Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Arbeitsgemeinschaft über stochastische Prozesse
27.4. bis 1.5.1964.

Die Leitung der Arbeitsgemeinschaft hatte Herr Krickeberg (Heidelberg). Weiter nahmen teil: Fräulein S. Becken (Hamburg) und die Herren W. Böge (Hamburg), A. Dold (Heidelberg) W. Hildenbrand (Heidelberg), K. Jacobs (Göttingen), W. Jehne (Heidelberg), K. Krickeberg (Heidelberg), R. Leis (Aachen), H. Leptin (Hamburg), G. Neubauer (Heidelberg), G. Pachale (Berlin), W. Schwarz (Freiburg), B. Volkmann (Mainz), W. v. Waldenfels (Jülich).

Gegenstand der Arbeitsgemeinschaft war der Begriff des stochastischen Prozesses als Maß in einem Raum von Funktionen, der Raum aller dieser Maße, seine kompakten Mengen und Anwendungen auf die Konvergenz spezieller Folgen stochastischer Prozesse. (Invarianzprinzip [1] und [7] und Konvergenzsätze von Skorochod über Verteilungen Markoffscher Ketten [11].

Es wurden die folgenden Vorträge gehalten:

G. Pachale: <u>Elementare Theorie der Maße in vollständig regulären topologischen Räumen</u>.

Allgemeine Erweiterungstheorie eines auf einem Vektorverband $\mathcal{X} \subset R^{\Omega}$ definierten linearen positiven σ-(bzw. τ-) stetigen Funktionals $\mathfrak{I}$. Nach Einführung der Funktionen $u \in \mathfrak{U}_\sigma$ ($u \in \mathfrak{U}_\tau$) und $v \in \mathfrak{V}_\sigma$ ($v \in \mathfrak{V}_\tau$) als Limites von wachsenden bzw. fallenden Folgen (Netzen) aus $\mathcal{X}$ und Fortsetzung von $\mathfrak{I}$ auf $\mathfrak{U}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{V}_\sigma$ ($\mathfrak{U}_\tau$ bzw. $\mathfrak{V}_\tau$) werden in bekannter Weise obere und untere Funktionale eingeführt und mit ihrer Hilfe der $\mathcal{X}$ umfassende Vektorraum $\mathcal{L}_1^\sigma$ ($\mathcal{L}_1^\tau$) der integrierbaren Funktionen gewonnen, auf welchem $\mathfrak{I}$ zu $\sigma\mathfrak{I}$ ($\tau\mathfrak{I}$) fortgesetzt ist.

Die allgemeine Erweiterungstheorie wird auf den Fall $\mathcal{X} = \mathcal{C}(X)$ (Vektorverband der stetigen und beschränkten Funktionen, definiert auf einem vollständig regulären topologischen Raum X) angewendet. Es werden die (Regularitäts)-Eigenschaften der zu der Fortsetzung $\sigma\mathfrak{I}$ ($\tau\mathfrak{I}$) gehörigen Mengenfunktion, definiert auf den Baireschen (Borelschen) Mengen, gezeigt.

G. Neubauer: Straffe Maße.
Es werden Kriterien für die τ-Stetigkeit (bzw. Straffheit) eines σ-stetigen positiven Funktionals $\mathfrak{I}$ (definiert auf $\mathcal{C}(\mathcal{X})$) gegeben, die im wesentlichen eine Additionsbedingung (bzw. eine Regularitätsbedingung bezüglich kompakter Mengen) für die zu $\mathfrak{I}$ gehörige Mengenfunktion sind. Dabei heißt ein Funktional straff, wenn es auf der Einheitskugel in $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ stetig ist bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\mathcal{X}$. Ist $\mathcal{X}$ ein polnischer (metrisierbar, vollständig, separabel) Raum, so ist jedes σ-stetige Funktional auf $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ auch τ-stetig und straff.

H. Leptin: Schwach kompakte Mengen von Maßen.
Schwache Kompaktheit der Einheitskugel im dualen Raum E' des Banachraumes E. Zusammenhänge zwischen gleichmäßiger Straffheit (gleichmäßiger σ-bzw. τ-Stetigkeit) und relativer Kompaktheit (bezüglich der schwachen Topologie) in $\mathcal{C}(x)'$ werden gezeigt. Es wird ein Kriterium angegeben für die schwache Kompaktheit einer Menge von $\mathcal{C}(x)'$ im Fallle $\mathcal{X} = \mathcal{C}[0,1]$.

W. Schwarz: Konstruktion von Maßen.
Ein auf einem punktetrennenden Vektorverband $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(\mathcal{X})$ definiertes straffes Funktional läßt sich eindeutig zu einem straffen Funktional auf $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ fortsetzen. Der Satz wird angewandt, um eine straffe Mengenfunktion, definiert auf einem Ring, zu einer straffen Mengenfunktion, definiert auf den Borel'schen Mengen von $\mathcal{X}$, fortzusetzen.

S. Becken: Das Wienersche Maß.
Satz von Kolmogorov. Einführung der stochastischen Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen. Es werden straffe Funktionale auf $\mathcal{C}(\mathcal{C}[0,1])$ ($\mathcal{C}[0,1]$ versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz) aus den endlichdimensionalen Randverteilungen konstruiert. Als Anwendung erhält man, daß das Wienersche Maß auf $\mathcal{C}(\mathcal{C}[0,1])$ straff ist.

B. Volkmann: Die Kolmogorovsche und die Bernsteinsche Ungleichung.
Beweis der Ungleichungen von Tschebyschev und Kolmogorov. Ferner die Ungleichung von Bernstein in folgender Form:
falls $|x_k - Ex_k| \leq K$ und $\sum_{k=1}^{m} V x_k = D^2$, gilt für jedes $\eta > 0$:

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$P\{|s_m| \geq \eta\} \leq \begin{cases} 2\, e^{-\eta^2 4,5D} & \text{falls } \eta < \frac{D^2}{K} \\ 2\, e^{-} & \text{falls } \eta \geq \frac{D^2}{K} \end{cases}$$

$\left(s_m = \sum_{k=1}^{m} (x_k - Ex_k)\right)$.

W.v.Waldenfels: Das Invarianzprinzip.

Für jedes n=1,2,... seien $x_{n,1},\ldots,x_{n,k_n}$ unabhängige zufällige Variable mit Erwartungswert Null und

$$\sum_{k=1}^{k_n} Ex_{n,k}^2 = 1 .$$

$y_n(\omega) \in \mathcal{C}[0,1]$ bezeichne den Streckenzug mit den Ecken $\left(\sum_{i=1}^{k_n} Ex_{n,i}^2(\omega), \sum_{i=1}^{k_n} x_{n,i}(\omega)\right)$ und $y_n(\omega)(0)=0$. P_n sei die Verteilung von y_n in $\mathcal{C}[0,1]$. Es gilt der Satz (Invarianzprinzip): Die Lindebergbedingung $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x_{n,k}|>\varepsilon} x_{n,k}^2\, dP = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Verteilungen P_n schwach gegen das Wienersche Maß konvergieren und $\lim_{n\to\infty} P\{x_{n,k} > \varepsilon\} = o$ gleichmäßig in k für jedes $\varepsilon > 0$.

W. Böge: Die skorochodsche Topologie.

Im Raum D der reellen Funktionen auf $[0,1]$, die überall rechts- und linksseitige Limites besitzen, wird eine Metrik eingeführt, die analog zur Frechet-Metrik bei stetigen Kurven ist. Es wird analog dem Satz von Ascoli ein Kompaktheitskriterium bewiesen.

A. Dold: Konstruktion Markovscher Prozesse.

Sei $x(\omega,t)$ ein Markov-Prozeß, $(t \in [0,1], \omega \in \Omega, (\Omega, \mathcal{S}, P))$. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten des Prozesses gelte: (*) zu jedem $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß $P\{|x(\omega,t+h) - x(\omega,t)| > \eta \mid x(\omega,t) = \alpha\} < \varepsilon$ für alle α, t und h mit $0 < h < \delta$.

Satz: Unter der Voraussetzung (*) sind die Realisierungen $x(\omega,.)$ des Prozesses fast sicher im Raum D (Vortrag Böge), haben also (fast sicher) keine anderen Unstetigkeiten als Sprünge. Der Prozeß definiert also ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_x in D. Ist allgemeiner $\{x\}_{x \in \mathcal{H}}$ eine Familie von Markov-Prozessen und besteht die Beziehung (*) gleichmäßig in $\mathcal{H}$, dann ist die Menge der Maße

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$\{\mu_x\}_{x \in \mathcal{H}}$ relativ schwach kompakt.

K. Krickeberg: Grenzwertsätze über Markovsche Prozesse.
Überblick über die Theorie der schwachen Konvergenz von Verteilungen der aus Markovschen Ketten gewonnen Markovschen Prozesse mit stückweise konstanten Trajektorien gegen Verteilungen allgemeiner Markovscher Prozesse, Referat über Kap. 3 und 6 von A.V.Skorochod, Untersuchungen über die Theorie der stochastischen Prozesse, Kiev 1961. Die schwache Konvergenz ist die von Maßen im Raum $D[0,1]$ der reellen Funktionen in $[0,1]$ ohne Unstetigkeitsstellen zweiter Art, die Markovschen Prozesse, deren Verteilungen als Grenzverteilungen auftreten, werden als Lösungen stochastischer Differentialgleichungen beschrieben. Die Konvergenzbeweise beruhen, ein wenig von Skorochod abweichend, auf der von Prochorov für das Invarianzprinzip benutzten Methode; schwache (rel.) Kompaktheit und Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen ergibt schwache Konvergenz.

Literatur

[1] M.D.Donsker, An invariance principle for certain probability limit theorem.
in: Four papers on probability, Memoirs Am.Math.Soc. 6(1951)

[2] W.Hildenbrand, Dissertation Heidelberg 1964.

[3] A.N.Kolmogorov, Über die Skorochodsche Konvergenz.
Téor.ver.prim. 1(1956),239-247, (russ., auch in engl.Übers.)

[4] K.Krickeberg, Wahrscheinlichkeitstheorie.
Stuttgart 1963.

[5] Maße in topologischen Räumen. Seminarausarb.Heidelberg 1963.

[6] L.H.Loomis, Abstract harmonic analysis. Princeton 1953.

[7] J.V.Prochorov, Konvergenz stochastischer Prozesse und Grenzwertsätze in der Wahrscheinlichkeitstheorie.
Teor.ver.prim. 1(1956), 177-238 (russ., auch in engl.Übers.)

[8] J.V.Prochorov, The method of characteristic functionals.
Proc.Fourth Berkeley Symposium on Math.Statist.and Probability 1960, Vol.2, p.403-419, Berkeley 1961.

[9] A.Rényi, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1962.

[10] A.V.Skorochod, Grenzwertsätze für stochastische Prozesse.
Teor.ver.prim. 1(1956),289-319 (russ., auch in engl.Übers.)

[11] A.V.Skorochod, Untersuchungen über die Theorie der stochastischen Prozesse.
Kiev 1961 (russ.)

[12] V.S.Varadarajan, Maße in topologischen Räumen.
Mat.Sbornik 55 (97) Nr.2 (1961) (russ.).

W. Hildenbrand (Heidelberg)