Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Differentialgeometrie im Großen
21. bis 26. Juni 1964

Leitung: S.S. CHERN (Berkeley), W. KLINGENBERG (Mainz), M. BARNER (Freiburg).

Die Tagung fand außerordentlich regen Zuspruch, insbesondere bei den Mathematikern aus den USA, die in der Differentialgeometrie im Großen arbeiten. Noch niemals waren derart viele Besucher aus Übersee bei einer Tagung in Oberwolfach zu verzeichnen, und auch die Differentialgeometer aus Frankreich waren seit längerer Zeit wieder in größerer Anzahl erschienen. Die eingeladenen Kollegen aus der UdSSR konnten leider nicht an der Tagung teilnehmen.

In den Vorträgen wurde ein Überblick über die Entwicklung seit dem großen Kongreß in Zürich 1960 über Differentialgeometrie und Topologie gegeben. An den einzelnen Tagen stand jeweils ein spezielles Thema im Vordergrund. Es kam vor, daß über verschiedene Lösungen ein und desselben Problems vorgetragen wurde.

Alle Teilnehmer waren sich über das Gelingen und den Wert der Tagung einig, die in diesem Stile und mit diesem Erfolg nur in Oberwolfach durchgeführt werden konnte. Die Diskussionen am Ende der Vorträge konnten hier im privaten Gespräch fortgesetzt werden. Außerdem wurden inoffiziell noch weitere Vorträge gehalten und Arbeitsdiskussionen veranstaltet.

An der Tagung nahmen teil:

D.W. Anderson	Berkeley / USA	H. Eliasson	Mainz
M. Barner	Freiburg	G. Ewald	Mainz
W. Barthel	Würzburg	Th. Frankel	Providence /USA
M. Berger	Strasbourg	S. Goldberg	Urbana / USA
G. Bol	Freiburg	D. Gromoll	Mainz
W.M. Boothby	St.Louis /USA	E. Heinz	München
E. Calabi	Minneapolis /USA	S. Helgason	Cambridge / USA
M. do Carmo	Recife / Brasil.	Ch. Hsiung	Bethlehem /USA
S.S. Chern	Berkeley / USA	H. Karcher	Berlin
P. Dombrowski	Bonn	M.A. Kervaire	Cambridge /Engl. u. New York
J. Eells	Cambridge /Engl. u. Ithaca /USA		

W. Klingenberg	Mainz	H. Reichardt	Berlin
M. Klingmann	Heidelberg	A. Riede	Heidelberg
T. Klotz	Los Angeles/USA	H. Rosenberg	Berkeley /USA
J.L. Koszul	Grenoble	R. Rumberger	Kiel
N.M. Kuiper	Amsterdam	R. Sacksteder	New York
R. Lashof	Chicago /USA	J.H. Sampson	Strasbourg
K. Leichtweiß	Berlin	W. Smith	
P. Libermann	Rennes	R.H. Szczarba	New Haven /USA
W. Meyer	Mainz	H. Viesel	Mainz
A. Nijenhuis	Bussum /Holland u. Philadelphia /USA	K. Voss	Zürich
K. Nomizu	Providence /USA	K.H. Weise	Kiel
H. Osborn	Urbana /USA	T.J. Willmore	Liverpool
R. Ossermann	Stanford /USA	M. Zisman	Strasbourg
G. Reeb	Strasbourg		

Es wurden folgende Vorträge gehalten:

W.M. Boothby: Contact Manifolds.

In this talk a brief discussion of the following problem was given: Let M be an orientable, compact manifold of dimension 2n+1 (hence then is on M a globally defined pfaffian form ω which is never zero) then what necessary conditions can be found that ω be of the class 2k+1 (class as defined by E. Cartan for example). In the case 2k+1 = 2n+1 we say that M is a contact manifold, in this case $\omega \wedge (\alpha\omega)^n \neq 0$ and the manifold has a structure determined by the pseudogroup Γ of contact transformations on E^{2n+1}. This case has been studied by Reeb, Chern, Gray and Mlle Libermann. The work of these authors was briefly summarized and an example was given to show that there is an M of dim = 3 with contact forms ω_1 and ω_2 which are distinct under the group of diffeomorphisms. But it is not known whether there exist contact forms (i.e. class 2n+1) ω_1 and ω_2 on a manifold M such that for no diffeomorphism $f: M \to M$ is it true that $f_*\omega_1 = \lambda\omega_2$, $\lambda \neq 0$ a scalar function on M. In conclusion a brief discussion of the homogeneous case was given following the work of H.C. Wang and the author.

E. Calabi: Vollständige Riemannsche Räume, die mit S^n diffeomorph sind.

Sei M^n eine einfach zusammenhängende, n-dimensionale, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft, daß die Krümmung K ihrer tangentialebenen Schnitte ζ stets die Ungleichung $0 < \delta \leq K \leq 1$ erfüllt. Es ist schon bekannt, daß wenn δ hinreichend

groß ist (z.B. $\delta>1/4$ für gerades n), M^n der gewöhnlichen Sphäre S^n homöomorph ist. Es wird gezeigt, daß für $\delta>\alpha_n$ M^n zu S^n diffeomorph ist, wobei man die Konstante $\alpha_n<1$ in einer gewissen Weise abschätzen kann. Der Beweis besteht aus der Konstruktion von n+1 geeigneten Funktionen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ auf M^n, so daß die n-Form

$$(-1)^j u_j du_0 \ldots du_{j-1}\, du_{j+1} \ldots du_n$$

stets $\neq 0$ ist. Das bedeutet, daß diese Funktionen eine Einbettung mit sternartigem Bild von M^n in R^{n+1} definieren.

S.S. Chern: Remarks on the differential geometry of fibre bundles.

1. Given a real or complex C^∞-vectorbundle over a manifold X. Let Ω be the curvature matrix obtained from a connection. Then the coefficients in $\det(I+x\Omega) = 1 + c_1(\Omega)\lambda^1 + \ldots + c_k(\Omega)\lambda^k + \ldots$ define cohomology classes in X, independent of the choice of the connection.

2. If the group of the bundle can be reduced to S(p,q), the subgroup of GL(n,R), consisting of all transformations of determinant +1 which leave invariant a quadratic form of signature (p,q)[p+q=n] then the Pfaffian

$$\sqrt{\det(F\Omega)}\ ,$$

where F = matrix of scalar products of the vectors of a pair (so that $F\Omega$ is skew-symmetric), defines, up to a factor, the Euler class of the bundle. In particular, this gives the Gauß-Bonnet formula for a pseudo-riemannian manifold.

3. X = complex manifold, bundle is holomorphic. Then the theory can be refined relative to the d'd''-operator. This has important application to the question of equi-distinction of the zeros of holomorphic sections.

P. Dombrowski: Maximale eindeutige Lösungen für Systeme von m partiellen C^∞-Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte reellwertige C^∞-Funktion auf einer n-dimensionalen C^∞-Mannigfaltigkeit M.

Als Anwendung eines Satzes über C^∞-Blätterungen und unter Benutzung der von LIE, GOURSAT und E.CARTAN verallgemeinerten Theorie der CAUCHY-Charakteristiken erhält man folgenden Satz: Zu jeder nichtcharakteristischen CAUCHYschen Anfangswertaufgabe für Systeme der im Titel genannten Art gibt es eine eindeutige, m a x i m a l e C^∞-Lösung in jedem der drei folgenden Fälle: (i) m = 1, (ii) m = n, (iii) alle Daten (d.h. M, das gegebene System und die Anfangsdaten) sind reell-analytisch. Zusatz: In Fall (iii) ist auch die maximale Lö-

sung reell-analytisch und eindeutig im Bereich der C^∞-Lösungen. (Bemerkung: Da Maximalität für eine eindeutige Lösung bedeutet, daß diese nicht mehr eindeutig fortgesetzt werden kann, so muß - in Analogie zur Funktionentheorie, wo man die Abgeschlossenheit des Definitionsbereiches einer holomorphen Funktion gegenüber analytischer Fortsetzung durch Einführung der Riemannschen Flächen erzwingt - im letzten Satz der Begriff der "Lösung" so gefaßt werden, daß als Definitionsbereiche nicht nur offene Teilmengen der Grundmannigfaltigkeit M, sondern beliebige n-dim C^∞-Mannigfaltigkeiten S "über" M zugelassen werden, d.h. solche, für die eine C^∞-Immersion $x: S \to M$ mitgegeben ist.)

J. Eells: Global variational problems.
(Work done in collaboration with J.H. Sampson)
A general method of non linear functional analysis (in particular, of infinite dimensional Riemannian manifolds and of spectral theory) is developed for proving existence theorems in the calculus of variations in fibre bundles. A special case is the
Theorem: Let X and Y be closed Riemannian manifolds, and suppose X is oriented. Then every map $\phi: X \to Y$ is homotopic to a polyharmonic map, where the degree of harmonicity is greater than dim X/2.

H.I. Eliasson: Über die Anzahl geschlossener Geodätischen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten vom Typ der Grassmannmannigfaltigkeiten $G_{n2} = O_n/O_2 x O_{n-2}$.

Es handelt sich um den folgenden Satz: M sei eine Riemannsche C^3-Mannigfaltigkeit und es gebe einen Homöomorphismus $f: M \to G_{n2}$, so daß

$$k \cdot d_0(f(x),f(y)) \leq d(x,y) \leq K \cdot d_0(f(x),f(y))$$

für alle x,y aus M gilt, mit positiven Konstanten k,K mit K<3k, wobei d und d_0 die Abstandsfunktionen in M und G_{n2} bezeichnen. Wir schreiben $n-1 = 2^m + 2s + \epsilon$ mit $0 \leq s \leq 2^{m-1}$, $\epsilon = 0,1$. Dann gilt: Es existieren in M nicht weniger als insgesamt $1/2(5n - 4s - \epsilon - 7)$ verschiedene einfach geschlossene Geodätische mit Längen in dem Intervall $[k\pi, K\pi]$. Der Beweis wird gebracht mit Hilfe der Homologiemethoden von L.A.Lyusternik. Es wird gezeigt, daß der Raum den nichtparametrisierten geschlossenen Geodätischen minimaler Länge ($=\pi$) in G_{n2} mit dem homogenen Raum $H_{n3} = O_n/O_1 x O_2 x O_{n-3}$ identifiziert werden kann. H_{n3} wird dann als Prototyp für den Raum P(M) der geschlossenen Kurven in M verwendet.

S.I. Goldberg: Topology of positively curved Riemannian manifolds.

The global behaviour of positively curved Riemannian manifolds is discussed. (i) Results on the following question are given: Does a compact, oriented Riemannian manifold of even dimension $n = 2m$ whose sectional curvatures are non-negative have non-negative Euler characteristic χ, and if the sectional curvatures are non-positive is $(-1)^m\chi \geq 0$? (ii) Results of Klingenberg and Kobayashi have been improved: We show that a complete holomorphically pinched Kaehler manifold with holomorphic pinching $> 4/5$ has the homotopy type of complex projective space PC_n. (iii) Andreotti and Frankel proved that a 4-dimensional Kaehler manifold of strictly positive curvature is homeomorphic with PC_2, and the latter conjectured that this is true in all dimensions. Evidence is given to support this. It is shown that for a complete Kaehler manifold M of strictly positive curvature $H^2(M,R) = R$. Berger also obtained this result when $\dim_C M = 2$.

D. Gromoll: Differentiable structures and metrics of positive curvature on spheres.

Let M be a complete, simply connected Riemannian manifold of dimension n. Denote by K the function which assigns to each tangent plane σ the sectional curvature of M respective to σ. K is called δ-pinched with $0\leq\delta\leq 1$, if $\delta A\leq K\leq A$ for some $A>0$. It is known that M is homeomorphic with the sphere S^n if $\delta>1/4$ (Rauch, Berger, Klingenberg). Now consider the finite abelian groups Γ^n of Milnor and Thom. There is a wellknown bijective correspondence of Γ^n with the set of all diffeomorphism classes of differentiable structures on S^n, at least if $n \neq 4$. For $n\geq k\geq 1$ we define subgroups Γ^n_k of Γ^n such that $\Gamma^n = \Gamma^n_1 \supset \Gamma^n_2 \supset\ldots\supset\Gamma^n_n = 0$. One has $\Gamma^n_{n-2} = \Gamma^n_{n-1} = \Gamma^n_n = 0$ and $\Gamma^n_2 \neq 0$ in general. We prove the existence of a sequence δ_ν with $\delta_1 = 1/4$, $\delta_\nu<\delta_{\nu+1}$, $\lim_{\nu\to\infty} \delta_\nu = 1$ such that for $n\geq k\geq 1$ the differentiable structure of M is characterized by an element in Γ^n_k if $\delta>\delta_k$. This implies that M is diffeomorphic with the usual n-sphere as soon as $\delta>\delta_{n-2}$. Such a sequence δ_ν is recursively constructed by various methods of Riemannian geometry, and upper bounds are computed, for example $\delta_2\leq 0{,}564$, $\delta_5\leq 0{,}819$, $\delta_9\leq 0{,}916$. There is also another rather simple method, which reduces the part of the problem concerning diffeomorphism in the sphere theorem to an estimating problem in elementary analysis.

E. Heinz: Existenzsätze für eine Klasse nichtlinearer elliptischer Systeme zweiter Ordnung.

Es wird die Frage untersucht, wann ein vorgegebener Homöomorphismus des Einheitskreises $\alpha^2+\beta^2=1$ auf eine Jordankurve Γ sich derart zu einem Homöomorphismus der Kreisscheibe $\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ auf den von Γ begrenzten Bereich in der u-v-Ebene erweitern läßt, daß die Abbildungsfunktionen $u=u(\alpha,\beta)$, $v=v(\alpha,\beta)$ für $\alpha^2+\beta^2<1$ dem System

$$\Delta_u = h_1(u,v)(u_\alpha^2+u_\beta^2)+h_2(u,v)(u_\alpha v_\alpha+u_\beta v_\beta)+h_3(u,v)(v_\alpha^2+v_\beta^2)+h_4(u,v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)}$$
$$\Delta_v = \tilde{h}_1(u,v)(u_\alpha^2+u_\beta^2)+\tilde{h}_2(u,v)(u_\alpha v_\alpha+u_\beta v_\beta)+\tilde{h}_3(u,v)(v_\alpha^2+v_\beta^2)+\tilde{h}_4(u,v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)}$$

genügen. Die Ergebnisse werden benutzt, um Einbettungs- und Verbiegungssätze im Großen für Flächen positiver Gaußscher Krümmung zu gewinnen.

S. Helgason: A Duality in Integralgeometry.

Let X be a manifold, G a transitive Lie transformation group of X, Ξ a family of submanifold of X, permuted transitively by G. For $x\epsilon X$ let $\check{x}=\{\xi\epsilon\Xi \mid x\epsilon\xi\}$. If f is a function on X, g a function on Ξ, define $\hat{f}$ on Ξ, $\check{g}$ on X by $\hat{f}(\xi) = \int_\xi f(x)d\mu(x)$, $\check{g}(x) = \int_{\check{x}} g(\xi)d\nu(\xi)$, μ and ν being certain measures on ξ and $\check{x}$, respectively. Problems:

(i) Relate function spaces on X and Ξ by the integral transforms $f\to\hat{f}$ and $g\to\check{g}$.

(ii) Relate f and $(\hat{f})^\vee$, g and $(\check{g})^\wedge$.

(iii) If D(X) and $D(\Xi)$ are the algebras of G-invariant differential operators on X and Ξ, respectively, find mappings $D\to\hat{D}$, $E\to\check{E}$ between D(X) and $D(\Xi)$ such that $(Df)^\wedge=\hat{D}\hat{f}$, $(Eg)^\vee=\check{E}\check{g}$ for all f,g.

These problems, suggested by the classical Radon transform, are explicitly solved in several cases including: a) X=compact two-point homogeneous space, Ξ the set of antipodal manifolds in X; b) X=noncompact symmetric space, Ξ the set of horocycles. Applications to differential equations are given.

Ch. Hsiung: Structures and operators on almost-Hermitian manifold.

We first show that a necessary and sufficient condition for an almost-Hermitian structure to be Kählerian is that the real operator L (or Λ) commute with the real Laplace-Hermitian operator Δ.

Next, suppose that on an almost-Hermitian manifold with a Riemannian metric g there is an almost-Hermitian structure S satisfying a certain condition with the Riemann curvature tensor of the affine connection of the metric g; this condition holds automatically for a

Kählerian structure. Then it is shown that for this special structure S the complex Laplace-Beltrami operator $\Box$ is real with respect to all differential forms of degrees zero and one, if and only if the structure S belongs to a class which is larger than that of Kählerian structures. Moreover, for a structure S if $\Box$ is real with respect to all forms of degrees zero and one, then it is also with respect to all forms of degree two.

M. Klingmann: Eigentliche Energiefunktionen auf unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten.

In der klassischen Morsetheorie und ebenso in der neuen Darstellung der Morsetheorie in unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten verlangt man, daß die singulären Punkte nicht ausgeartet sind. Um diese Voraussetzung zu vermeiden, wird die Theorie der "eigentlichen Energiefunktionen" auf einer speziellen Klasse von Riemannschen Mannigfaltigkeiten (∞-dimensional) entwickelt und gezeigt, daß sich diese Theorie im wesentlichen auf die Morsetheorie von eigentlichen Funktionen auf endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten reduziert. Dies erlaubt es, Morsesche Ungleichungen für die Homologie abzuleiten. Als Beispiele werden die Räume der absolutstetigen Kurven auf endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten angegeben mit quadratintegrierbarer Ableitung und geeigneten Randbedingungen.

W. Klingenberg: Mannigfaltigkeiten vom symmetrischen Typ.

Darunter verstehen wir eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M, für die ein Homöomorphismus $\varphi: M \to M_0$ auf eine kompakte symmetrische Mannigfaltigkeit M_0 gegeben ist. Wir interessieren uns für eine untere Schranke der Anzahl der geschlossenen Geodätischen auf einem solchen M. In Verallgemeinerung klassischer Resultate finden wir folgendes: Sei $G(M_0)$ die Pseudomannigfaltigkeit der auf natürliche Weise auf M_0 definierten Kreise. H* bezeichne den Cohomologiering dual zur $\mathbb{Z}_2$-Homologie im Sinne von Čogošvili. P(M) bezeichne den Raum der geschlossenen unparametrisierten Kurven auf M, Quotient des Raumes der parametrisierten Kurven.

Theorem 1: $\varphi^*: H^*((P(M)) \to H^*(G(M_0))$ ist surjektiv.

Theorem 2: Jede Cohomologieklasse ungleich Null in $H^*(G(M_0))$ bestimmt eine geschlossene Geodätische auf M.

Theorem 3: Falls φ der sogenannten Bedingung von Morse genügt, d.h. $0<c\leq d(p,q):d(p,q)<2c$, so gibt es wenigstens $\operatorname{long}G(M_0)$ verschiedene Geodätische mit einer Länge im Intervall $[2\pi c, 4\pi c[$ wobei $\operatorname{long}G(M_0)$ die Länge von $G(M_0)$ im Sinne von Froloff-Elsholz bezeichnet.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Tilla Klotz: Non-standard conformal structures in the global theory of surfaces.

We suggested the more systematic use of non-standard conformal structures on oriented surfaces; for instance, those R_Λ determined by some geometrically significant positive definite quadratic form Λ on S, such as (for $S \subset E^3$) II where $H,K>0$, II' where $K<0$ (II' given where $H' = -\sqrt{H^2-K} \neq 0$ by $H'\mathrm{II}' = K\mathrm{I} - H\mathrm{II}$), III where $K \neq 0$, and $\mathrm{I}+\mathrm{III}$. Facts were noted (e.g. that $K \equiv \text{const} < 0$ on S iff $H'\Omega_{\mathrm{II}} = H'\{(L-N)-2iM\}$ is a holomorphic quadratic differential on $R_{\mathrm{II}'}$,) to indicate the usefulness of such structures in making complex analysis more available for the solution of geometric problems. And questions were noted of the sort naturally associated with the consideration of varying conformal structures (e.g. when can a correspondence between closed, or complete surfaces be doubly conformal, i.e. preserve some given pair of geometrically significant conformal structures.)

N.H. Kuiper: Doubly-normals of convex bodies.

A doubly-normal of a bounded convex body V in E^n is a chord which connects orthogonally two sustaining hyperplanes. There are at least n+1 doubly normals. The measure of the length of all doubly-normals is zero for $n \leq 3$, not necessarily zero for $n \geq 4$.

R. Lashof: SU-Cobordism and the Arf Invariant.

(Joint work with M. Rothenberg)

Let C_n ($\tilde{C}_n$) be the cobordism group of n-dimensional manifolds with unitary (special unitary) structures on their stable tangent bundles. Let $C = \sum_n C_n$ ($\tilde{C} = \sum_n \tilde{C}_n$) be the cobordism rings and $\lambda: \tilde{C} \to C$ the ring homomorphism induced by the inclusions $SU_k \to U_k$.

Theorem A: The kernel of λ is the ideal generated by $\tilde{S}$ in C, where $\tilde{S}$ is the SU-cobordism class of the circle S^1 with the non trivial SU-structure.

Theorem B: Let $k \equiv 1 \pmod 4$. Let $X \in \tilde{C}_{2k}$, and suppose $\lambda(X) = 0$. If M^{2k} is a closed manifold with SU-structure in X, then the Arf invariant of M is zero. (Here we are using the generalized definition of the Arf invariant of a spin manifold due to E. Brown and Novikov.)

Corollary: If M^{2k} is a smooth closed π-manifold, $k \equiv 1 \bmod 4$, then the Arf invariant of M is zero.

P. Libermann: Connexions d'ordre supérieure.

Sur une variété différentiable V_n l'opérateur itéré ∇^q (où ∇ est la dérivation covariante associée à une connexion affine) est un opérateur différentiel à valeurs dans un espace de tenseurs. D'où plus généralement la notion de connexion d'ordre supérieure définie à partir des jets semi-holonomes. A une suite de connexions d'ordres $1,\ldots,q$ correspond une projection $\overline{T}_q(V_n)\to T(V_n)$, où $\overline{T}_q(V_n)$ est le fibre vectoriel des vecteurs tangents semi-holonomes d'ordre q. On en déduit les géodésiques d'ordre q, l'application exponentielle etc. Applications à la régularisation de certaines applications admettent un nombre fini de points critiques. On peut tourjours trouver des suites de connexions telles qu'une sous-variété $V_m \subset V_n$ soit totalement géodésique.

W. Meyer: Kritische Untermannigfaltigkeiten in unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Sei M eine vollständige Riemannsche*) C^∞-Funktion auf M, derart daß die Menge der kritischen Punkte von f nur aus nicht degenerierten kritischen Untermannigfaltigkeiten besteht. Ferner möge f die folgende von Smale und Palais eingeführte Bedingung erfüllen:
"Ist S irgend eine Teilmenge von M, auf der f beschränkt ist, auf der aber $\|\text{grad } f\|$ Null als Häufungswert hat, so gibt es einen kritischen Punkt von f, der Adhärenzpunkt von S ist".
Es folgt, daß eine kritische Mannigfaltigkeit kompakt ist und isoliert liegt. Die kritischen Werte von f liegen isoliert und auf jedem kritischen Niveau liegen nur endliche viele kritische Untermannigfaltigkeiten von f.
Sei nun N eine kompakte Mannigfaltigkeit und ν ein Bündel über N mit abgeschlossenen Hilbertzellen als Faser. Es wird erklärt, wann ν an eine Mannigfaltigkeit G mit Rand C^∞-angeheftet vom Typ (N,k,l) ist.
Es gilt dann folgender Satz: Seien f und M wie oben gegeben, ferner a<b reguläre Werte von f und c der einzige kritische Wert mit a<c<b. Sind dann $N_1,\ldots,N_r$ die distinkten einzigen kritischen Untermannigfaltigkeiten zum kritischen Wert c, und k_i, l_i Index bzw. Koindex von N_i, so ist $\{p\in M \mid f(p)\leq b\}$ diffeomorph zu $\{p\in M \mid f(p)\leq a\}$ mit r angehefteten "Henkeln" ν_i vom Typ (N_i,k_i,l_i), $i=1,\ldots,r$.

A. Nijenhuis: Deformations of a certain class of structures.

Graded Lie algebras (GLA) are defined as systems $E = \oplus E^n$ of vector spaces E^n (over $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) with bilinear multiplication [,] such that

*) C^∞-Mannigfaltigkeit und f eine reellwertige C^∞-Funktion auf M,..

7. [illegible]

[illegible]

8. [illegible] Untermannigfaltigkeiten in [illegible] Mannigfaltigkeiten.

[illegible]

9. [illegible] Deformationstheorie [illegible]

[illegible]

$[E^n,E^m]\subset E^{n+m}$, $[a,b] = (-1)^{nm+1}[b,a]$ and $\sum_{cycl}(-1)^{mp}\big[[a,b],c\big] = 0$ for $a\in E^m$, $b\in E^n$, $c\in E^p$. Elements a of E^1 with $[a,a] = 0$ give rise to cohomology $H^*(E,a)$, which has an induced GLA structure.

To each vector space V are associated GLA's E_{lin} resp. E_{alt} such that the elements $\mu\in E^1$ with $[\mu,\mu] = 0$ are in 1-1 correspondence with associative resp. Lie algebra structures on V. Set $A = (V,\mu)$, then $H^n(E,\mu) = H^{n+1}(A,A)$, the latter in the sense of Hochschild resp. Chevalley-Eilenberg.

To each complex manifold is associated a GLA E_{compl}, where E^n consists of the vector forms of type $(0,n)'$. The cohomology fits into the Dolbeault pattern.

The deformations of associative, Lie or complex structures (or, more generally, of elements μ of E^1, with retention of $[\mu,\mu] = 0$) are obtained by solving (O) $\delta\varphi + \frac{1}{2}[\varphi,\varphi] = 0$ $(\varphi\in E^1)$ for small φ.

Theorem: There are local maps $\Phi^*: N(Z^1)\to E^1$, $\Omega^*: N(Z^1)\to H^2$ such that the small solutions φ of (O) are of the form $\varphi = \Phi^*(z)$ for all $z\in\Omega^{*-1}(0)$. The restrictions $\Phi^*|_{H^1}, \Omega^*|_{H^1}$, (where $Z^1 = B^1 + H^1$) yield all solutions of (O) up to equivalence.

Also, the groups $H^n(E,\delta')$, where $\delta' = \delta + [\varphi,\ldots]$ are found isomorphic to $(H^n(E,\delta)\cap\Omega_\varphi^{-1}(0))/\Omega_\varphi H^{n-1}(E,\delta)$; here $\Omega_\varphi: H^n \to H^{n+1}$ are certain linear obstruction maps to deformation of cocyles.

(The results depend heavily on work by Frölicher, Gerstenhaber, Griffiths, Kodaira, Kuraniski, Nirenberg, Richardson and Spencer.)

K. Nomizu: On transformations preserving the curvature tensor and its successive covariant differentials.

(This lecture is based on joint work with K. Yano.)

The main result is the following: Let M be a connected, analytic and complete Riemannian manifold which does not have a Euclidean part. Then any infinitesimal transformation X on M such that $L_X(\nabla^m R) = 0$ for $m = 0,1,2,\ldots$, where L_X denotes Lie differentiation and $\nabla^m R$ the m-th covariant differential of the curvature tensor field R, is a Killing vector field.

The proof is reduced to the case where M is irreducible, by de Rham's decomposition theorem. In the irreducible case, the proof depends on an algebraic fact that the second prolongation of the conformal algebra is trivial.

H. Osborn: Differentiable structures.

The sheaf of appropriately differentiable functions on a C^r-manifold,

on a C^{∞}-manifold, on an analytic manifold, or on an algebraic manifold, may be regarded in a reasonable sense as an algebraic "structure", not quite an algebra over a ground field, however, since the defining functions are not necessarily globally defined. Although one can describe such "structures" axiomatically without first specifying the underlying topological space, the obvious axiomatization includes such "structures" as the continuous functions on open sets of topological manifolds, for example. The purpose of this paper is to give conditions on the derivations of such axiomatically defined "structures" which characterize "differentiable structures" in the commonly accepted sense as sheaves of differentiable functions on open sets of differentiable manifolds.

R. Osserman: Einige bemerkenswerte Eigenschaften der klassischen Minimalfläche von Scherk.

Scherk's surface, z=log cos y-log cos x, has recently been shown to possess a number of remarkable properties. When used as a comparison surface it yields a variety of bounds for non-parametric minimal surfaces, including a strong form of Heinz' inequality on the Gauss curvature. If one examines the extension of Scherk's surface in parametric form, one finds that it is a complete surface whose normals omit 4 directions, and it is the proper embedding in E^3 of a surface of infinite genus.

H. Reichardt: Differentialgeometrie auf dem isotropen Kegel.

Auf dem Kegel $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$, $z = r$ wird die Geometrie untersucht für die pseudo-euklidische Gruppe, welche $x^2+y^2-z^2$ invariant läßt. Die Parabeln des Kegels sind gleichzeitig "Kreise" und "Geraden", letztere dadurch charakterisiert, daß der Abstand je zweier ihrer Punkte gleich der Bogenlänge dazwischen ist. Die Parabeln entsprechen dual den Kegelpunkten und so entsteht zu jeder Kurve $\mathcal{L}$ eine duale $\mathcal{L}^*$, das Verhältnis ihrer Bogenelemente ist die Krümmung auf $\mathcal{L}$. - Die Projektionen sind die ebenen Schnitte, sie entsprechen dual den Punkten des ganzen Raumes. Sie liefern die Schmiegtrajektorien einer Kurve dual einer Kurve im Raum, die sich als isotrop erweist, und umgekehrt. Im Zusammenhang mit dieser Kurventheorie ergibt sich eine Reihe von Integralsätzen, die als Schließungssätze zu deuten sind.
Es existieren ∞^2 mit der Gruppe verträgliche affine Zusammenhänge. Die Geodätischen sind untereinander kongruente Trajektorien. Der Krümmungstensor verschwindet genau dann, wenn die Trajektorien

Parabeln und der geodätische Parameter die Bogenlänge ist. Das Lemma von Ricci gilt nicht. Für die Vektorfelder läßt sich ein Integralsatz herleiten.
Durch die Parametrisierung $x = u^2 v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2+v^2$ überträgt sich diese Geometrie auf die zentral-affine u-v-Ebene, wobei jedoch diametrale Punkte (u,v) und (-u,-v) miteinander zu identifizieren sind.

A. Riede: Lotgeodätische auf kompakten, berandeten Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem Rand $N(\neq\emptyset)$. N sei geodätisch konvex in M eingebettet, d.h. die zweite Grundform ist positiv definit. Unter einer Lotgeodätischen von M wird eine geodätische Linie von M verstanden, die zwei Punkte von N verbindet und auf N senkrecht steht. Sei Ω der Raum aller stetigen, nicht orientierten Parameterkurven mit Endpunkten auf N. Unter Benützung der Cohomologie $H^*(\Omega, A)$ wird eine Morsetheorie entwickelt, die es erlaubt, die Minimalzahl von Lotgeodätischen abzuschätzen. (J = Längenfunktion, $A = J^{-1}(0)$). Sodann wird eine Cohomologieoperation auf $H^*(\Omega, A)$ definiert, mit deren Hilfe man in gewissen Fällen die Čech'sche Dimension der Menge der Lotgeodätischen von einer bestimmten Länge c abschätzen kann. Beispiele:

1. M ist diffeomorph zur n-dim. Einheitsvollkugel im R^n (zuerst von Bos behandelt),
2. M ist diffeomorph zu einem projektiven Raum, aus dem man eine Vollkugel herausgeschnitten hat (reell komplex, quaternionisch und caleysch (n = 2)).

Ist m die Dimension von M, so gibt es mindestens m Lotgeodätische, mit den Längen $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_m$. Ist $c=c_i=c_j$ $(i \leq j)$, so hat die Menge der Lotgeodätischen der Länge c mindestens die (Čech-)Dimension j-i.

H. Rosenberg: Commuting vector fields on manifolds.

We consider the question: what is the maximal number of linearly independent vector fields on a manifold V which commute?
If V is a closed manifold whose fundamental group does not contain a free Abelian subgroup of rank n-1, this number is at most n-2.
In particular, we generalise the Theorem of Lima: "The rank of S^3 is one" and of Rosenberg: "The rank of $S^2 x S'$ is one".

R. Sacksteder: Foliations of co-dimension one.

Let V be a compact n-manifold with a C^∞-foliated structure of co-dimension one. A leaf F of the foliation is said to be exceptional if it is nowhere dense in V and its topology as a manifold is not the same as its topology as a subset of V. It is known that exceptional leaves can exist. Here it is shown that either of the following conditions implies that exceptional leaves do not exist:

1. The leaves of the foliation are the orbits of a "locally free" action of R^{n-1} on V.
2. The linear holonomy group of each leaf has rational dimension different from one.

H. Viesel: Liouvillesche Eiflächen.

Eine Fläche heißt "Liouvillesch", wenn das Bogenelement in irgend einem Punkt auf die Form: $ds^2 = (U(u) + V(v))(du^2+dv^2)$ gebracht werden kann. Für eine vollständige, analytische Eifläche dieser Art gilt:

1. Die Liouvilleschen Parameter können auf die ganze Fläche mit Ausnahme von -im allgemeinen- 4 Punkten ausgedehnt werden. Bei Annäherung an diese Punkte strebt U+V gegen Null.
2. Die Parameterlinien können global als geodätische Ellipsen um je zwei der Ausnahmepunkte beschrieben werden.
3. Unter gewissen Symmetrieannahmen ergibt sich für den Schnittort eines beliebigen Flächenpunktes ein Stück einer Liouvilleschen Parameterlinie.

Auf diese Weise erhält man den Schnittort des dreiachsigen Ellipsoids.

K. Voss: Minimalflächen im Großen.

Die einzigen vollständigen Minimalflächen, deren sphärische Abbildung eineindeutig ist, sind die Enneper-Fläche und das Katenoid. Es werden Beispiele vollständiger Minimalflächen angegeben mit $k \leq 4$ Ausnahmerichtungen der sphärischen Abbildung, zu denen auch die Schraub-Minimalflächen und die Scherksche Fläche gehören. Diese Flächen sind eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß ihr sphärisches Bild Überlagerung der k-fach punktierten Kugel ist und daß ein gewisses analytisches Differential automorph gegenüber Decktransformationen ist. Die $k \leq 4$ Ausnahmerichtungen können beliebig vorgegeben werden. Bei eineindeutiger sphärischer Abbildung ist die erwähnte Überlagerung einblättrig. Der Versuch, Beispiele mit $k>4$ Ausnahme-

richtungen zu konstruieren, schlägt vorläufig fehl.

T.J. Willmore: Immersed manifolds with total absolute curvature equal to 3.

In a paper in the American Journal of Mathematics, 79 (1957), pp 306-318, Chern and Lashof proved that if a compact orientable C^∞-manifold is immersed in a euclidean space so that the total absolute curvature of the immersion is 2, then the manifold is homeomorphic to a sphere and is imbedded as a convex hypersurface in euclidean space of dimension one greater than that of the manifold.

In this paper we consider what can be said about manifolds immersed with total absolute curvature equal to 3.

H. Viesel (Mainz)