Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Konvexe Körper und konvexe Funktionen

5. bis 9. Juli 1964

Tagungsleiter:
Professor Dr. H. Busemann, Los Angeles und
Privatdozent Dr. G. Ewald, Mainz.

Tagungsteilnehmer:
H. Busemann, Los Angeles
W. Burhenne, Mainz
G. Ewald, Mainz
S. Hildebrandt, Mainz
F. Klein, Mainz
K. Leichtweiß, Berlin
K.A. Schmitt, Oberwolfach
G.C. Shephard, Birmingham

Übersicht über die behandelten Themen:

In einem einführenden Vortrag beschrieb H. Busemann die verschiedenen Möglichkeiten zur Definition konvexer Funktionen auf nichtkonvexen Mengen. Diese Fragestellung rührt aus der Variationsrechnung her, wo man die Grundfunktion eines r-fachen Extremalintegrals für n gesuchte Funktionen $(n > r)$ als Funktion auf dem Graßmannkegel G_r^n der r-dimensionalen Ebenen durch einen festen Punkt des n-dimensionalen Raumes auffaßt. Dabei ist G_r^n für $1 < r < n-1$ eine nichtkonvexe Teilmenge des Vektorraumes V_r^n aller r-Vektoren. Nachdem in einem Vortrag von Hildebrandt Carathéodorys Zugang zur Variationsrechnung behandelt worden war, wurden in der Diskussion die Verbindungen zwischen den verschiedenen Konvexitätsbegriffen und der Variationsrechnung untersucht. Busemann regte an, auf diese Zusammenhänge in einer Arbeit näher einzugehen.

Ein weiteres Thema befaßte sich mit den Sätzen von Radon und Blaschke. Busemann trug eine Verallgemeinerung des Blaschkeschen Resultates auf beliebige Dimensionen vor. Leichtweiß sprach über eine neue, von ihm gefundene Methode zur Parametrisierung des Randes konvexer Körper in der Ebene, mit deren Hilfe man Radonkurven und

insbesondere neue Beispiele algebraischer Radonkurven finden kann.

Ewald zeigte, daß die Antwort auf eine bisher offen gebliebene Frage negativ ist, nämlich ob das in einer früheren Arbeit betrachtete unendliche Polyeder eine konvexe Projektionsfunktion besitzt.

Shephard gab den Abriß einer Theorie metrischer Räume, die von konvexen Körpern des E^n gebildet werden. Er untersuchte Addition, Konvexität, gemischte Volumina in solchen Räumen. Als Extrempunkte erweisen sich die "unzerlegbaren" Körper. Von Shephard und Schmitt wurden Kriterien für die Unzerlegbarkeit von Körpern gegeben. Aus anschließenden Diskussionen ist eine Arbeit von Ewald und Shephard über gewisse Banachräume von konvexen Körpern entstanden.

<u>Zusammenfassung der eingereichten Vortragsauszüge</u>:

H. Busemann: <u>Konvexität und Normalität</u>.
Es wurde ein einführender Vortrag über Resultate von 1960 gegeben, die in Zusammenarbeit mit E.G. Strauß entstanden. Die Variationsrechnung, die Theorie der konvexen Körper und andere Gebiete führen auf die Frage, wann eine auf dem Graßmannkegel G_r^n aller einfachen r- Vektoren R definierte homogene Funktion f(R) ($f(kR) = k.f(R)$, $k \geq 0$) konvex ist. Es ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, die für die klassischen Fälle $r=1$, $r=n-1$ alle zusammenfallen. Die Begriffe werden verglichen, die wichtige und bisher ungeklärte Rolle und Stellung der Polyederungleichung wird diskutiert.
Die Resultate von Blaschke und Radon aus dem Jahre 1916 über Symmetrie der Transversalität erweisen sich als sehr spezielle Fälle allgemeiner Sätze für beliebiges r.

K. Leichtweiß: <u>Über eine Darstellung des Randes konvexer Körper</u>.
Radon benutzte 1916 eine spezielle Parametrisierung des Randes eines konvexen Gebietes im E^2 für die Konstruktion nichttrivialer Beispiele von Kurven mit symmetrischer Transversalität. Diese Parametrisierung wird folgendermaßen verallgemeinert: Sei $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper des E^n mit einem inneren Punkt O, einem Randpunkt P und einer Stützhyperebene π durch P. Dann betrachte man die Abbildung A der Menge Σ aller "Stützelemente" (P,π) von $\mathfrak{K}$ in die Einheitssphäre S^n, die durch

$$A : (P, \pi) \longrightarrow \mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{r} + \mathfrak{n}}{|\mathfrak{r} + \mathfrak{n}|}$$

gegeben wird, wobei $n = \overrightarrow{OP} / |\overrightarrow{OP}|$, n = Einheitsnormalenvektor von π ist. Dann gilt:

(1) A ist ein Homöomorphismus von Σ auf S^n und führt zu einer Parametrisierung von Σ.

(2) Der Rand ∂k von k wird in eindeutiger Weise durch $a = f(1)$ gegeben. Dabei bedeutet a die Länge der Hauptachse des (einzigen) gleichseitigen Rotationshyperboloids mit O als Zentrum, 1 als Richtung der Drehachse, das k berührt.

(3) Wenn k^* den polar reziproken Körper von k bezüglich der Einheitskugel um O bedeutet und ∂k durch $a = f(1)$ gegeben wird, so ist ∂k^* durch $a = 1/f(1)$ gegeben.

(4) Für n=2 und $1 = (\cos v, \sin v)$ ist $g(v) = f(1(v))$ eine differenzierbare Funktion von v.

(5) g ist eine algebraische Funktion von v $\Leftrightarrow$ wenn ∂k eine algebraische Kurve in E^2 ist.

Nach Auflösung einer geeigneten Funktionalgleichung führt die Darstellung $a = g(v)$ von ∂k in E^2 zu neuen Beispielen von algebraischen Kurven im E^2 mit symmetrischer Transversalität.

S. Hildebrandt: <u>Carathéodorys Zugang zur Variationsrechnung</u>.

Es wurden Ergebnisse einer Arbeit von W. Velte (Math.Z. 60, 1954, S. 367-383) vorgetragen, die Carathéodorys Methode auf den Fall von Variationsintegralen in Parameterdarstellung überträgt:
$I = \int f(x,p)dt$, $x^i = x^i(t)$, $t = (t^1,\dots,t^m)$, $x = (x^1,\dots,x^n)$, $dt = dt^1\dots dt^m$, $(i) = (i_1 i_2 \dots i_m)$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, $p^{(i)}$ = Graßmannkoordinaten von $\left(\frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}\right)$, $f(x,cp) = c(f(x,p)$, $c \geq o$. Aus einem Satz von H. Kneser folgt, daß man im Falle $f \geq o$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, daß der Vektor $(f_{p(i)})$ wieder im Graßmannkegel liegt.
Dann nennt man ein Feld $(x, \pi(x))$ "geodätisch", wenn die Differentialform $\omega = f_{p(i)}(x, \pi(x)dx^{(i)}$, $(dx^{(i)} = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m})$, geschlossen ist, d.h. $\int_{E_m} \omega = \int_{\bar{E}_m} \omega$ für 2 m-Flächen E_m und $\bar{E}_m$ mit $\partial E_m = \partial \bar{E}_m$.
Carathéodorys Determinantenmethode besteht dann in der Konstruktion von Funktionen $S^\alpha(x)$, $\alpha = 1,\dots,m$, ("Röhrenfeld"), so daß $dS^1 \wedge dS^2 \wedge \dots \wedge dS^m = s_{(i)}dx^{(i)} = \omega$ ist, d.h. $s_{(i)}(x) = f_{p(i)}(x, \pi(x))$.
Dann kann man mittels der Exzeßfunktion
$\mathcal{E}(x,p,\pi) = f(x,p) - f(x,\pi) - f_{p(i)}(x,\pi).(p^{(i)} - \pi^{(i)})$ entschieden werden, wann $J_{\bar{E}_m} - J_{E_m} = \int_{\bar{E}_m} \mathcal{E}(x,\bar{p},\pi)dt \geq o$ ist, falls E_m eine Extremale (= Lösung der Eulerschen Differentialgleichung) ist, die ins Feld $(x, \pi(x))$ paßt (d.h. $p^{(i)} = \pi^{(i)}$. Ferner wurden Einbettungsproblem, Legendretransformation, Legendrebedingung diskutiert.

[illegible]. Ewald: <u>Über Projektionsfunktionen konvexer Körper</u>.
Ein Kriterium für die Konvexität der Projektionsfunktionen $\hat{P}(K,R)$ konvexer Körper K konnte bisher nur für Polyeder als notwendig erwiesen werden. Es läßt sich aber so verallgemeinern, daß es für eine weitere Klasse konvexer Körper notwendig ist. Damit kann man eine offen gebliebene Frage beantworten, nämlich ob das in der Arbeit "Convex bodies and convexity on Graßmann cones" (Math.Ann.151,S.33) betrachtete unendliche Polyeder konvexe Projektionsfunktionen $\hat{P}(K,R)$ für $r \geq 2$ besitzt. Die Antwort ist negativ.

G.C. Shephard: <u>Vektorsummen und gemischte Volumina konvexer Mengen</u>.
Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller abgeschlossenen beschränkten konvexen Mengen K des E^n und $\mathcal{K}^*$ die Menge der $K \in \mathcal{K}$, deren Volumen >0 ist. Wenn in $\mathcal{K}$ eine Addition + (wie etwa Minkowskiaddition oder Krümmungsfunktion - Addition) definiert ist, so kann $\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, als Liniensegment in $\mathcal{K}$ (oder $\mathcal{K}^*$) aufgefaßt werden, d.h. $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}^*$ sind in einem gewissen Sinne konvex. Wenn + die Minkowskiaddition bedeutet und $\mathcal{K}$ durch die Hausdorffmetrik metrisiert ist, so ist $\mathcal{K}$ auch "metrisch konvex". Ferner ist $\mathcal{K}$ lokal kompakt und $\mathcal{K}^*$ offen in $\mathcal{K}$. Wenn $\sim$ die Relation der affinen Äquivalenz bedeutet, so ist $\mathcal{K}^*/\sim$ kompakt, kann in verschiedener Weise metrisiert werden und ist konvex bzgl. Segmenten, die durch Minkowskisysteme definiert sind. Dagegen ist nicht bekannt, ob $\mathcal{K}^*/\sim$ metrisch konvex ist. Die Extrempunkte von $\mathcal{K}^*/\sim$ sind die unzerlegbaren Körper K, d.h. Körper, die nicht in der Form $K = K_1 + K_2$ geschrieben werden können, ohne daß K_1, K_2 homothetisch zu K sind. Einige Kriterien für Unzerlegbarkeit sind bekannt, z.B. für Polyeder: alle Polyeder mit Dreiecken als 2-Seiten sind unzerlegbar. Diese Menge ist direkt in $\mathcal{K}^*$. Wenn die Liniensegmente durch $\lambda K_1 \# (1-\lambda)K_2$ definiert sind, wo $\#$ die Krümmungsfunktions-Addition bedeutet, so sind die Simplices unzerlegbare Polyeder.
Die gemischten Volumina einer Menge von p-Körpern im E^n befriedigen Ungleichungen der Form $(-1)^p a_{ij} \leq 0$, wo $a_{ij} = v(K_i, K_j, K_3, \ldots, K_n)$. Diese Ungleichungen bilden eine vollständige Menge für p=2 [illegible] p=3n, dagegen ist für $p \geq n+2$ nichts bekannt.

Stefan Hildebrandt (Mainz)