Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Die Geometrie der Gruppen und die Gruppen der Geometrie unter besonderer Berücksichtigung endlicher Strukturen.

18. bis 23. Mai 1964

Auf der diesjährigen Tagung wurde wieder der starke Zusammenhang zwischen geometrischen und gruppentheoretischen Fragen deutlich. Sehr erfreulich war, daß in früheren Tagungen offengebliebene Fragen inzwischen geklärt werden konnten. So berichtete zum Beispiel Herr A.Brandis über die Lösung eines Problems, das H.Karzel auf der Tagung "Endliche Strukturen" (4.-8.6.63) gestellt hatte; D.G.Higman konnte inzwischen ein Problem lösen, das Chr.Hering auf der gleichen Tagung im letzten Jahr in einem Diskussionsbeitrag aufgeworfen hatte, und H.Lenz berichtete über die Lösung einer Frage, die in der Tagung "Grundlagen der Geometrie" (19.-25.4.64) offen geblieben war. Durch die vielfältigen Anregungen entspann sich eine rege Diskussion, die immer wieder in kleineren und größeren Gruppen aufgenommen wurde.

Anwesend waren (nach Ländern geordnet):

D. Gorenstein (Worcester, Mass.); D.G. Higman, J. Mclaughlin (beide Ann Arbor, Mich.); M. Suzuki (Urbana, Ill.); F. Buekenhout (Delbeek, Belgien); P.J. Lorimer (Montreal, Canada); R. Baer (Frankfurt a.M.); S. Becken (Hamburg); A. Brandis (Tübingen); P. Dembowski, B. Fischer, D. Held, H. Heineken, Chr. Hering (alle Frankfurt a.M.); G. Kalmbach (Göttingen); H. Karzel (Hamburg); H. Lenz (München); R. Lingenberg (Darmstadt); H. Lüneburg (Mainz); A.J. Munkholm (Aarhus, z.Zt. Gießen); J. Tits (Bonn); A. Barlotti (Florenz); M.V.D. Burmester (Rom); D.R. Hughes (London, z.Zt.Rom); J. Cofman (Novi Sad, Jugoslawien).

Es folgen die Auszüge der 18 gehaltenen Vorträge.

S. BECKEN: Spinornorm in unitären Gruppen.

D sei ein Schiefkörper mit Involution ς ; V ein n-dimensionaler D-Links-Vektorraum mit einer nicht ausgearteten, bezüglich ς schiefhermiteschen Form. Die unitäre Gruppe U von V wird von Spiegelungen erzeugt, und die Relationen der Länge $\leqslant 4$ zwischen den Spiegelungen definieren bereits die unitäre Gruppe. Es sei γ die von den Invarianten bei ς erzeugte Untergruppe der Multiplikationsgruppe D^* von D und Δ die Kommutatorgruppe von D. Aus der Gestalt der Relationen sieht man, daß man die Zuordnung $S \longrightarrow \sigma\gamma\Delta$, wenn die Spiegelung S durch $x \longrightarrow x - (x,s)\sigma^{-1}s$ mit $s \in V$, $\sigma \in D^*$ und $\sigma - \sigma^{\varsigma} = (s,s)$ definiert ist, zu einem Homomorphismus von U in $D^*/\gamma\Delta$ fortsetzen kann. Wenn die Form die 0 nicht trivial darstellt, ist der Kern dabei die Kommutatorgruppe von U. Man hat arithmetische Anwendungen, wenn D ein Quaternionenschiefkörper mit einem algebraischen Zahlkörper als Zentrum ist.

A. BRANDIS: Über die multiplikative Struktur einer Körpererweiterung.

Es wird der folgende Satz bewiesen:
Sei K ein unendlicher Körper, L eine Erweiterung von K, $L \neq K$, dann ist L^x/K^x nicht endlich erzeugbar. (L^x sei die multiplikative Gruppe von L).
Hieraus folgt nach H.Karzel die Nichtexistenz von zyklischen unendlichen desarguesschen projektiven Ebenen.

F. BUEKENHOUT: Etude intrinsèque des ovales.

On entreprend une étude générale des ovales basée sur la notion d'involution, indépendamment de tout plongement préalable dans un plan projectif. Nous appelons ovale, tout ensemble fini muni d'une famille "doublement transitive exactement" de permutations involutives. Cette définition est obtenue par abstraction, à partir de la notion classique d'ovale plongé dans un plan projectif, notion à laquelle nous reservons l'expression "ovale projectif" et qui se trouve ainsi généralisée de manière probablement non triviale. On montre notamment que les involutions d'un ovale engendrent un groupe triplement transitif opérant transitivement sur une famille de sous-ovales isomorphes à une conique d'un plan de Galois.

M.V.D. BURMESTER und D.R. HUGHES: On the solvability of autotopism groups.

Using the Feit-Thompson Theorem, it is shown that if a finite division ring has odd dimension over at least one of its semi-nuclei,

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

then the autotopism group of the division ring is solvable. Also it is shown that a quasi-field with odd dimension over its Kern has a solvable autotopism group. But while the first result, on division rings, may be true without the restriction of dimension, the second is definitely false in the even dimension case, counter examples being given by the Hall systems, for instance.

J. COFMAN: On homologies in finite projective planes.

A. Wagner proved the theorem:

Th.1: Let $\mathbb{P}$ be a finite projective plane and π a collineation group of $\mathbb{P}$, such that:

1. for every point $A \in \mathbb{P}$ there exists an element $\lambda \in \pi$ such that λ is a nontrivial homology with centre A,
2. for every line $l \in \mathbb{P}$ there exists an element $\mu \in \pi$ such that μ is a nontrivial homology with axis l,
3. does not fix any element of $\mathbb{P}$

then $\mathbb{P}$ is desarguesian and π contains the little projective group of $\mathbb{P}$ such as a subgroup.

Here a generalization of Theorem 1 is proved.

Th.2: Postulating only 1. and 3. of Theorem 1, the conclusions of Theorem 1 follow.

P. DEMBOWSKI: Endliche Möbiusebenen.

Eine Möbiusebene ist eine Inzidenzstruktur M von "Punkten" und "Kreisen" derart, daß für jeden Punkt P das System M_P der von P verschiedenen Punkte und der Kreise durch P eine affine Ebene ist. Die bekannten endlichen Möbiusebenen lassen sich sämtlich durch Punkte und ebene Schnitte von Eiflächen in 3-dimensionalen projektiven Räumen darstellen, und im Falle gerader Ordnung kann es auch keine anderen geben. Die einzigen bekannten endlichen Eiflächen sind die konvexen Quadriken und die Suzuki-Tits-Ovoide. Es wurden einige Kennzeichnungen der zugehörigen Möbiusebenen angegeben.

B. FISCHER: Endliche Gruppen, die zweifach transitiv auf einer Klasse konjugierter Elemente operieren.

Operiert eine Gruppe zweifach transitiv auf einer Klasse D konjugierter Elemente, so gibt es eine Gruppe F, so daß F zu allen Gruppen $\{x,y\}/Z(\{x,y\})$ für $x \neq y$ aus D isomorph ist.

Seien G und F endliche Gruppen, D ein normaler Komplex von G mit $G = \{D\}$ und $F \simeq \{x,y\}/Z(\{x,y\})$, für alle $x \neq y$ aus D.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Dann ist entweder $F = 1$ oder F ist eine Frobeniusgruppe und F' eine p-Gruppe.
G ist auflösbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: (1) $F = 1$; (2) $p = 2$; (3) F' ist zyklisch; (4) Sind M und N verschiedene maximale Teilmengen von D, die auflösbare Untergruppen von G erzeugen, so haben M und N höchstens ein Element gemeinsam.

D. GORENSTEIN: Finite Groups in which Sylow 2-subgroups are Abelian and Centralizers of Involutions are Solvable.

We prove the following result: Theorem A. The only simple finite groups in which a Sylow 2-subgroup is abelian and the centralizer of each involution is solvable are the groups PSL(2,q), where $q \geq 4$ and either $q \equiv 3,5 \pmod 8$ or $q = 2^n$. The proof is based upon an application of the main results of a previous paper with J.H. Walter, which in turn generalizes the results of Chapter IV of Feit and Thompson's proof of the solvability of groups of odd order. That paper was developed primarily for application to the problem of the classification of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, but it was hoped that the results would find applicability to some other classification problems. The present paper justifies this hope. If G is a minimal counterexample to Theorem A, the results of that paper imply that G possesses a proper subgroup M of even order which contains the centralizer of each of its involutions and has certain additional properties. A contradiction is then reached from these conditions by an arithmetic argument involving a count of the involutions of G.

Ch. HERING: Eine Klasse von zweifach transitiven Permutationsgruppen.

Sei G eine zweifach transitive Permutationsgruppe vom Grad $n+1 > 2$ mit der Eigenschaft, daß für je drei paarweise verschiedene Symbole A, B und C stets $|G_{A,B,C}| \equiv 1 \pmod 2$ und $|G_{A,B}| \equiv 0 \pmod 2$ ist.
Dann sind die 2-Sylowgruppen von G entweder Diedergruppen oder Semidiedergruppen. Daraus folgt: Entweder enthält G einen Normalteiler N mit $N \approx PSL(2,r)$ für eine geeignete Zahl r, oder es ist $n \equiv 1 \pmod 8$. Der Beweis benutzt wesentlich Ergebnisse von GORENSTEIN und WALTER (The classification of finite groups with dihidral Sylow-2-subgroups, erscheint im Journal of Algebra).

D.G. HIGMAN: Permutationsgruppen vom Rang 3.

Unter dem Rang einer transitiven Permutationsgruppe G auf einer Menge Ω verstehen wir die Anzahl der Bahnen des Stabilisators G_a eines Punktes $a \in \Omega$. Die Längen dieser Bahnen nennen wir die Untergrade von G.

Sei G eine transitive Permutationsgruppe des Ranges 3 und sei $\{a\}$, $\Delta(a)$, $\Gamma(a)$ die Bahnen von G_a, $\Delta(a)^g = \Delta(a^g)$, $\Gamma(a)^g = \Gamma(a^g)$ für alle $a \in \Omega$, $g \in G$. Die Durchschnittzahlen λ, μ von G sind durch $|\Delta(a) \cap \Delta(b)| = \begin{cases} \lambda \text{ für } a \in \Delta(b) \\ \mu \text{ für } a \in \Gamma(b) \end{cases}$ definiert.

Satz. Ist G imprimitiv des Rangs 3 und gerader Ordnung, und hat G eine Primzahl p als Untergrad, $p = |\Delta(a)|$, dann haben wir einen der folgenden drei Fälle:

I. G hat einen regulären Normalteiler

II. Der Grad von G ist 1o und $G \cong A_5$ oder S_5

III. $\lambda = 0$, $\mu = 1$ und der minimale Normalteiler M von G ist eine einfache Gruppe des Rangs 3 mit der Eigenschaft, daß $M_a/\Delta(a)$ nicht auflösbar und daher zweifach transitiv ist.

Im Fall III ist $p = \alpha y - \mu + 3$, wo α und y positive ganze Zahlen sind, derart, daß (i) $\mu \mid \alpha y+2$ und $\alpha \equiv 0 \ (2)$ genau dann wenn $\alpha y+2/\mu \equiv 0 \ (2)$, und $y^2 - 4\alpha y - (\mu - 2)(\mu - 6) = 0$.

Zur Zeit haben wir kein Beispiel für Fall III. Die kleinste Möglichkeit ist $\mu = 2$, p=37, n=7o4.

D.R. HUGHES: Extensions of t-designs.

Suppose G^t is a t-transitive collineation group of the t-design π^t, and G^0 is the subgroup fixing t points. Then if G^0 contains an S-subgroup B which fixes all the points of some block (and no other points), it is shown that if G^t has a transitive extension G^{t+1}, then the quasi-extension of π^t induced by G^{t+1} is in fact an extension. As a trivial corollary, it is shown that any collineation group of a finite projective space (of dimension 2) which contains the unimodular group has no transitive extension, except for the well-known exceptions; this generalizes an old theorem of Zassenhaus.

H. KARZEL: Zum Beweis einer Vermutung von M. Hall über unendliche zyklische Ebenen.

Mit Hilfe eines Satzes von Herrn Brandis (über den Herr Brandis auf dieser Tagung berichten wird) läßt sich der folgende Satz beweisen:

Satz 1. Es sei Π ein desarguesscher projektiver Raum mit $1 < \dim \Pi < \infty$. Ist G eine kommutative Kollineationsgruppe, die genau einfach transitiv auf den Punkten von Π operiert und besitzt G ein undliches Erzeugendensystem, so ist G eine endliche zyklische Gruppe.

Aus Satz 1 folgt die Gültigkeit der Hallschen Vermutung:

Satz 2. Jede unendliche zyklische Ebene ist nicht desarguessch.

H. LENZ: Bericht über einige Ergebnisse von Cassels und Pfister über quadratische Formen.

Herr T.A. Springer stellte auf der Tagung über Grundlagen der Geometrie die Frage, ob die Ordnung eines Elements der Wittschen Klasse stets ∞ oder eine Zweierpotenz sei. Herrn Pfister gelang in einem anschließenden Briefwechsel der Beweis der bejahenden Antwort. Dieser wurde im Rahmen einer Gesamtdarstellung der Pfisterschen Resultate vorgetragen.

P.J. LORIMER: A Characterisation of the Groups of Moebius Transformations.

If a group G contains a subgroup H and

(i) If $a \notin H$, $bab^{-1} \notin H$ and $a^2 \neq 1$, then there exists exactly one $h \in H$ such that $hah^{-1} = bab^{-1}$

(ii) If $a \notin H$, $bab^{-1} \notin H$ and $a^2 = 1$, then there exist exactly two $h_1, h_2 \in H$ such that $h_1ah_1^{-1} = h_2ah_2^{-1} = bab^{-1}$; then G is said to have the property T_2 with respect to the subgroup H. (H.W.E. Schwerdtfeger).

Theorem. If G has the property T_2 with respect to the subgroup H, G-H contains an involution, and H is not a normal subgroup of G, then G is a group of Moebius transformations over a field of characteristic $\neq 2$.

Notes: I The result holds for infinite groups

II An analogous result holds for fields of characteristic $= 2$.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H. LÜNEBURG: Affine Räume mit scharf fahnentransitiver Kollineationsgruppe.

Herr Dembowski (Math.Ann.149) bewies, daß ein endlicher projektiver Raum S über GF(q) genau dann eine auf den inzidenten Punktgeradenpaaren scharf transitive Kollineationsgruppe besitzt, wenn S entweder die projektive Ebene über GF(2) oder über GF(8) ist.
Stellt man die entsprechende Frage für affine Räume, so lautet die Antwort folgendermaßen:
Ist A ein affiner Raum der Dimension d über GF(q), so besitzt A genau dann eine auf den inzidenten Punkt-Geradenpaaren scharf transitive Kollineationsgruppe, wenn $(d,q-1) = 1$ ist.
Ferner gilt: Ist P eine endliche Parallelstruktur und besitzt P eine auf den inzidenten Punkt-Geradenpaaren scharf transitive Kollineationsgruppe, so ist P ein affiner Raum. Ob P im Falle der Dimension 2 desarguessch ist, ist unbekannt.

J.E.McLAUGHLIN: Subgroups of $PSL_n(q)$ generated by elations.

Let $\mathbb{P}$ be a finite desarguesian projective space of dimension $d \geq 2$ and suppose G is a subgroup of Aut $(\mathbb{P})$ such that
(1) G is generated by elations,
(2) G fixes no linear subvariety of $\mathbb{P}$,
(3) Each point of $\mathbb{P}$ is the center of an elation in G; then either $G=T(\mathbb{P})$ or $G=T_\delta(\mathbb{P})$ where δ is a null polarity on $\mathbb{P}$.

M. SUZUKI: A characterization of $LF(3,2^n)$.

In the group $LF(3,2^n)$ there is one class of involutions for which the centralizers contain normal Sylow subgroups. It is shown here that this property plus the following two conditions characterises $LF(3,2^n)$ for $n > 1$ among simple groups:
(1) there is a non-trivial intersection of Sylow 2-groups, and
(2) the center of a Sylow 2-group is not cyclic.

J. TITS: Generalized polygons.
A set of points, with distinguished subsets, called lines, is a generalized n-gon (gng) if it contains no (n-1)-gon and if two flags (incident point-line pairs) belong to at least one sub-n-gon. For example, the g3g are exactly the projective planes. The gng have closed connections with the so-called BN-pairs with dihedral groups as Weyl groups. This communication is a survey of known and a few new results on gng, especially for $n > 3$. Among the treated

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

topics are: existence of "free" gng for all n; theorem of Feit-Higman on the non-existence of finite gng with at least three points on each line and at least three lines through each point, except for n = 2, 3, 4, 6, 8; determination of all gng with two points on each line; construction of a g4g from an arbitrarily given ovoid, which g4g is homogeneous if and only if the ovoid is a hyperquadric; characterisation of certain known g4g or g6g; construction of a class of g6g associated to the pairs (k,D) where k is a field and D any division k-algebra all of whose elements generate either k or a cubic extension of k; description of a class of g8g.

H. Heineken
Frankfurt a.M.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft