7

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

6

Tagungsbericht
über das
Kolloquium der Deutschen Vereinigung
für Mathematische Logik und
für Grundlagenforschung der exakten Wissenschaften.

14. bis 17. April 1964

Die Tagung stand unter der Leitung der Professoren H. HERMES (Münster) und H. Arnold SCHMIDT (Marburg). Am 16. April fand eine Mitgliederversammlung der Deutschen Vereinigung für Mathematische Logik und für Grundlagenforschung der exakten Wissenschaften statt. Die Tagung selbst verlief in der gelösten Atmosphäre des Oberwolfacher Instituts überaus fruchtbar und anregend.

Tagungsteilnehmer:

J. DILLER, Kiel
G. HASENJAEGER, Bonn
H. HERMES, Münster
J.v.KEMPSKI, Münster
H. LEWITZ, Kiel
K. LORENZ, Erlangen
P. LORENZEN, Erlangen
G.H. MÜLLER, Heidelberg
A. OBERSCHELP, Hannover
D. RÖDDING, Münster
H.A. SCHMIDT, Marburg a.d.Lahn
K. SCHÜTTE, Kiel

Allgemein mag zu den Themen der Vorträge bemerkt werden, daß sowohl die konstruktiven Tendenzen als auch die klassische Auffassung ausführlich zur Sprache kamen. Zu Streitgesprächen bot sich in der von Professor Schmidt geleiteten Diskussion wie auch beim Gespräch im kleinen Kreis reichlich Gelegenheit. Zufällig ergab sich, daß an jedem Tag ein anderer Beweis für die Vollständigkeit der Prädikatenlogik gegeben wurde, was wohl zeigt, welche Bedeutung dieser Satz und seine Beweismethoden bekommen haben.

Im einzelnen wurden die folgenden Vorträge gehalten:

H. HERMES: Ein Vollständigkeitsbeweis für die Termlogik mit Auswahloperator.

Wenn man die Prädikatenlogik mit Hilbert'schem ε-Operator aufbaut, muß man durch simultane Induktion Terme (z.B. fx) und Ausdrücke (z.B. $\neg x = x$) einführen. Diese Duplizität findet sich

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

auch bei den grundlegenden semantischen Begriffen: Für eine Interpretation J muß man J(t) für jeden Term t definieren (J(t) ist ein Element des Individuenbereiches, zu dem J gehört), und simultan, wann ein Ausdruck bei J gilt. Man kann die Duplizität vermeiden dadurch, daß man sich auf Terme beschränkt, dabei den ε-Operator jedoch auf Terme anwendet. Auf diese Weise erhält man zunächst die Sprache einer reinen Termlogik mit Auswahloperator. Zur Einführung der grundlegenden semantischen Begriffe kann man von dem Begriff einer semantischen Basis B ausgehen. Diese ist ein Septupel $B = \langle \omega, \pi, \mathfrak{u}, \mathcal{F}, \mathfrak{n}, \mathfrak{k}, \mathfrak{i} \rangle$. Hier ist ω ein Individuenbereich, π eine nichtleere echte Teilmenge von ω, und $\mathfrak{u}$ ein Auswahloperator in ω; π vertritt in gewissem Sinne "das Wahre". $\mathcal{F}$ ist eine Menge von Funktionen über ω. $\mathcal{F}$ soll zu jeder Stellenzahl wenigstens eine Funktion dieser Stellenzahl enthalten. Zu $\mathcal{F}$ gehören speziell die Funktionen $\mathfrak{n}, \mathfrak{k}, \mathfrak{i}$. Für $\mathfrak{n}, \mathfrak{k}, \mathfrak{i}$ werden Eigenschaften gefordert, welche sie als Negation, Konjunktion, Identitätsfunktion ausweisen (z.B. soll für jedes $\mathfrak{y} \in \omega$ stets $\mathfrak{n}(\mathfrak{y}) \in \pi$ gdw. $\mathfrak{y} \notin \pi$ sein). Eine Interpretation J über B bildet die Funktorenvariablen der Sprache der Termlogik ab auf Funktionen aus $\mathcal{F}$, wobei insbesondere spezielle Funktorvariablen (die damit "Konstanten" sind) $\neg$, $\wedge$, $=$ auf $\mathfrak{n}, \mathfrak{k}, \mathfrak{i}$ abgebildet werden. Jedem Term t läßt sich ein Element $J(t) \in \omega$ zuordnen. Die semantische Folgebeziehung $\mathfrak{M} \Vdash t$ bedeutet, daß $J(t) \in \pi$ für jede Interpretation, für welche $J(s) \in \pi$ für jeden Term $s \in \mathfrak{M}$. Die gewöhnliche Prädikatenlogik mit Auswahloperator läßt sich in die Termlogik einbetten.

Für die Termlogik wird ein adäquater Kalkül angegeben. Der Vollständigkeitsbeweis läßt sich nach der Methode von Lindenbaum/Henkin/Hasenjaeger besonders übersichtlich gestalten.

G. HASENJAEGER: <u>Zum Repräsentantenproblem der Prädikatenlogik zweiter Stufe (PL_2)</u>.

In der Sprache der Mengentheorie (MT) als Metasprache ist für die PL_2 eine Formel F(m,n) definierbar mit der Interpretation:
In m als Dingbereich mit den dadurch bestimmten Attributenbereichen $P(m^k)$ ist die Formel F_n der Gödelnummer n erfüllbar. Statt der Abzählung $n \longrightarrow \{m \mid Az(m) \wedge F(m,n)\}$ der "Spektren" (mit Az(m) für Anfangszahlen als Kardinalzahlen <u>und</u> Repräsentanten der Mächtigkeiten) wurde die Abhängigkeit der Definition der Erfüllbarkeit für die PL_2 in der MT: $\{n \mid \bigvee m F(m,n)\}$ von dem für die MT

(meist stillschweigend) vorausgesetzten "natürlichen Modell" der Form $Q^{\omega+\lambda}(\phi)$, mit der "kumulativen Potenz" $Q(m) = m \cup P(m)$ diskutiert. ("Q" wäre hier überflüssig, doch wurde benutzt, daß die Definition von F nur auf Elemente in $Q^{10}(m \cup \omega)$ Bezug nimmt.) Beschreibt Ax ein $Q^{\lambda}(\phi)$ als kleinstes Modell (die "Natürlichkeit" werde durch ein Aussonderungsaxiom der Form
$\bigwedge R \bigwedge x \bigvee y \bigwedge z(z \in y \longleftrightarrow z \in x \wedge Rz)$ mit Standardinterpretation der PL_2 "erzwungen"), so ist (mit Tarski) $Ax^+ = Ax \wedge \bigvee m Ax^{(m)}$ ein F_n, so daß $\bigvee m F(m,n)$ falsch in $Q^{\lambda}(\phi)$, aber wahr im kleinsten Modell von Ax^+ ist. [($Ax^{(m)}$ meint die Relativierung
$\bigwedge x / \bigwedge x(x \in m \longrightarrow \ldots)$, $\bigwedge R / \bigwedge y(y \subseteq m \longrightarrow \ldots)$] . Frage: Ist dadurch der "naive" Gebrauch der (Semantik der) PL_2 diskreditiert?

D. RÖDDING: Zur Frage der Eliminierbarkeit des Rekursionsschemas in der Theorie der primitiv-rekursiven Funktionen.

Die Klasse P der primitiv-rekursiven zahlentheoretischen Funktionen wird dargestellt durch den Abschluß eines Systems aus endlich vielen "Anfangsfunktionen" durch die Schemata der Einsetzung (und Variablenidentifikation) und der primitiven Rekursion. Es ist bekannt, daß in dieser Darstellung das Schema der primitiven Rekursion nicht eliminiert werden kann in dem Sinne, daß P auch darstellbar wäre als Abschluß endlich vieler Anfangsfunktionen mit dem Einsetzungsschema allein. Mit "Majoranten" f von P gilt jedoch eine derartige Eliminierbarkeit; sie ergibt sich als Korollar der folgenden Sätze:
1. Die Klasse E der (i.S. von Kalmár) elementaren Funktionen entsteht aus einer endlichen Teilklasse E_o durch Abschluß mit Einsetzungen.
2. f sei Majorante von P, d.h. zu jedem g aus P existiere ein K mit
$\bigwedge x_1 \ldots x_n : g(x_1, \ldots, x_n) \leq f(k, x_1 + \ldots + x_n)$.
Dann gilt: Zu jedem g aus P existiert ein h aus E_o und ein k mit $g = \lambda x_1 \ldots x_n h(x_1, \ldots, x_n, f(k, x_1 + \ldots + x_n))$.

P. LORENZEN: Konstruktive Grundlagen der klassischen Analysis.
Die Problematik der naiven (Cantor'schen) Mengenlehre und der aus ihr durch Formalisierungen entstandenen axiomatischen "Mengenlehren" legt die Frage nahe, ob für die klassischen Resultate der Analysis z.B. für den heutzutage in den ersten Semestern gelehrten Stoff, der naive Mengenbegriff - oder seine Verwendung als axiomatischer Grundbegriff - entbehrlich ist. Es werden - unter Hinweis auf ein demnächst erscheinendes Lehrbuch - alle Stellen aufgezählt, an denen eine Modifikation erforderlich ist, wenn der naive Mengen-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

begriff durch den folgenden kritischen Mengenbegriff ersetzt wird: Mengen entstehen nur durch Abstraktion aus (äquivalenten) Formeln einer zu konstruierenden Sprache. Als Konstruktionsmittel werden induktive Definitionsschemata und die logischen Partikel gebraucht. – Es wurde angedeutet, daß sich diese "konstruktive" Analysis in einer "Zwei-Typen-Theorie" formalisieren läßt, die wie der Name sagt nur 2 Typen unterscheidet, außerdem aber prädikativ und damit nachweisbar widerspruchsfrei ist.

G.H. MÜLLER: Algebraische Konstruktionen von Nicht-Standard-Modellen der Zahlentheorie.

Es seien I eine Indexmenge, $M_i, i \in I$ Modelle einer Theorie T (formalisiert im Prädikatenkalkül erster Stufe), $\prod_{i \in I} M_i$ die übliche Produktbildung, F ein Primfilter (Ultrafilter) aus der Boole'schen Algebra der Teilmengen von I und $(\prod M_i)_F$ der Bereich der Äquivalenzklassen von $\prod M_i$ bzg. des Filters F. Der Hauptsatz, daß eine Formel ϕ aus T in $(\prod M_i)_F$ genau dann gilt, wenn $\{i \mid \phi \text{ gilt in } M_i\} \in F$ ist, wird vereinfacht bewiesen. Mittels des Hauptsatzes ergibt sich ein Beweis des Vollständigkeitssatzes der Prädikatenlogik. Nimmt man statt der M_i ein Modell N der Zahlentheorie erster Stufe, dann liefert die Bildung von $(N^N)_F$ nach einigen Verallgemeinerungen des Hauptsatzes (insbesondere für beliebige Nicht-Hauptfilter) jedenfalls alle abzählbaren Nicht-Standard-Modelle, darüberhinaus natürlich noch weitere.

A. OBERSCHELP: Ein Schema der Klassenlogik.

Es wird eine axiomatische Mengenlehre G* angegeben. Diese ist eine Theorie mit Standardformalisierung und den Prädikaten ε, M. In G* gilt das Extensionalitätsaxiom $\bigwedge z(z \varepsilon x \longleftrightarrow z \varepsilon y) \longleftrightarrow x = y$, d.h. jedes Objekt von G* ist Klasse. Gewisse Klassen sind als Mengen ausgezeichnet.

Die Klassenbildung wird durch ein Komprehensionsschema geregelt: $\bigvee y \bigwedge x\ (x \varepsilon y \longleftrightarrow H)$ sei Axiom von G*, wenn H einer gewissen Bedingung genügt. Diese Bedingung ist natürlich das Wesentliche am System G*. Sie ist aber wenig restriktiv, so daß die üblicherweise gewünschten Komprehensionen möglich sind. Insbesondere können die Boole'schen Operationen und die Begriffe der Relationentheorie eingeführt werden. Dabei gilt $\bigwedge x\ (x \varepsilon V)$, d.h. jedes Objekt ist Element (und die Allklasse besteht nicht nur aus Mengen).

Die Mengenbildungsaxiome sind die von Zermelo und Fraenkel. U.A. sind Axiome von G*: $M(\{x,y\})$, $M(x) \longrightarrow M(\bigcup x)$, $M(x) \longrightarrow M(P(x))$,

$M(x) \longrightarrow M(x \cap y)$. Aus dem Paarmengenaxiom ergibt sich $\bigvee y(M(y) \wedge x \varepsilon y)$, d.h. jedes Objekt ist sogar Element einer Menge. Auch die (wie üblich definierten) geordneten Paare beliebiger Objekte sind Mengen. - G* ist relativ widerspruchsfrei zu dem System von Zermelo-Fraenkel mit unendlich vielen Urelementen.

K. SCHÜTTE: Zum Vollständigkeitsbeweis der Prädikatenlogik.
Zum Beweis der semantischen Vollständigkeit eines formalen Systems Σ der klassischen Prädikatenlogik werden jeder Formelfolge $\Gamma : G_1, G_2, \ldots$ gewisse Deduktionsfäden konstruktiv so zugeordnet, daß folgendes gilt:
1. Ist jeder Deduktionsfaden von Γ endlich, so gibt es eine natürliche Zahl m, so daß die Formel $G_1 \vee \ldots \vee G_m$ in Σ herleitbar ist. (m ist die maximale Länge der Deduktionsfäden von Γ).
2. Hat Γ einen unendlichen Deduktionsfaden, so wird hierdurch eine Wertung definiert, bei der jede Formel von Γ falsch ist.

Hiermit ergibt sich der Vollständigkeitssatz: Jede in Σ widerspruchsfreie Formelmenge ist erfüllbar. - Dieses Beweisverfahren läßt sich auf ein formales System der Prädikatenlogik mit Identität ausdehnen.

K. SCHÜTTE: Prädikative Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit der transfiniten Induktion.
Eine Hierarchie kritischer Ordinalzahlen sei in folgender Weise induktiv definiert:
Die 0-kritischen Zahlen sind die ε-Zahlen. φ_γ sei die Wohlordnungsfunktion der γ-kritischen Zahlen. Eine Ordinalzahl α heißt γ-kritisch ($\gamma > 0$), wenn $\varphi_\mu(\alpha) = \alpha$ für alle $\mu < \gamma$ gilt. Eine Ordinalzahl α heißt "stark kritisch", wenn sie α-kritisch ist. K_0 sei die kleinste stark kritische Ordinalzahl. - Eine Ordnungsrelation $\prec$ natürlicher Zahlen läßt sich primitiv-rekursiv so definieren, daß folgendes gilt:
1. Mit imprädikativen Mitteln ist $\prec$ als Wohlordnungsrelation nachweisbar. 2. Bezüglich $\prec$ wird K_0 durch die Zahl 5^2 repräsentiert.
3. Für jede natürliche Zahl $z \prec 5^2_2$ ist die transfinite $\prec$-Induktion bis z mit prädikativen Mitteln beweisbar. - Außerdem läßt sich beweisen, daß es keine Wohlordnungsrelation vom Ordnungstyp $\geq K_0$ gibt, die im formalen System der verzweigten Typenlogik (mit unendlicher Induktion) als Wohlordnungsrelation nachweisbar ist. Hiermit ergibt sich K_0 als eine Grenze für prädikative Beweisbarkeit.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H. LEWITZ: Remarks on Takeuti's Ordinal Diagrams.

Let n be a fixed positive integer. Takeuti (Journal Math.Soc. Japan, Vol. 9, No.4, 1957) has defined a system of formal objects which he calls O(n). In addition he defines n+1 order relations on O(n) which he proves to be wellorderings. We give a classical description of the ordinals which correspond to the diagrams in O(1) under the order relation $<_1$.

Define $\{f_i(x)\}_{i \leq \omega}$ as follows: $f_0(x) = \omega^x$; f_i wellorders the set of all numbers which are fixed points for f_j for all $j < i$. Then the order type of O(1) with respect to the relation $<_1$ is $f_\omega(0)$. The ordinal diagram $(1, a, \alpha)$ denotes the ordinal $g_a(\bar{\alpha})$ where $\bar{\alpha}$ is the ordinal represented by α; and $g_i(x) = f_i(x+1)$ when $x = c + r$ with $f_i(c) = c$ and $0 \leq r < \omega$; $g_i(x) = f_i(x)$ otherwise.

K. LORENZ: Übersicht über die dialogisch einführbaren Partikel.

Für jede Aussage A ist ein Dialog erklärt, der nach endlich vielen Schritten zum Gewinn oder Verlust von A für den Proponenten (P) bzw. den Opponenten (O) führt. Die Dialogregel besteht aus zwei Teilen, einem Rahmen, der festlegt, daß Aussagen genau einmal angegriffen und gegen solche Angriffe verteidigt werden können, wobei Angriffe jederzeit, Verteidigungen spätestens dann, wenn keine Angriffsmöglichkeiten mehr zur Verfügung stehen, gesetzt werden können, bzw. müssen, und einem Schema, das festlegt, was alles Angriffe und Verteidigungen sein sollen. Wer nach der Regel nicht mehr setzen kann, hat verloren, der andere gewonnen. Aussagen heißen daher dialogdefinit. Hat P bzw. O eine Gewinnstrategie für bzw. gegen A so heißt A (inhaltlich) wahr bzw. falsch.

Aussagen A heißen logisch zusammengesetzt aus einer Klasse von "Teilaussagen", wenn im zugehörigen Schema für A nur Aussagen dieser Klasse und jede davon genau einmal vorkommt. Nicht angreifbare Aufforderungen zur Verteidigung von A sind ebenfalls gestattet. Es gibt 8 verschiedene Schemata für 1- und 2-stellige Verknüpfungen, die Junktoren -und-, -oder-, -falls-, -dann-, nicht-sondern-, -aber nicht-, weder-noch-, nicht-, und 3 Schemata für unendliche Verknüpfungen, die Quantoren 'für alle', 'für manche', 'für kein'.

Nennt man 2 Aussagen dialogäquivalent, wenn sie in einem Dialog ohne Einfluß auf die Gewinnstrategien gegenseitig ersetzbar sind, so lassen sich sämtliche (auch n-stellige) Verknüpfungen durch nicht, und, oder, dann, für alle, für manche dialogäquivalent ausdrücken. Diese 6 Partikel sind voneinander unabhängig und bilden daher eine primitive Dialogbasis, im wesentlichen auch die einzige.

G.H. Müller (Heidelberg)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft