Math. Forschungsinstitut Oberwolfach
E 20 /0 1043

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Funktionalanalytische Methoden in der numerischen Mathematik

14. bis 19. 6.1964.

Die Leitung der Tagung hatten die Herren Professor Dr.Dr.h.c. L. COLLATZ (Hamburg) und Professor Dr.Ing. H. UNGER (Bonn).

Durch die verschiedenen Belange und Fragestellungen in der Numerischen Mathematik sind funktionalanalytische Methoden entwickelt worden, die sich in den Anwendungen als äußerst fruchtbar erwiesen haben. Es ist gelungen, sehr verschiedenartige Problemkreise auf ihren jeweiligen Ursprung zurückzuführen und die zugrundeliegenden Strukturen aufzudecken. Gleichzeitig ergaben sich neben Existenzaussagen für Lösungen von Operatorgleichungen in abstrakten Räumen auch exakte und numerisch brauchbare Fehlerabschätzungen für Näherungslösungen. Man konnte nicht nur bekannte Ergebnisse einordnen, sondern erreichte auch neue, weitreichende Möglichkeiten, die genannten Problemkreise zu behandeln.

Diese Situation spiegelte sich auf der Tagung wider. In den Vorträgen kamen sehr verschiedene Zweige der Numerischen Mathematik zur Sprache. Hauptsächlich handelten sie von Operatorgleichungen, Eigenwertaufgaben und Approximationstheorie. Dabei standen Operatoren mit monotoner Inversen, Fixpunktmethoden, Defektabschätzungen sowie Differenzenverfahren im Vordergrund, während auch andere Gebiete, wie z.B. Wahrscheinlichkeitsrechnung, zur Sprache kamen. Die Probleme wurden durchweg in theoretischer und praktischer Hinsicht eingehend behandelt und diskutiert. Vielfach bildeten physikalische Anwendungen den Ausgangspunkt der Überlegungen. Im Hintergrund zeigte sich die große Wichtigkeit der elektronischen Rechenanlagen für die heutige Angewandte Mathematik.

Die Tagung gab somit in Ausschnitten einen Überblick über die neuere Entwicklung der Numerischen Mathematik, die sich ebenso wie die übrige Mathematik in augenfälliger Weise durch den Einzug abstrakter Methoden gewandelt hat.

An der Tagung nahmen die folgenden Damen und Herren teil:

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

ALBRECHT, J., Hamburg	KRAFFT, O., Münster
ANSORGE, R., Clausthal	MEINARDUS, G., Clausthal
BAZLEY, N., Genf	MEISTER, E., Saarbrücken
BEHLENDORFF, Erika, München	MORGENSTERN, D., Freiburg i.Br.
BÖRSCH-SUPAN, W., Mainz	ORTIZ, E.L., London
BOHL, E., Hamburg	OSTROWSKI, A., Basel
BREDENDIEK, Elsbeth, Bonn	RHEINBOLDT, W., Maryland
BUTZER, P.L., Aachen	ROZSA, P., Budapest
CHENEY, E.W., Los Angeles	SCHÄFKE, F.W., Köln
COLLATZ, L., Hamburg	SCHELLHAAS, Darmstadt
DEJON, B., Darmstadt	SCHMIDT, J., Dresden
DESCLOUX, J., Lausanne	SCHRÖDER, G., Bonn
EHRMANN, H., Clausthal	SCHRÖDER, J., Köln
FALK, S., Braunschweig	SCHWEDT, D., Köln
FOX, D.W., Silver Spring	STETTER, H.J., München
GERLACH, E.H., Saarbrücken	STÖHR, A., Berlin
GOEL, J.J., Lausanne	STOER, J., München
GUDERLEY, K.G., z.Zt. Genf	TÖRNIG, W., Clausthal
HÄMMERLIN, Freiburg i.Br.	UNGER, H., Bonn
HEINRICH, H., Dresden	VELTE, V., Freiburg i.Br.
HENZE, D., Bonn	WEINITSCHKE, H., Hamburg
KÖNIG, H., Köln	WERNER, H., Münster
KRABS, W., Hamburg	WETTERLING, W., Hamburg.

Es wurden die folgenden Vorträge gehalten:

SCHRÖDER, J.: <u>Über inversmonotone Differentialoperatoren vierter Ordnung</u>.

Auszug: Es seien R und S halbgeordnete lineare Räume, und M bedeute einen Operator, der R in S abbildet. M werde "inversisoton" genannt, falls aus $Mu \leqq Mv$ die Beziehung $u \leqq v$ folgt. Ausgehend von einem abstrakten Satz wird diese Eigenschaft für eine Klasse von gewöhnlichen linearen Differentialoperatoren M vierter Ordnung bei geeigneter Definition der Ordnungsrelation nachgewiesen. Beim Beweis wird davon Gebrauch gemacht, daß sich die betrachteten Differentialoperatoren M in der Form $M = AB - C$ mit inversisotonen Differentialoperatoren A,B zweiter Ordnung und isotonem Operator C darstellen lassen.

WERNER, H.: <u>Lokale Eigenschaften des rationalen Tschebyscheff-Operators</u>.

Die Funktion $f(x) \in C[a,b]$ werde normal genannt, wenn der Defekt

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

$d_{1,r}\left[T_{1,r}[f]\right]$ Null ist. In Weiterführung einiger Untersuchungen von Maehly-Witzgall (1960) und Cheney-Loeb (1963) über das Stetigkeitsverhalten der T-Approximierenden wird gezeigt, daß die Abbildung $T_{1,r}[f]$ des Raumes $C[a,b]$ in sich an einer Stelle $f \in C[a,b]$ dann und nur dann stetig ist, wenn f normal ist oder f zur Klasse $\mathfrak{N}_{1,r}$ gehört. Diesem negativen Resultat steht die gleichmäßig für alle $f \in C[a,b]$ geltende Tatsache gegenüber, daß gleichmäßige Konvergenz einer Folge f_n gegen f die Maßkonvergenz der zugehörigen T-Approximierenden gegen die T-Approximation von f impliziert. (Zu den Bezeichnungen vergleiche man eine demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinende Arbeit).

SCHRÖDER, G.: Über einige Methoden zur Lösung von Operatorgleichungen in Banachräumen.

Der Vortrag befaßte sich mit einigen von M. Altman im Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences veröffentlichten Arbeiten, in denen die Lösung linearer und nichtlinearer Operatorgleichungen in Banachräumen auf die Lösung von nichtlinearen Funktionalgleichungen zurückgeführt wird. Die angegebenen Iterationsverfahren und Fehlerabschätzungen wurden näher untersucht. Dabei wurde gezeigt, daß die Voraussetzungen, unter denen M.Altman Aussagen über die quadratische Konvergenz dieser Verfahren gewinnt, i.a. nicht erfüllbar sind.

SCHÄFKE, F.W.: Lösungstypen von Differenzengleichungen.

In Verallgemeinerung von Überlegungen von Poincaré, Perron, Krenser und anderen über lineare homogene Differenzengleichungen wurden "Differenzengleichungen" $x_{n+1} = A_n x_n$ $(n=0,1,2,\dots)$ für Folgen von Elementen einer normierten abelschen Gruppe G bei gegebenen additiven Abbildungen A_n von G in sich untersucht. Relativ zu einer Aufspaltung von $G = G^1 \dotplus G^2$ als direkte Summe von Untergruppen wurde allein auf Grund gewisser einfacher geforderter Ungleichungen eine Unterscheidung zweier Lösungstypen erhalten

I: $|x_n^1| > \sigma_n |x_n^2|$ $(n \geqq m)$; II $|x_n^1| \leqq \sigma_n |x_n^2|$ $(n \geqq 0)$.

Es wurden bei geeigneten, recht allgemeinen Voraussetzungen zwei verschiedenartige konstruktive Beweise für die Existenz genügend vieler Lösungen vom Typ II gegeben. Danach bilden die Lösungen vom Typ II eine zu G^2 isomorphe Untergruppe L_{II} der Lösungsgruppe L. Diese läßt sich in $L = L^1 \dotplus L_{II}$ aufspalten, wo $L^1 \cong G^1$ ist.

Literatur: F.W. Schäfke: Lösungstypen von Differenzengleichungen und Summengleichungen in normierten abelschen Gruppen. Math. Zeitschrift (im Druck).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

WETTERLING, W.: Ein Abschätzungsverfahren für Gleichungen in halbgeordneten Räumen.

Bei Gleichungen Tu = s (u und s sind Elemente halbgeordneter linearer Räume) kann man leicht Schranken für eine Lösung u angeben, wenn die Abbildung T eine monotone Inverse hat, die Aufgabe also von monotoner Art ist. Dieses Abschätzungsprinzip kann auch bei anderen Aufgaben verwendet werden, wenn in der Charakterisierung der Aufgaben monotoner Art, etwa für lineare Abbildungen T, die spezielle Voraussetzung $Tv \geqq 0$ durch eine allgemeinere Voraussetzung $s_1 \leqq Tv \leqq s_2$ ersetzt wird. Es wurde ein Satz darüber angegeben, wann aus dieser Voraussetzung die Folgerung $v \geqq 0$ gezogen werden kann. Als Spezialfall wurde eine Randwertaufgabe bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung betrachtet. Bei nichtlinearen Problemen tritt eine jeweils nachzuprüfende Zusammenhangsbedingung auf.

SCHMIDT, J.: Startvektoren und Konvergenzbeschleunigung bei monotonen Iterationen.

Für monotone Iterationen bei linearen Systemen läßt sich ein Verfahren zur Ermittlung von Startvektoren angeben, falls der Spektralradius $\rho(|T|) < 1$ ist (T Matrix). Dazu geht man von dem Ansatz $x_o = \alpha z, y_o = \beta z$ ($z > 0$ fest) aus und hat die Zahlen α, β aus einem System von linearen Ungleichungen zu bestimmen.
Die Konvergenzbeschleunigung wird im Sinne des δ^2-Verfahrens von Aitken vorgenommen. Der Ansatz enthält zwei Parameter, die einem System von linearen Ungleichungen zu genügen haben. Dieses System stimmt bis auf Transformation mit dem vorherigen überein. Die Verbesserungen sind gleichzeitig Schranken für die Lösung.

OSTROWSKI, A.: Über einen Fixpunktsatz der Funktionalanalysis und seine Anwendung in der numerischen Mathematik.

Sei in einem vollständigen metrischen Raum B die Distanzfunktion $|a,b|$ definiert und in einem Punkt $z_o \in B$ die ρ-Umgebung K_ρ von z_o in B enthalten. F(z) sei in K_ρ definiert mit den Werten aus B und genüge einer Lipschitz-Bedingung: $|F(p), F(q)| \leqq m|p,q|$ $(p,q \in K_\rho)$ mit einem echten Bruch m. Für z_o gelte $|F(z_o), z_o| = \sigma$ und für eine Folge positiver $\varepsilon_o, \varepsilon_1, \ldots$ mit konvergenter Summe $\delta = \sum_{k=o}^{\infty} \varepsilon_k$ sei

$\sigma + 2\delta < (1-m)\cdot(\rho + \varepsilon_o)$.

Definiert man in B $u_1, u_2, \ldots$, so daß $|u_1, z_o| \leqq \varepsilon_o$, $|u_{v+1}, F(u_v)| \leq \varepsilon_v$ $(v \geqq 1)$, so liegen alle u_v in K_ρ und konvergieren gegen den einzigen Fixpunkt von F(z) in K_ρ.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

FOX, D.W.: Lower Bounds to Eigenvalues.

A method for the construction of a family of operators that yield lower bounds to the eigenvalues λ_i of a self-adjoint operator A in a separable Hilbert space H is given. The operator A is assumed to be bounded below and have an initial part of its spectrum discrete and of finite multiplicity. The method assumes that the quadratic form of A is decomposable into a part that corresponds to an operator A^o similar to A for which the spectral problem is solved and into a part of the form $(Bu,Bu)'$, where B is an operator from H to another Hilbert space H'. The constructed operators $A^{n,k}$ have the property that they are increasing with n and with k, have eigenvalues that satisfy $\lambda_i^o \leqq \lambda_i^{n,k} \leqq \lambda_i$, $i = 1,2,\dots,n$ and thus give lower bounds to eigenvalues of A that are higher than those of A^o. The spectralproblems for $A^{n,k}$ are shown to be equivalent to finite dimensional matrix eigenvalue problems. Two applications are given, one to a fourth order ordinary differential equation, the other to the problem of vibration of a square free plate.

EHRMANN, H.: Der Einschließungssatz von Collatz für die Eigenwerte linearer, vollstetiger Operatoren.

Gegeben sei ein linearer, vollstetiger Operator A eines (reellen oder komplexen) Hilbertraumes H in sich. Für A gelte der Entwicklungssatz (z.B. sei A ein normaler Operator), d.h. es existiert eine Folge von Eigenwerten λ_n und ein zugehöriges Orthonormalsystem φ_n, $\varphi_n = \lambda_n A \varphi_n$, von Eigenfunktionen und Nullösungen, $A\varphi_o = 0$, so daß ein beliebiges Element $v \in H$ dargestellt werden kann durch $v = \sum_n a_n \varphi_n$. Dann gilt der Satz: Die Gleichung $u - GAu = \theta$, $u \in H$, mit einem auf H definierten linearen Operator G hat nur die Nullösung, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

α) $\|(G-\mu)u\| < r$ für alle $u \in H$ mit $\|u\| = 1$, und im Kreise $|z-\mu| < r$ (μ fest) der komplexen Zahlenebene liegt kein Eigenwert von A.

ß) $\|(G-\mu)u\| > r$ für alle $u \in H$ mit $\|u\| = 1$, und $|z-\mu| > r$ enthält keinen Eigenwert von A.

Im Falle ß) kann auch $\|Gu\| = \infty$ für gewisse $u \in H$ zugelassen werden. Es wird gezeigt, daß der Beweis fast wörtlich gleich dem Beweis eines entsprechenden Satzes für selbstadjungierte Operatoren ist. (Math.Zeitschr.83 (1964)).

Mit $G = \dfrac{u_o}{Au_o}$ im Spezialfall des L^2 bzw. G = Diagonalmatrix mit

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

den Diagonalelementen $g_{ii} = \frac{u_i}{v_i}$, $u = (u_1,\ldots,u_n)$, $v=Au$ im R^n verallgemeinert der Satz die bekannten Einschließungssätze von Collatz. (Math.Zeitschr.47(1941) und 48(1942)).

ALBRECHT, J.: Iterationsverfahren zur Berechnung der Eigenwerte der Mathieu'schen Differentialgleichung".

Die Mathieu'sche Differentialgleichung besitzt bekanntlich vier verschiedene Typen periodischer Lösungen. Die Eigenwerte, die zu den Eigenfunktionen je einer dieser vier Klassen gehören, sind Fixpunkte gewisser antitoner Kettenbruchoperatoren; sie können - für genügend kleine Werte des in der Mathieu'schen Differentialgleichung vorkommenden Parameters - mit Hilfe eines Einschliessungssatzes iterativ berechnet werden. - Der Kettenbruchoperator wird dabei durch eine monoton fallende Folge antitoner Kettenbruchoperatoren und eine andere, monoton wachsende Folge antitoner Kettenbruchoperatoren eingeschlossen, für deren Fixpunkte - die ihrerseits monoton fallend bzw. monoton wachsend den betreffenden Eigenwert einschließen - mit Hilfe alternierender Iterationsfolgen obere bzw. untere Schranken berechnet werden.

BOHL, E.: Der Schaudersche Fixpunktsatz und Pseudometrische Räume.

In den letzten Jahren zeigte sich immer wieder die große Bedeutung des Schauderschen Fixpunktsatzes für die Angewandte Mathematik. Gleichzeitig wurde hauptsächlich von L. Collatz und J. Schröder die Theorie der Pseudometrischen Räume zu einem wichtigen Instrument der Numerischen Mathematik entwickelt. Es wurde gezeigt, daß ein wichtiger Teil der Anwendungen, der aus der Theorie der Pseudometrischen Räume folgt, auch schon in einfacher Weise mit dem Schauderschen Satz bewiesen werden kann. Dabei handelt es sich um die Ersetzung der pseudometrischen Struktur durch eine andere Struktur, welche die Anwendung des Schauderschen Satzes noch zuläßt, zum anderen aber viele wichtige Anwendungen noch umfaßt.

RHEINBOLDT, W.: Über den Vergleichsfaktor in Approximations-Problemen.

In a recent paper (Num.Math.5,1963,68) G. Auman introduced the idea of the comparison factor in approximation problems. Auman's observations are generalized and a theorem concerning the finiteness of the comparison factor is proven. These general results are shown to contain as special cases the well-known hypercircle inequality and A. Sard's theorem on factors of operators.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

CHENEY, E.W.: Applications of convexity in numerical mathematics.
Convex sets and convex functions frequently appear in numerical problems, especially in connection with Tchebycheff approximation, L^1-approximation, finite dimensional extremum problems, and infinite dimensional optimization problems as arise in control theory. Four recent applications of convexity will be discussed, as follows. (1) The characterization of best Tchebycheff approximations by generalized rational functions. (2) The existence problem for Tchebycheff approximation of nonlinear operators by linear ones. (3) The existence and characterization of solutions in a problem of optimal control. (4) The characterization of best nonlinear approximations in Banach space.

STOER, J.: Über eine von Fiedler und Ptak definierte Klasse von Normen.
Um den bekannten Gerschgorin'schen Einschließungssatz für die Eigenwerte von Matrizen zu verallgemeiners, definierten Fiedler und Ptak die Klasse der L-Normen $p(x)$ im C^n (im wesentlichen) durch die Forderung, daß
(i) die Operatorennorm $\mathrm{lub}(D) := \max \{ p(Dx) \mid p(x) \leq 1 \}$
jeder Blockdiagonalmatrix D höchstens gleich der größten Operatornorm der einzelnen Blöcke ist. Sie zeigten ferner, daß sämtliche Höldernormen L-Normen sind. Eine genauere Untersuchung der Forderung (i) führt nun zu Zerlegungssätzen für Normen, die einer solchen Bedingung genügen. Als Resultat findet man schließlich, daß zu den L-Normen im wesentlichen nur die Höldernormen gehören.

STETTER, H.J.: Konvergenz und Stabilität von Diskretisierungen nichtlinearer Funktionalgleichungen in Banach-Räumen.
Die Struktur der Diskretisierungsverfahren zur Lösung von nichtlinearen Funktionalgleichungen wird untersucht:
$Fy=0$, mit $F: E \longrightarrow E^o$ habe eine eindeutige Lösung y_o; die "Diskretisierung" besteht aus:
1) B-Räumen E_h und E_h^o, 2) linearen Operatoren $\Delta_h: E \longrightarrow E_h$ und $\Delta_h^o: E^o \longrightarrow E_h^o$, 3) Operatoren $\phi_h: E_h \longrightarrow E_h^o$, mit reellem Parameter $h \in (0,h_o]$. Der "Algorithmus" $\phi_h \eta = 0$ habe die Lösung $\eta(h)$. Durch $[\phi_h \Delta_h - \Delta_h^o F]y$ wird der "lokale Fehler" δ erklärt. Um auf die Kleinheit des "globalen Fehlers" $\varepsilon(h) := \eta(h) - \Delta_h y_o$ schließen zu können, benötigt man "Stabilität" der Diskretisierung: Sie ist im nichtlinearen Fall gegeben durch: (1) Stetigkeit von $\phi'(\zeta)$ bzgl. ζ, (2) gleichmäßiger Beschränktheit von $\phi'(\zeta)^{-1}$ bzgl. ζ für

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

$\| \zeta - \Delta_h y_0 \| \leq r$ und bez. $h \in (0, h_0]$. Der Grenzfall r=0 liefert "beschränkte Stabilität". Die Feinstruktur von ε ist durch eine "asymptotische Entwicklung" gegeben: $\varepsilon(h) = \Delta_h(\sum_{v<N} h^v e_v) + O(h^N)$. Dabei sind die e_v von h unabhängige Elemente aus E, wodurch die Möglichkeit zur Richardson-Extrapolation besteht.

BAZLEY, N.: Error Bounds for Expectation Values.
Consider a self-adjoint operator A, bounded below, in a Hilbert space H and assume that its initial spectrum consists of ordered eigenvalues $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ with corresponding normalized eigenfunctions $\psi_1, \psi_2 \ldots$. Let B be a second self-adjoint operator; our problem is to calculate the "expectation value" $(B\psi_i, \psi_i)$. We consider the case that $H = L^2(0,\infty)$, A is a singular Sturm-Liouville operator, and $B\varphi = b(x)\varphi(x)$. Our method requires upper and lower bounds to eigenvalues, together with norm estimates for the eigenfunction ψ_i. We first estimate $(B\psi_i, \psi_i)$ in terms of a trial vector and $\|B\psi_i\|$. We then bound $\|B\psi_i\|$ by the use of asymptotic estimates for ψ_i together with pointwise bounds for ψ_i. Our procedure gives zero error when the trial vector is choosen to be ψ_i itself.

DEJON, B.: Über die approximative Lösung von Funktionalgleichungen in normierten Vektorräumen.
Betrachtet wurde die Funktionalgeichung Gy = A, wo G eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Teilmenge D(G) des normierten Raumes B in den normierten Raum B_1 ist. Ein Näherungsverfahren zur Lösung von Gy = A bestehe in der Lösung von Gleichungen $\overline{G}_N \overline{y}_N = Q_N A$, $N = N_o$, $N_o + 1, \ldots$ Dabei bilde $\overline{G}_N$ einen Teilraum $\overline{B}_N$ von B umkehrbar eindeutig auf einen normierten Vektorraum $\overline{B}_{1,N}$ ab. Es wurden definiert die Begriffe der Konsistenz, der Stabilität und der Konvergenz und ihr Zusammenwirken untersucht. Abschließend erfolgte eine kurze Bemerkung über "Stabilität nach Lax-Richtmeyr" und "Stabilität nach Forsythe-Wasow".

MORGENSTERN, D.: 1. Das Weinitschke'sche Verfahren als kontrahierende Abbildung. 2. Methode des "steilsten Abstieges" mit stochastischer Richtungswahl.
1. Bei geeigneter Wahl des Grundraumes (als Produktraum) und der entsprechend erweiterten Abbildung erweist sich das Iterationsverfahren von H.J. Weinitschke (DMV-Tagung 1963 in Frankfurt a.M.) als kontrahierende Abbildung. Damit erkennt man leicht die Verallgemeinerungen des Weinitschkeschen Verfahrens auf höherstufige Iterationen. 2. Statt bei der Iteration $x_{n+1} = x_n + h_n y_n$ ($\|y_n\| = 1$) zur Lösung

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

der Gleichung $F(x) \overset{!}{=}$ Min, die y_n-Richtungen als Richtung kleinsten (größten) Gradientens von F an der Stelle x_n zu wählen, wird die Richtung stochastisch festgelegt (unabhängig für verschiedene n) und das h_n jeweils optimiert durch $F(x_n+h_n y_n) \overset{!}{=}$ Min; die Konvergenz des Verfahrens unter gewissen (naheliegenden) groben Bedingungen wird gezeigt; Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie "stochastischer Iterationen".

ORTIZ, E.L.: <u>On the solution of certain types of differential equations</u>.

Using continuity properties of potential type operators a weighted form of Sobolev Immersion theorem is derived. The use of this theorem in problems concerned with the solution of differential equations is considered.

MEISTER, E.: <u>Über ein unendliches Gleichungssystem aus der Theorie der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an einem Parallelplattengitter</u>.

Gegeben sei ein Gitter bestehend aus abzählbar unendlich vielen, parallelen, dünnen, metallischen Platten, die äquidistant angeordnet sind. Auf dieses Gitter falle eine ebene, zeitharmonische elektromagnetische Welle, die einen $\mathfrak{E}$ -Vektor parallel zu den Plattenkanten besitzt. Die Aufgabe, das Streufeld zu bestimmen, kann reduziert werden auf das DIRICHLET-Problem für die HELMHOLTZsche Schwingungsgleichung das Gittergebiet. Dieses Randwertproblem wird mittels der Laplace-Transformation in eine Funktionalgleichung vom verallgemeinerten WIENER-HOPF-Typ überführt, die mittels des bekannten W-H-Verfahrens auf ein Integralgleichungssystem für zwei Bildfunktionen reduziert wird. Dieses is äquivalent einem linearen, unendlichen Gleichungssystem, dessen Matrixelemente geeignet abgeschätzt werden, so daß es sich als ein vollständig reguläres System erweist, sofern die Plattenbreite genügend groß ist.

KRABS, W.: <u>Zur L_p-Approximation</u>.

Die L_p-Approximation wird als Mittel zur Gewinnung unterer Schranken für die Minimalabweichung im Tschebyscheffschen Sinne angesehen. Dabei werden das L_p- und Tschebyscheff-Problem in nichtlinearer Weise formuliert, indem zur Approximation im wesentlichen Funktionen benutzt werden, die in konvexer Weise von reellen Paramertern abhängen.

Es zeigt sich, daß für gerades p das L_p-Problem auch in diesem Fall stets (und damit eindeutig) lösbar ist und daß die L_p-Abweichungen

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

eine von unten monoton gegen die Tschebyscheff-Abweichung konvergierende Folge bilden, wenn p eine Folge gerader Zahlen durchläuft. Im linearen Fall kann man die Folge der L_p-Abweichungen durch eine i.a. schneller konvergierende Zahlenfolge ersetzen. Darüber hinaus zeigt sich, daß auch das Tschebyscheff-Problem in der nichtlinearen Fassung lösbar ist. Zur Gewinnung der L_p-Lösungen wird ein modifiziertes Newtonverfahren verwendet, das i.a. besser konvergiert als ein Gradientenverfahren oder die Methode des steilsten Abstieges.

GERLACH, H.E.: Beitrag zur Theorie einer Klasse von Integro-Differentialgleichungen.

Mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln wurde die den Kamkeschen Eigenwertproblemen analoge Eigenwertaufgabe $(L+K)y = Hy$, $U_v(y) = 0$ untersucht (hierbei ist L ein selbstadjungierter gewöhnlicher linearer Differentialausdruck, K und H beschränkte lineare hermitesche Operatoren im L^2,H positiv, U_v selbstadjungierte lineare Randbedingungen). Es wurde eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Eigenwerten angegeben. Mit Hilfe einiger Entwicklungssätze wurde gezeigt, daß die Eigenwerte Extrema gewisser Rayleighscher Quotienten sind und sich nach dem Iterationsverfahren berechnen lassen.

SCHWEDT, D.: Über nichtlineare gleichmäßige Approximationen.

Im Raum der auf einem kompakten Hausdorff-Raum stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen wurde das Approximationsproblem mit nichtlinearen Funktionenfamilien behandelt. Für "asymptotisch konvexe" Funktionenfamilien läßt sich eine Charakterisierung der besten Annäherung geben, die eine Verallgemeinerung eines von Kolmogoroff (1948) für den linearen Fall aufgestellten Kriteriums darstellt. Eine verallgemeinerte Haarsche Bedingung bei Approximationsfunktionen, die nach den Parametern differenzierbar sind, und die sich in eine lokale und eine globale Bedingung aufspaltet, hat die Eindeutigkeit der besten Approximierenden zur Folge. Bei reeller Approximation auf einem kompakten Intervall ergeben sich Verallgemeinerungen der von der polynomialen und rationalen Approximation her bekannten Alternantensätze.

E. Bohl (Hamburg)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft