Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Tagungsbericht

Grundlagen der Geometrie
2o. bis 24. April 1964

Seit den "Grundlagen der Geometrie" vor einigen Jahren zum ersten Male eine eigene Oberwolfacher Tagung gewidmet wurde, findet alljährlich im Frühjahr ein solches Kolloquium auf dem Lorenzenhof statt. Die diesjährige Tagung stand unter der Leitung der Professoren Dr. F. BACHMANN (Kiel), Dr. E. SPERNER (Hamburg) und Dr.T.A. SPRINGER (Utrecht). Sie vereinigte 32 Mathematiker aus Frankreich, Italien, Jugoslawien, den Niederlanden, Ungarn und Deutschland.

Frankreich:	STEINBERG, Prof.Dr.R., Paris
Italien:	BARLOTTI, Dr. A., Florenz
	DICUONZO, Dr.V., Rom
	ZAPPA, Prof.Dr.G., Florenz
Jugoslawien:	PAVLOVIC, S.V., Belgrad
Niederlande:	van DALEN, Dr. D., Utrecht
	FREUDENTHAL, Prof.Dr.H., Utrecht
	SCHELLEKENS, Dr.G.J., Utrecht
	SPRINGER, Prof.Dr.T.A., Utrecht
Ungarn:	STROMMER, Prof.Dr.J., Budapest
Deutschland:	ARNOLD, Dr.H.J., Hamburg
	BACHMANN, Prof.Dr.F., Kiel
	BENZ, Dr.W., Frankfurt a.M.
	DEMBOWSKI, Dr.P., Frankfurt a.M.
	DILLER, Dr.J., Kiel
	DRESS, Dr.A., Kiel
	EWALD, Dr.G., Mainz
	FLADT, Prof.Dr.K., Calw
	GÖTZKY, M., Kiel
	HERING, Dr.Ch., Frankfurt a.M.
	JOUSSEN, Dr.J., Hamburg
	KARZEL, Prof.Dr.H., Hamburg
	LENZ, Prof.Dr.H., München
	LINGENBERG, Prof.Dr.R., Darmstadt
	LÜNEBURG, Dr.H., Frankfurt a.M.
	MÄURER, Dr., Frankfurt a.M.

MATHIAK, K., Hamburg
KINDER, H., Kiel
PEJAS, Dr. W., Kiel
SCHÜTTE, Prof.Dr.K., Kiel
SPERNER, Prof.Dr.E., Hamburg
WOLFF, Dr.H., Kiel

Im Laufe der fünf Tage, die die Tagung dauerte, wurden 23 Vorträge gehalten, auf die weiter unten im einzelnen eingegangen wird. Die Themen waren zu mannigfaltig, um sie einem Hauptthema unterordnen zu können. Die meisten Vortragenden gaben Ergebnisse von Untersuchungen solcher algebraischer Strukturen an, die sich geometrischen Strukturen zuordnen lassen. Den Vorträgen schlossen sich meist lebhafte Diskussionen an, die auf Spaziergängen und in den verschiedenen Räumen des Hauses oft bis spät in die Nacht hinein fortgesetzt wurden. Dabei bewährten sich einmal mehr die guten Kontaktmöglichkeiten, die durch die gemeinsame Unterbringung aller Teilnehmer unter einem Dach gegeben waren, und die ausgiebig ausgenutzt wurden.

Im einzelnen wurden die folgenden Vorträge gehalten:

ARNOLD, H.J.: <u>Über die Fernräume schwach affiner Räume</u>.

