Regularisierung aller Singularitäten in einem sehr speziellen Vierkörperproblem. In diesem Fall führt die Uniformisierung auf elliptische Funktionen.

II. Satellitenmechanik im Vakuum und in der Atmosphäre

1. Dr. J. Vinti: The Spheroidal Method in the Theorie of the Orbit of an Artificial Satellite.

Durch Einführung von rotationssymmetrischen elliptischen Koordinaten kann das Potential des Erdkörpers so approximiert werden, daß der Abplattung Rechnung getragen wird. Die diesbezüglichen Bewegungsgleichungen für einen Satelliten können durch Separation weitgehend in geschlossener Form gelöst werden. Der Vortragende entwickelt die sich daraus ergebenden Störungsformeln der Satellitenbahn.

2. Prof. Dr. K. Stumpff: Das Hill'sche Mondproblem.

Die beiden Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten (rotierendes System) des Hill'schen Mondproblemes werden in eine Differentialgleichung dritter Ordnung für r(t) mit der Jacobi'schen Konstanten γ als Parameter umgeformt. Durch Diskussion dieser Gleichung gelingt es nach Einführung einer "entzerrenden" Variablen q statt der Zeit t, die Schar der Hill'schen "Variationsbahnen" zu finden. Die erste Näherung liefert bereits die ersten Glieder der Hill'schen Reihen genau, was für enge Variationsbahnen, insbesondere für den Fall des Erdmondes, ausreicht.

3. Prof. Dr. K. Stumpff: Resonanzbewegung eines stationären Satelliten.

Ein synchroner Satellit in der Äquatorebene (Umlaufszeit: 1 Sterntag) hat vier stationäre Lagen. Es wird gezeigt, daß zwei davon infinitesimal stabil sind, und die zugehörigen Librationen werden auf Grund einer einfachen linearisierten Theorie studiert.

4. Prof. Dr. C. Müller: Über die Möglichkeit der Nachprüfung der Einstein'schen Hypothesen der Gravitation vermittels Kreiselbewegungen von Satelliten.

Der Vortragende betrachtet einen streng kugelförmigen und homogenen

Satelliten, dessen Achse in der Newton'schen Mechanik sich also parallel bleiben würde. Das Führungsfeld der allgemeinen Relativitätstheorie bewirkt jedoch eine kleine Richtungsänderung der Achse, die im zugrunde gelegten Beispiel 6" pro Jahr beträgt und somit prinzipiell eine Handhabe zur Nachprüfung der allgemeinen Relativitätstheorie liefert.

5. Dr. Groves: Relations of Upper Atmosphere with Satellite Orbits. Grundlagen und Berechnung der wichtigsten Einflüsse des Luftwiderstandes auf eine Satellitenbahn: Widerstandskoeffizient, Störung der Bahnelemente durch den Luftwiderstand in der rotierenden Atmosphäre, im speziellen Änderung der Halbachse und der Umlaufszeit, Berechnung der Lebenszeit eines Satelliten, Beschreibung der wichtigsten Rechenmethoden zur Bestimmung der Lebenszeit.

6. Dr. E. Adams: Einige Fragen des aerodynamischen Widerstandes und der aerodynamischen Erhitzung beim Hochgeschwindigkeitsflug in Atmosphären.
Einfluggeschwindigkeiten in planetarische Atmosphären (incl. Erde) werden auf Grund des Zweikörperproblems diskutiert. Bei Einflug mit mehr als der (Satelliten-)Kreisbahngeschwindigkeit existiert ein flacher Grenzwinkel gegen die örtliche Horizontale, dessen Unterschreiten die Sonde wieder aus der Atmosphäre herausführt. Der Eintrittskorridor wird nach oben hin durch diesen Grenzwinkel und nach unten hin durch die Einhaltung der maximal zulässigen Verzögerung begrenzt. Die Korridortiefe kann durch Verwendung von aerodynamischem Auftrieb vergrößert werden. Ferner werden einige Angaben über Ursachen und Größenordnung der Erhitzung eines Satelliten beim Durchqueren von Atmosphären gemacht.