Um affin geometrische Aussagen in schwach affinen Räumen in ihrer Tragweite besser durchschauen zu können, werden den Spernerschen affinen Räumen $\mathfrak{A}$ Fernräume $\tilde{f}(\mathfrak{A})$ zugeordnet. So gelingt es insbesondere mit schwachen affin-geometrischen Aussagen in $\mathfrak{A}$ a l l e projektiven Räume $\tilde{f}$ mit dim $\tilde{f} \geq 2$ als Fernräume aufzubauen. - Unter Beschränkung auf schwach affine Räume, deren Fernräume halbprojektiv sind, wird diskutiert, wie sich Homogenitätseigenschaften in $\mathfrak{A}$ im Fernraum wiederspiegeln. Hierbei ergeben sich Beziehungen zu den Ewaldschen n-Gefügen.

BARLOTTI, A.: <u>Einige Fragen über verallgemeinerte affine Räume im Sinne von Sperner</u>.

Für endliche schwach affine Räume, A, im Sinne von Sperner wird ein Dimensionsbegriff eingeführt. Freilich setzt diese Definition eine gewisse Dimensions-Regularität bei Räumen A voraus. Daß diese D-Regularität noch nicht aus der Endlichkeit folgt, zeigt ein Beispiel von Herrn Arnold.

Es werden dann zwei Charaktere definiert, die geeignet sind, die Räume A nach der Mannigfaltigkeit ihrer Unterräume zu klassifizie-

ren. Es werden mit Hilfe dieser Charaktere notwendige Bedingungen für die Vollständigkeit von A angegeben.

DEMBOWSKI, P.: <u>Endliche Möbiusebenen</u>.

Bericht über die folgenden neuen Ergebnisse über endliche Möbiusebenen:

Sei $\mathfrak{M}$ eine endliche Möbiusebene der Ordnung n.

<u>Satz 1</u>. $\mathfrak{M}$ ist ovoidal (d.h. isomorph dem System der Punkte und ebenen Schnitte einer Eifläche) genau dann, wenn es eine Orthogonalität in $\mathfrak{M}$ gibt.

<u>Satz 2</u>. (Folgerung) n gerade $\Rightarrow$ $\mathfrak{M}$ ovoidal.

<u>Satz 3</u>. $\mathfrak{M}$ miquelsch $\Leftrightarrow$ jeder Kreis von $\mathfrak{M}$ ist Achse einer Inversion (Kreisspiegelung).

<u>Satz 4</u>. n gerade und $\exists$ zweifach transitive Gruppe von Kreisverwandtschaften von $\mathfrak{M}$ $\Rightarrow$ entweder miquelsch oder ovoidal vom Suzuki-Tits-Typ.

DICUONZO, V.: <u>Über die Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff</u>.

Es wird ein Axiomsystem gegeben, um eine absolute Geometrie des dreidimensionalen Raumes aus dem Spiegelungsbegriff zu begründen, in der nicht nur die euklidische und die klassischen nicht-euklidischen Geometrien des Raumes enthalten sind, sondern auch die "vierte Geometrie" des dreidimensionalen Raumes enthalten ist. Als "vierte Geometrie" bezeichnet man die Geometrie, die man erhält, wenn man in einem dreidimensionalen projektiven Raum eine Quadrik mit hyperbolischen Punkten als absolutes Gebilde zugrunde legt. Aus den Axiomen schließt man, daß eine Bewegung als Produkt von höchstens sechs Ebenenspiegelungen darstellbar ist.

DILLER, J.: <u>Der Durchschnittssatz für metrische Ebenen mit ineinander beweglichen Geraden</u>.

Die metrischen Ebenen mit Drehpunkt sind die zugehörigen Teilebenen von projektiv-metrischen Ebenen $\mathfrak{P}$(K,f) über pythagoreischem Körper K mit Formkoeffizienten (1,1,K), die den Punkt K(0,0,1) enthalten. Eine solche Ebene $\mathfrak{E}$ ist Durchschnitt derjenigen ihrer konvexen Hüllen $\overline{\mathfrak{E}}$ in $\mathfrak{P}$(K,f), die selbst metrische Ebenen sind, sofern $\mathfrak{E}$ einer gewissen Zusatzbedingung genügt, die stets erfüllt ist, wenn alle Geraden in $\mathfrak{E}$ ineinander beweglich sind.
Nach Grenzdörffer ist bei fester Anordnung die Hülle $\overline{\mathfrak{E}}$ von $\mathfrak{E}$ genau dann metrisch, wenn alle Cosinus von Strecken aus $\mathfrak{E} > \frac{1}{2}$ sind.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Unter unseren Voraussetzungen lassen sich die bei allen solchen Anordnungen positiven Elemente von K einfach beschreiben. Ferner liegt jeder Punkt des erwähnten Durchschnitts total zwischen zwei Drehpunkten von $\mathfrak{g}$, was mit dem Lemma von Pejas über Schrankenmengen gezeigt wird. Mit diesen Sätzen läßt sich nun der Durchschnittssatz beweisen.

DRESS, A.: <u>Lotschnittebenen mit halbierbarem rechten Winkel</u>.

Es werden metrische Ebenen im Sinne von F. Bachmann betrachtet, die dem folgenden Zusatzaxiom genügen:
Lotschnittaxiom: Je zwei auf zueinander senkrechten Geraden errichtete Lote besitzen einen Schnittpunkt.
Offenbar genügen die euklidischen Ebenen diesem Axiom, und man kann weitere Ebenen dieser Art mit Hilfe des Homomorphieprinzips erhalten, ferner dann durch Bilden der Vereinigung aufsteigender Ketten solcher Ebenen und durch Durchschnittsbildung.
Es läßt sich zeigen, daß man auf diese Weise alle dem Lotschnittaxiom genügenden metrischen Ebenen erhält, in denen darüberhinaus ein halbierbarer rechter Winkel existiert.

EWALD, G.: <u>Erweiterungen projektiv-geometrischer Verbände</u>.

Die projektiven Geometrien lassen sich bekanntlich identifizieren mit den vollständigen, atomaren, komplementären, $\cap$-stetigen und modularen Verbänden. Wir nennen diese kurz projektiv-geometrische Verbände. Sei V ein solcher Verband und sei V Teilverband eines Verbandes S(V), der ebenfalls vollständig, atomar, abschnittskomplementär und $\cap$-stetig, aber nicht notwendig modular ist. S(V) sei jedoch "V-Modular", d.h. die Nachbarsätze sollen für Elemente gelten, von denen mindestens eines über einem Element $\neq 0$ von V liegt. Jedes Element von S(V) sei Schnitt zweier Elemente der letztgenannten Art, ferner sei S(V) irreduzibel. Man erhält dann folgende Geometrien: 1. Verallgemeinerte ebene Gewebe. 2. projektive Gefüge. 3. In projektive Räume mindestens dritter Dimension einbettbare Strukturen. - Mit Hilfe dieser Geometrien werden die Verbände S(V) gekennzeichnet.

FREUDENTHAL, H.: <u>Die Titsschen Geometrien</u>.

Bericht über Tits' Resultate. Skizze der Beweise und Auswertungsmethoden.

HERING, Chr.: <u>Eine Bemerkung über Kollineationsgruppen von projektiven Ebenen</u>.

Der folgende Satz wurde bewiesen:

Sei $\underline{P}$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung q mit $q \equiv 3(4)$ und S eine 2-Gruppe von Kollineationen von $\underline{P}$. Dann ist S entweder zyklisch, eine (gewöhnliche oder verallgemeinerte) Quaternionengruppe, eine Diedergruppe (bzw. auch eine elementar abelsche Gruppe der Ordnung 4) oder eine Semidiedergruppe (d.i. eine Gruppe mit den Relationen $a^{2^n} = b^2 = 1$, $bab = a^{-1+2^{n-1}}$).

JOUßEN, J.: <u>Über die Fortsetzbarkeit von Anordnungen bei freier Erweiterung</u>.

Gegenstand des Vortrags ist der bemerkenswerte Satz, daß sich jede Anordnung einer regulären, halb-projektiven Inzidenzstruktur J zu einer Anordnung der "ersten Oberstruktur" $\overline{J}$ von J fortsetzen läßt. Dieser Satz ist von entscheidender Bedeutung für die Konstruierbarkeit von Anordnungen in einer freien Ebene. Sein Beweis gelingt auf dem Umweg über eine "begleitende Inzidenzstruktur" J(K), die man aus J durch "freie Adjunktion" einer Geraden- bzw. Punktmenge K erhält (die Mächtigkeit des zu wählenden K richtet sich nach der gegebenen Anordnung von J). Es werden spezielle Anordnungen von J(K) konstruiert, die die gegebene Anordnung der Inzidenzstruktur J fortsetzen, und zu der gesuchten Anordnung von $\overline{J}$ gelangt man dann auf dem Wege

$$J \xrightarrow{\text{Fortsetzung}} J(K) \xrightarrow{\text{Fortsetzung}} \overline{J(K)} \xrightarrow{\text{Restriktion}} \overline{J},$$

wobei sich in $\overline{J(K)}$ im allgemeinen Falle nur "Fastordnungen" ergeben, deren Restriktionen auf $\overline{J}$ aber volle Anordnungen sind.

KARZEL, H.: <u>Über normale Fastkörper mit kommutativer Inzidenzgruppe</u>.

Unlängst konnte ich beweisen: Ist (F,K) ein normaler Fastkörper (d.i. ein Fastkörper F, der einen Teilschiefkörper K enthält, so daß gilt: 1. $(\alpha+\beta)c = \alpha c + \beta c$ für alle $\alpha, \beta \in K$ und alle $c \in F$, 2. $K^* \lhd F^*$) mit $3 \leq [F:K] < \infty$, so ist seine Inzidenzgruppe F^*/K^* genau dann kommutativ, wenn F kommutativ ist. Dieser Satz zeigt, daß man die Vermutung von M.Hall, daß jede unendliche zyklische Ebene nicht desarguessch ist, algebraisch formulieren kann: Ist L/K eine algebraische Körpererweiterung vom Range 3, so ist die Faktorgruppe L^*/K^* nicht die unendliche zyklische Gruppe. Diese letzte Aussage hat Herr Brandis - wie er mir mitteilte - gemeinsam mit den Herren M.Kneser und Würges bewiesen.

Mein Satz ist nicht mehr richtig, wenn man nur $[F:K] \geq 2$ voraussetzt. Von den endlichen Fastkörpern gibt es genau zwei Gegenbeispiele. Für unendliche Fastkörper gilt: Ist $[F:K] = 2$ und K^* im Zentrum von F^*, so ist F^*/K^* genau dann kommutativ, wenn F kommutativ ist.

KINDER, H.: Über absolute Geometrie:

Die Bewegungen eines nichtelliptischen n-dimensionalen absoluten Raumes ($n \geq 3$) sollen eine Gruppe bilden und die Hyperebenenspiegelungen ein invariantes Erzeugendensystem γ aus involutorischen Elementen a,b,c,... . Für $k = 3,4,\dots,n+1$ wird der allgemeine Satz von den k Spiegelungen gefordert, ferner $\gamma^{n+1} \nsubseteq \gamma^{n-1}$ und $\gamma^{n+2} \subseteq \gamma^{n}$. Die Relationen $a_1 \dots a_m \subseteq \gamma^{m-2}$ bilden dann in γ eine "Äquivalenzenfolge", wie sie hier 1963 von Frau Wanda Smielew, Warschau, definiert wurde. Der Begriff der Äquivalenzenfolge läßt sich verbandstheoretisch wie auch durch Abhängigkeitsräume charakterisieren. Setzt man noch die Gültigkeit eines Satzes über Orthogonalität und zweier Sätze über Büschel K(a,b) ($a \neq b$) und Bündel K(a,b,c) ($abc \notin \gamma$) voraus, dann wird der Verband der "Äquivalenzklassen" $K(a_1,\dots,a_m) \lneq \{x \mid a_1 \dots a_m x \in \gamma^{m-1}\}$ ($a_1 \dots a_m \notin \gamma^{m-2}$) nach Erweiterung um geeignete Atome isomorph zum Teilraumverband einer n-dimensionalen projektiven Geometrie.