7. Dr.E.Roth: Über den Einfluß kleiner Luftkräfte und -momente auf die Flugbahn schnell-rotierender Körper.
Es wurde das System der auf einen Drehkörper wirkenden Kräfte und Momente diskutiert. Von diesen sind mehrere experimentell sehr schlecht zu bestimmen. Durch numerische Integration des vollen Systems von Differentialgleichungen wird der Einfluß dieser Kräfte während einer langen Zeit untersucht und daraus rückwärts auf ihre Größe geschlossen.

III. Optimierungsfragen

Beim angetriebenen Raketenflug oder beim Transfer von einer Gravitationsbahn in eine andere stellt sich das Problem, unter den vorhandenen Möglichkeiten diejenige auszusuchen, die minimalen Brenn-

stoffverbrauch bewirkt. Diese und andere Variationsprobleme werden unter dem Stichwort "Optimierung" zusammengefaßt.

1. Dr. A. Goldstein: Fuel Optimization in Orbital Rendez-Vous.
Unter dem Rendez-Vous-Problem versteht man folgendes: Ein in einem Gravitationsfeld frei beweglicher Körper A soll durch eine Rakete B an einem gegebenen Raumpunkt so erreicht werden, daß auch die Geschwindigkeit dieselbe wie diejenige von A wird. Es soll der Schub der Rakete so gesteuert werden, daß der Brennstoffverbrauch minimal wird. Derartige Probleme werden gewöhnlich mit der klassischen Variationsrechnung oder mit dem sogenannten Maximumprinzip von Pontryagin angegangen. Der Vortragende zeigt jedoch, daß auch Methoden der konvexen Programmierung angewendet werden können, die dual zum Pontryagin'schen Prinzip sind, aber im Gegensatz zu diesem nur in einem endlich dimensionalen Raum arbeiten. Interessant ist, daß die Lösung unstetig verläuft, d.h. die Düse der Rakete muß in gewissen Zeitintervallen maximalen Schub liefern und in den Zwischenzeiten vollständig abgestellt werden.

2. Commodore C. Dearman: On the Optimization of Space Flight Trajectories and the Generation of Related Guidance Functions.
Die Hauptschwierigkeit bei der zweiten Liapunov'schen Methode zur Bestimmung der Stabilitätseigenschaften von nichtlinearen Differentialgleichungssystemen liegt in der Erzeugung von brauchbaren Liapunov-Funktionen. Der Vortragende klassifiziert die verschiedenen Methoden zur Erzeugung solcher Funktionen. Speziell wird die Methode der variablen Gradienten von Schultz und Gibson auseinandergesetzt, welche sich besonders für die Erforschung der Stabilitätseigenschaften der Bewegungsgleichungen von gesteuerten Raumfahrzeugen eignet.

IV. Methoden der Analysis und der numerischen Mathematik

1. Prof.Dr. Ch. Blanc: Intégrales quasi-isomorphes de systèmes linéaires.
Wenn die Matrix (As+B) regulär ist, hat das Differentialgleichungssystem $A\dot{x} + Bx = u\,e^{st}$ die Lösung $x = (As+B)^{-1}u\,e^{st}$ (isomorphes Integral). Sind die Matrizen A und B Funktionen von t, kann man explizite eine Funktion Y(s,t) so definieren, daß das System

$$A(t)\,\dot{x} + B(t)\,x = u\,e^{st}$$

die Lösung $x = Y(s,t)\,u\,e^{st}$ hat; falls A und B Konstante sind, reduziert sich die Matrix Y zu $(As+B)^{-1}$. Für den Fall, wo die

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Variation von A und B von einer (bezüglich der Lösung des homogenen Systems) langsam veränderlichen Störung herrührt, wird eine asymptotische Entwicklung für Y gegeben.

2. Dr. H. Knapp: Die Gröbner-Methode und ihre Anwendung auf die numerische Bahnberechnung in der Himmelsmechanik.

Die von W. Gröbner vorgeschlagene Methode zur Lösung von Differentialgleichungen mittels Lie-Reihen setzt der Vortragende ohne explite Benutzung der Lie-Reihen auseinander und modifiziert sie in der Weise, daß er mit einem endlichen Abschnitt der Reihe arbeitet und dann zur Behebung des Abbrechfehlers ein Iterationsverfahren benutzt. Rein auf Grund einer Lipschitzbedingung gelingt es, die schnelle Konvergenz der Methode nachzuweisen. Probeberechnungen an der Bahn des achten Jupitermondes ergeben bei erträglichem Aufwand gute Ergebnisse.

3. Dr. S. Filippi: Das Verfahren von Runge-Kutta-Fehlberg zur numerischen Berechnung von Mehrkörperproblemen.

Es wird die Aufstellung der Runge-Kutta-Fehlberg-Formeln für gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung und für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung skizziert. Daran anschließend wird über die praktischen Erfahrungen mit dem Verfahren von Runge-Kutta-Fehlberg bei der numerischen Lösung des speziellen Dreikörperproblems "Sonne, Jupiter und achter Jupitermond" und des restringierten Dreikörperproblems berichtet. Zum Vergleich der hiermit gewonnenen numerischen Ergebnisse werden die Ergebnisse herangezogen, die das Verfahren der zentralen Differenzen, das Verfahren von Runge-Kutta-Nyström, die Potenzreihenmethode von Steffensen und Rabe und die Lie-Reihen-Methode von Gröbner liefern.

4. Dr. F. Krückeberg: Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Fehleruntersuchungen zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung, wobei Hermite-Integration im Vordergrund steht. Es wird gezeigt, daß zwei mitlaufende Integrationsverfahren konstruiert werden können, deren Resultate die exakte Lösung einschließen. Bei Systemen und Differentialgleichungen höherer Ordnung sind allerdings zusätzliche Informationen nötig.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

V. Kolloquien

1. Kolloquium über die Anwendung von Spinoren in der Himmelsmechanik.

E. Stiefel befaßt sich mit der Entwicklung von Kugelfunktionen in eine Fourierreihe nach der mittleren Anomalie eines Satelliten, der auf einer geneigten Bahn läuft. Er zeigt, daß diese Aufgabe mit Hilfe von Spinoren in mathematisch durchsichtiger Weise erledigt werden kann.

Anschließend zeigt P. Kustaanheimo, daß Spinoren zur Regularisierung von Zusammenstößen im dreidimensionalen Raum verwendet werden können (wenn ein auf einer Raumkurve laufendes Mobil mit dem Anziehungszentrum kollidiert). Es entsteht so eine natürliche räumliche Verallgemeinerung der ebenen Regularisierung von Levi-Civita.

2. Kolloquium über Einzelprobleme der Satellitenmathematik.

H. Walter studiert Sichtbarkeitsverhältnisse von Satelliten für die Minitrack- oder Dopplerbeobachtung von Erdstationen aus. Er leitet die Bedingungen her, die für die Aufsuchungsephemeriden eingehalten werden müssen, damit der Satellit in das Gesichtsfeld des Beobachters kommt.

E.A. Bockemüller untersucht die Bahnkurven erdferner Satelliten unter dem Einfluß des Mondes. Es gelingt ihm, das diesbezügliche Dreikörperproblem durch geeignete Vernachlässigungen in geschlossener Form zu lösen. Er diskutiert insbesondere den Spezialfall des synchronen Satelliten.

Auf dieser Tagung wurden viele Probleme der Himmelsmechanik und vor allem das Dreikörperproblem eingehend beleuchtet. Optimierungsfragen wurden nur angeschnitten. Andere Zweige der Himmelsmechanik (Statistik, Ergodentheorie, Wiederkehrsätze) und speziell die qualitativen Methoden der russischen Schule (Chilmi) sind leider nicht zur Sprache gekommen.
Eine Veröffentlichung der Vorträge in Buchform wird vorbereitet.

J. Waldvogel (Zürich)