LINGENBERG, R.: Absolute Geometrie der Ebene.

Sei $(\mathcal{G}, \gamma)$ eine erzeugte Gruppe, welche folgendem Axiomensystem genügt:

Axiom S. Aus $x,y,z \in G$ für ein Büschel G folgt $xyz \in \gamma$.

Axiom EB. Es gibt ein eigentliches Büschel, welches nicht Lotkern ist.

Axiom D^*. Es gibt $u_1,u_2,u_3 \in \gamma$, so daß $u_i u_K u_l$ für verschiedene Permutatuonen i,K,l von 1,2,3 verschieden sind.

Dabei ist ein Büschel $G(\alpha)$ eine Menge $\{x \mid x \in \gamma$ und αx inv.$\}$ für $\alpha = ab \neq 1$ und $a,b \in \gamma$. Ein Büschel G heißt eigentlich, wenn $G \cap H \neq \emptyset$ für alle Büschel H gilt. Ein Büschel G heißt Lotkern, wenn $xy = yx$ für alle $x,y \in G$ gilt.

$(\mathcal{G}, \gamma)$ läßt sich eine Gruppenebene $\mathfrak{E}$ zuordnen, deren Punkte die Büschel und deren Geraden die Elemente von γ sind. Zwei Geraden a,b heißen senkrecht, wenn ab inv. ist. Man kann zeigen, daß $\mathfrak{E}$ in eine PAPPUSsche Ebene $\widetilde{\Pi}$ einbettbar ist, und daß sich die Metrik von $\mathfrak{E}$, welche durch das Senkrechtstehen in $\mathfrak{E}$ gegeben ist, zu einer projektiven Metrik von $\widetilde{\Pi}$ fortsetzen läßt. Die Gruppe $\mathcal{G}/\mathfrak{z}$ ($\mathfrak{z}$ = Zentrum von $\mathcal{G}$) ist isomorph einer Untergruppe einer orthogonalen Gruppe.

MÄURER, H.: Ein spiegelungsgeometrischer Aufbau der Laguerregeometrie.

Der Vortrag hat sich in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil wurden jene Laguerregeometrien angegeben, die vom Axiomensystem des zweiten Teils erfaßt werden. Vom Blaschkemodell der reellen Laguerregeometrie ausgehend, wurde die "orthogonale Laguerregeometrie OL(f,V)" definiert.

Wir haben drei Klassen involutorischer Zykelverwandtschaften untersucht und an Hand des Modells der isotropen Ebene die Gruppe Σ aller Zykelverwandtschaften und die Untergruppen H und L bestimmt.
Im zweiten Teil wurde die Laguerre'sche Gruppe L gekennzeichnet. Ausserdem wurde angedeutet, wie die orthogonale Laguerregeometrie OL(F,V) in der Gruppe L dargestellt werden kann.

MATHIAK, K.: Beweis eines Satzes von Hughes über Homomorphismen projektiver Ebenen.

Über Homomorphismen projektiver Ebenen gilt der folgende Satz: Ein Homomorphismus ist eineindeutig, wenn es einen Punkt A und eine mit A inzidierende Gerade g gibt, auf der nur endlich viele Punkte liegen, die dasselbe Bild wie A haben. Dieser Satz wurde von Hughes algebraisch bewiesen. Es wird ein kurzer rein geometrischer Beweis angegeben.

PAVLOVIC, S.V.: Gewebe und Quasimodul.

Ein (m,n)-Gewebe ist ein Gewebe mit m ausgezeichneten Punkten und n ausgezeichneten Richtungen.
Es werden solche Gewebe durch einen Spernerschen Quasimodul definiert. Einem (1,2)-Gewebe wird eine algebraische Struktur sogen. Gewebequasimodul, von der Art des Quasimoduls zugeordnet. Es werden fünf charakteristische Eigenschaften dieses Gewebequasimoduls angegeben. Die Bedeutung eines assoziativen Gesetzes, welches in kommutativen Quasimodul mit der Ternärzerfallsbedingung äquivalent ist, wird im Gewebequasimodul diskutiert.

SCHELLEKENS, G.J.: Geometries of type D_n.

An incidence-geometry I is said to be of type G, where G denotes a complex semisimple Lie algebra, if it admits a diagram representation (in the sense of Tits) in which the diagram of I is identical to the root diagram of G, while the root diagrams of $A_1 \times A_1$, A_2, B_2, G_2 correspond to a generalized biangle (direct sum), a generalized triangle (projective plane), a generalized quadrangle, a generalized hexagon, respectively.
Polar geometries (orthogonal geometry in characteristic $\neq 2$, symplectic geometry, unitary geometry) are of type B_2. An axiomatization has been given by Veldkamp. This does not cover the characteristic 2 cases. Proper orthogonal geometry (orthogonal geometry of a quadratic form of index = $\frac{1}{2}$ dimension linear space) is of type D_n. It will be shown that the converse also holds true, independent of the characteristic, thus complementing Veldkamp's result.

SCHÜTTE, K.: <u>Zentralkorrelationen und der Satz von Pappos</u>.

Eine Korrelation K einer projektiven Ebene heiße eine "Zentralkorrelation mit Zentrum Z und Achse a", wenn $Z^K = a$, $a^K = Z$ und $P \in a \longrightarrow P \in P^K$ gilt. (Dann ist $Z \neq a$, $P \in P^K \longleftrightarrow P \in a$ und $g^K \in g \longleftrightarrow Z \in g$.) Nach R.Baer ist der Satz von Pappos äquivalent mit einer Transitivitätseigenschaft der Menge der Zentralkorrelationen. Für die affine Ebene (mit uneigentlicher Geraden a) ergibt sich diese Transitivität der Zentralkorrelationen konstruktiv aus dem Satz von dem antiparallelen Viereck. Der affine Satz von Pappos ist ein Spezialfall des Vierecksatzes und zugleich mit dem allgemeinen Satz von den antiparallelen Vierecken äquivalent. In einer affinen Pappos-Ebene läßt sich in invarianter Weise eine schiefsymmetrische Bilinearform definieren, deren Werte Zentralkorrelationen sind.

SPRINGER, T.A.: <u>Verschränkte Kompositionsalgebren</u>.

Es sei l eine kubische Galoiserweiterung des kommutativen Körpers h, σ sei eine Erzeugende der Galoisgruppe. Ein Paar (C,N), wo C ein Vektorraum ist über l und N eine quadratische Form auf C mit nichtentarteter Bilinearform (x,y), heißt eine <u>verschränkte Kompositionsalgebra</u>, wenn es auf C ein Produkt $x*y$ gibt mit folgenden Eigenschaften: (a) $x*y$ ist σ-linear in x und σ^2-linear in y; (b) $N(x*y) = \sigma N(x) . \sigma^2 N(y)$, (c) $(x*y,z) = (y*z,x)$. Beispiel: es sei C_o eine Kompositionsalgebra über K, es sei $C = C_o \otimes_k l$; σ läßt sich fortsetzen auf C und man definiere $x*y = \overline{(\sigma x)}\ \overline{(\sigma^2 y)}$. Ein solches C heiße <u>reduziert</u>.

<u>Satz</u> C reduziert $\Longleftrightarrow$ es gibt $x \neq 0$ in C so daß $x*x = \lambda x$ ($\lambda \in \ell$)

$\Longleftrightarrow$ es gibt $x \neq 0$ in C mit $(x,x*x) = 0$.

Die verschränkten Kompositionsalgebren treten auf, wenn man Kollineationen in Moufangebenen untersucht, die Ordnung 3 haben. C ist dann 8-dimensional über l. Die Frage, ob C reduziert ist, hängt zusammen mit der Frage, ob eine solche Kollineation Fixpunkte hat.

STEINBERG, R.: <u>Some characterizations of finite reflection groups</u>.

Finite groups generated by reflections (in hyperplanes) occur naturally in geometry in connection with regular figures such as polygons, polyhedra, etc. They also are related to the structure of the continuous groups of geometry (the Lie groups). Because of the latter connection the differential equations which are invariant under finite reflection groups are of some importance. In terms of the solutions of these equations we present here a number of characterisations of such groups. One such is as follows. Let G be a finite group (of automorphisms of a real or complex space) and let Σ be the space of all polynomials

that are annihilated by all differential operators which have constant coefficients, are homogenous of positive degree, and are invariant under G. Then G is generated by reflections if and only if there exists a polynomial P such that Σ is the space obtained by applying to P all differential operators with constant coefficients.

STROMMER, J.: Konstruktionen in der hyperbolischen Ebene allein mit dem Zirkel.

Es wird gezeigt, daß alle Konstruktionsaufgaben der hyperbolischen ebenen Geometrie, die mit Zirkel und Lineal lösbar sind, allein mit dem Zirkel ausgeführt werden können.

WOLFF, H.: Zur Axiomatik der absoluten Geometrie.

Es wird gezeigt, daß das folgende gegenständliche (d.h. die geometrischen Gegenstände selbst und nicht z.B. die Bewegungsgruppen axiomatisierende) und elementare (d.h. weder übernatürliche Zahlen noch über Mengen quantifizierende) Axiomensystem ein Axiomensystem der absoluten Geometrie in der Allgemeinheit von F.Bachmann ist: Gegeben sei eine nichtleere Menge $M = \{a,b,c,\dots\}$ und eine Äquivalenzrelation zwischen Paaren von Elementen von M (geschrieben als ab = cd), die den folgenden Axiomen genügt. Interpretation: Geraden, Spiegelungsgleichung $\sigma_a \sigma_b = \sigma_c \sigma_d$:

1. Aus ax = yb folgt ay = xb.
2. Aus $a_1a_2 = a_3a_4$ und $a_ig = gb_i$ für $i = 1,\dots,4$ folgt $b_1b_2 = b_3b_4$.
3. Aus xa = ay, yb = bz, x'a' = a'y', y'b' = b'z', ab = a'b', x = x' folgt z = z'
4. Zu a,g gibt es stets ein b mit ag = gb.
5. Ist aa' = bb' = cc' und $a \neq a'$, so gibt es ein d mit ab = cd.
6. Zu a,b,c,d mit ab = ba gibt es stets x,y,z mit ab = xy, cd = xz.
7. Zu jedem g gibt es a,b mit ag = ga, bg = gb, $ab \neq ba$.

ZAPPA, G.: Plans projectifs de quasi-translation et quasi-partitions des groupes.

Si G est un groupe et S un sous-groupe de G, on appelle S-partition de G un ensemble Θ de sous-groupes de G tels que tout élément $x \in G$, $x \notin S$ est dans un et un seule des complexes $ST_i (T_i \in \Theta)$. Les S-partitions des groupes jouent un rôle important dans l'étude des espaces demiprojectifs dans lesquelles le groupe des collineations qui fixent une droite quelconque est transitif sur les points de cette droite. En particulier, avec les S-partitions on peut caracté-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

riser des espaces affins affaiblis qui généralisent les plans projectifs de la classe III de Lenz. On retrouve aussi, avec quelque simplification, les résultats de R. Lingenberg (Arch.Math. 1962) sur les plans projectifs de la classe III-2 de Lenz-Barlotti.

Martin Götzky (Kiel)