Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Arbeitstagung des Fachseminars Mathematik für Studienreferendare aus Freiburg vom 18. bis 20.7.1964

1. Fachsitzung: Algebra in der Mittelstufe (Raith)

Die Sitzung schloß sich an eine in Freiburg vorausgegangene an. Die traditionelle Entwicklung des Buchstabenrechnens ist unbefriedigend. Es ist weder logisch noch didaktisch sinnvoll, die Buchstaben, mit denen der Schüler rechnen lernt, "allgemeine Zahlen" zu nennen. Die Buchstaben stellen bei dieser Verwendung überhaupt keine Zahlen dar, sondern Variable im Sinne der modernen Logik. Für die Schule werden vor allem im Anfang folgende Bezeichnungen vorgeschlagen: Leerstelle, Platzhalter. Der Referent gibt der Bezeichnung "Leerstelle" den Vorzug.

Als Einstieg in die Algebra wird eine Betrachtung sprachlicher Strukturen vorgeschlagen und analysiert. Ausgangsmaterial bilden viele deutsche Sätze mit "offenen Stellen". An ihnen werden die Begriffe Aussageform und Aussage geklärt. Durch Einsetzen von Wörtern in die Leerstellen entstehen aus der Aussageform falsche Aussagen oder wahre Aussagen, aber gegebenenfalls auch nicht entscheidbare Aussagen oder mindestens aus dem gegebenen Kenntnisstand heraus zur Zeit nicht entscheidbare Aussagen.

An diesen sprachlichen Beispielen wird auch der Begriff der "Grundmenge" entwickelt, aus der die einsetzbaren Wörter entnommen werden. Damit wird auch eingesehen, daß die Entscheidungen "wahr, falsch, nicht entscheidbar" von der angenommenen Grundmenge abhängig sind. Damit kommt man zum Begriff der "über einer Grundmenge stets wahren Aussageform", und damit hat man die allgemein gültigen Aussagen auch für die Gleichungslehre vorbereitet.

Im Zusammenhang mit der Gleichungslehre der Mittelstufe wird folgendes festgestellt: In den Gymnasien des deutschen Sprachgebietes stellt das Manipulieren mit Gleichungen neben den Termumformungen den Hauptstoff der Schulalgebra dar. Diese Be-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

schränkung und einseitige Aufblähung ist nicht sinnvoll. Mindestens sollte die Ordnungsrelation in viel stärkerem Maße in die Betrachtungen gezogen werden. Das Arbeiten mit Ungleichungen muß einen breiteren Raum bekommen; denn sie liefern Aussageformen, deren Lösungsmenge schon im einfachsten Fall viele, meist unendlich viele Elemente enthält. Ferner spielen Ungleichungen sowohl bei den späteren Konvergenzbetrachtungen als auch bei vielen anderen modernen Schulstoffen eine entscheidende Rolle. Dabei ist es nicht erforderlich, aus dem Thema "Ungleichungen" ein breites selbständiges System der Schulmathematik mit verzwickten Aufgaben zu machen, wie dies z. B. in Frankreich üblich ist.

Anschließend wurde die Frage untersucht, wie die Rechengesetze im Algebraunterricht eingeführt werden sollen. Traditionelle Schulbücher berufen sich auf eine empirisch-induktive Entwicklung aus den früher gelernten Rechenverfahren mit Zahlen. Ein solches Vorgehen erscheint für die Quarta in einem verantwortungsvollen Mathematikunterricht nicht mehr zu rechtfertigen. Zumindest muß nach solch empirischer Heuristik der Entschluß klar herausgearbeitet werden, die so erkannten Regeln als Axiome für alles übrige zu setzen.

Der Referent empfiehlt allerdings, mit den Schülern auch zu prüfen, ob nicht im Bereich der natürlichen Zahlen einige dieser Grundgesetze aus anderen hergeleitet werden können. Als Beispiel wird gezeigt, wie das Distributivgesetz im Bereich der natürlichen Zahlen aus einer innerhalb dieses Bereichs möglichen Definition des Produkts als "Summe aus gleichen Summanden" und aus Regeln über das Addieren hergeleitet werden kann. Damit nähert man sich dem Problem einer Axiomatisierung der natürlichen Zahlen, die selbstverständlich in Quarta nicht explizit vorgenommen werden kann. Das bleibt der Oberstufe vorbehalten. Insbesondere spielt bei der Verallgemeinerung der oben erwähnten Herleitungsweise der "Schluß von n auf n-1" die Hauptrolle. Auch das kann in Quarta nicht explizit herausgearbeitet werden. Es ist jedoch unbedingt erforderlich, daß der "vollständigen Induktion" noch in der Mittelstufe, etwa in O3 oder U2 gründlichste Behandlung zuteil werden muß. Schließlich wird erörtert, daß es von hoher didaktischer Bedeudeutung ist, daß zu jedem Gesetz auch ein Gegenbeispiel geliefert

wird, also Bereiche, in denen das jeweilige Gesetz nicht gilt. Nur dann versteht der Schüler, daß es vernünftig ist, ein solches Gesetz hervorzuheben. Diese didaktischen Gedanken werden am Beispiel des Kommutativgesetzes ausgeführt. Insbesondere wird in diesem Zusammenhang auf die große didaktische Bedeutung der Behandlung endlicher Gruppen hingewiesen.

2. Fachsitzung: Mengen und Relationen in O III (Winterhalder)

Nach einigen Erklärungen über die Klasse und die Wahl des obigen Stoffes, für dessen Behandlung das Interesse durch einen Vortrag von Herrn Professor G. Papy geweckt worden war, wurde zunächst ein Überblick über die behandelten Punkte gegeben. Deren Durchführung wurde anschließend jeweils kurz aufgezeigt, wobei besonderer Wert auf die Beschreibung der Reaktion und Mitarbeit der Klasse und auf die Nennung kennzeichnender Antworten gelegt wurde.

Die genannten Punkte waren folgende:

Menge

1) Begriff der Menge im täglichen Sprachgebrauch - Eine Definition der Menge im mathematischen Sinn
2) Term, Termform, Notwendigkeit des Klammernsetzens
3) Angabemöglichkeiten von Mengen
4) Gleichheit von Mengen
5) Die leere Menge
6) Veranschaulichung von Mengen (VENN-Diagramm)
7) Teilmenge einer Menge
8) Konstruktion neuer Mengen aus zwei gegebenen Mengen Durchschnitt-, Vereinigung-, Differenz- und Ausschlußmenge
9) Konstruktion neuer Mengen aus einer gegebenen Menge Teilmengen, Potenzmenge
10) Rechenregeln für das Rechnen mit ganzen Zahlen
11) Rechenregeln für das Rechnen mit Mengen
12) Vergleich der Regeln von 10. und 11.
13) Vergleich der Regeln für das Rechnen mit Durchschnitt und Vereinigung

Relationen

1) Aussage, Satz, elementares Prädikat, Relation
2) Relation zwischen den Mengen A und B und ihre Veranschaulichung

3) A B und dessen Zusammenhang mit Relationen zwischen den Mengen A und B
4) Gleichheit von Aussagen - reziproke Relation
5) In einer Menge M def. Relationen
6) Konstruktion neuer Relationen aus in einer Menge M def. Relationen durch Mengenoperationen und Zusammensetzung
7) Spezielle Eigenschaften von einigen in einer Menge M def. Relationen
   Symmetrie-Transitivität-Reflexivität
   Äquivalenzrelation-Klasseneinteilung
8) Eigenschaften von zwischen Mengen A und B def. Relationen
   Nichteindeutigkeit
   Eindeutigkeit (Funktion, Wertebereich, Injektion, Surjektion, Bijektion, Umkehrfunktion)
   Beispiele im Hinblick auf die analytische Geometrie (Fixpunkt, Fixpunktgerade, Fixgerade, Involution)
9) Anwendung des Begriffes Bijektion
   (Abzählbare und überabzählbare Mengen)
10) Betrachtungen zum "tertium non datur"
11) Betrachtung von Antinomien

Einzelheiten:

Der Begriff "Menge" wurde leicht verstanden, während "Element" einer Menge bei einigen Schülern Schwierigkeiten hervorrief, die aber durch kurzes Üben behoben werden konnten. Genannt wurde ferner die auch andererorts eine Rolle spielende Tatsache, daß viele Schüler bei Auffoderung zur Nennung von nicht ganz eng gefaßten Dingen zunächst sehr schwerfällig waren, was sich aber nach diesem Kurs ganz erstaunlich besserte. In diesem Zusammenhang wurde erwähnt, daß die Schüler bei diesen Stoffen Hausaufgaben gern machten, weil, wie sie sagten, man nicht nur etwas einfach ausrechnen oder nach Rezept exakt konstruieren müsse; man müsse vielmehr etwas denken und dürfe auch einmal mit Dingen des täglichen Lebens arbeiten.

In Übereinstimmung mit dem eben Genannten stehen auch die Ergebnisse der beiden Klassenarbeiten, die der Vortragende über diesen Stoff schreiben ließ.

Die etwas ausführlicher besprochene Veranschaulichung von Mengen rief bei den Zuhörern einige kritische Bemerkungen hervor, weil ihrer Meinung nach das VENN-Diagramm stets an eine nicht endliche Menge erinnert. Der Vortragende berichtete, daß bei seiner Durchführung dies nicht der Fall war. Das Arbeiten mit dem VENN-Diagramm wurde als außerordentlich anregend für den Unterricht bezeichnet; insbesondere sei es eine ausgezeichnete Möglichkeit zur Stellung von Hausaufgaben. Außerdem stelle es eine Möglichkeit dar, insbesondere im Hinblick auf die Punkte 8. und 9., den sprachlichen Ausdruck zu schulen und die Bedeutung von Worten klar zu erfassen. Die Schüler fanden bei geeigneter Hilfestellung zur Angabe der Definition der Durchschnittsmenge die exakten Definitionen für Vereinigung-, Differenz- und Ausschlußmenge selbst. Die Potenzmenge und deren Elementanzahl stellt eine naheliegende Möglichkeit dar, auf die "vollständige Induktion" einzugehen.

Die Rechenregeln für das Rechnen mit ganzen Zahlen ausführlich und systematisch zu behandeln, wurde als sehr vorteilhaft bezeichnet; auf diese Weise komme man nämlich an bekannten Dingen zu Sachverhalten und Fragestellungen, deren Gültigkeit man dann sofort bei anderen Operationen auf anderen Grundmengen prüfen könne. Dies wurde ausgeführt und hat, wie aus Aufsätzen der Schüler hervorgeht, sehr beeindruckt. Die genannten Gesetze in Worten zu formulieren, ist zur Pflege des Ausdrucks und zum Verständnis der Gesetze gut geeignet.

Nach dem Vergleich der Rechenregeln für Durchschnitt und Vereinigung, deren Dualität erkannt wurde, wurde eine Arbeit geschrieben, deren allgemeine Aufgaben vorher in keiner Weise (auch nicht in entfernter Form) behandelt worden waren.

Folgende Aufgaben waren dabei gestellt worden:

1) Man bestimme den Durchschnitt (die Vereinigung) von mehreren explizit gegebenen Mengen und zeichne das Diagramm.
2) Sei A eine Menge. Berechne
   $A \cap A$, $A \cap A \cap A$, $A \cap \emptyset$, $\emptyset \cap A$, $A \cap A \cap A \cap A \cap A$, $\emptyset \cap A \cap \emptyset$, $\emptyset \cap \emptyset$, $\emptyset \cap \emptyset \cap \emptyset$
3) Sei A eine Menge. Berechne
   $A \cup A$, $A \cup A \cup A$?, $A \cup \emptyset$, $\emptyset \cup A$, $A \cup A \cup A \cup A$, $\emptyset \cup A \cup \emptyset$, $\emptyset \cup \emptyset$, $\emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset$
4) A und B seien Mengen und es gelte: $A \cap B = A$
   Was kann über $A \cup B$ ausgesagt werden?
   Was kann über $A \setminus B$ ausgesagt werden?

Der Mittelwert der Noten der streng korrigierten Arbeit war 1,5.

Relationen

Wie berichtet wurde, wurden von den Schülern auf die Aufforderung Sätze im Sinne der deutschen Sprachlehre zu nennen, zunächst nur richtige (wahre) Aussagen genannt. Nachdem geklärt worden war, daß auch eine falsche Aussage zu dem Verlangten gehören kann, wurden bevorzugt solche genannt. Hierbei ist darauf zu achten, daß auch einmal falsche mathematische Aussagen angeschrieben werden. Um mit der deutschen Sprache nicht in Konflikt zu kommen, wurde das Wortgebilde, das durch Wegnahme des Subjektes (Substantiv) aus einer Aussage entsteht "elementares Prädikat" genannt. Nachdem dann zweistellige Prädikate (Relationen) vorgestellt worden waren, wurden die elementaren Prädikate von den Schülern auch als einstellige Prädikate und Aussagen als nullstellige Prädikate bezeichnet. Bei der Betrachtung von Aussagen, die sich aus zwei Mengen und einer Relation bilden lassen, wurden zunächst wiederum nur wahre Aussagen genannt, die als besondere Menge angesehen wurden. Diese Menge von Aussagen, die mit einer geordneten Menge

von Paaren (a,b)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

äquivalent ist, wurde mit Pfeilen versehenen Schnüren und mit Schülern als Gegenständen veranschaulicht und aufgezeichnet (Graph). Diese Graphen leisten bei der Besprechung von Reflexivität, Symmetrie und Transitivität ausgezeichnete Dienste.

Hieran anschließend wurde nach der Menge aller Aussagen gefragt, die sich auf obige Weise bilden lassen, und gefordert, diese kurz, sinnvoll und vollständig aufzuschreiben.

Sofort kam der Vorschlag, dies in Form einer Tabelle zu tun und die "richtigen" mit einem R zu markieren. Diese Art der Veranschaulichung wurde Rechteckdarstellung genannt; sie leistet gute Dienste bei der Veranschaulichung von AxB, und bei der Motivierung der Konstruktion neuer Relationen aus gegebenen mit Hilfe von Mengenoperationen. Daneben bereitet sie den Boden für das Arbeiten mit der Gruppentafel vor.

Nachdem dann die Gleichheit von Aussagen und die damit zusammenhängende reziproke Relation kurz gestreift worden war, wurde gesagt, daß jetzt eine große Menge von Beispielen nötig ist, einmal, um die Freude und den Eifer wachzuhalten (es wird gern und möglichst bunt gezeichnet), und zum andern, um Material für das folgende bereitzustellen.

Bei dem Zeichnenlassen von Graphen ist darauf zu achten, daß verschiedenste Mengen und Relationen gebracht werden, und daß Graphen auch durch Worte beschrieben werden. Die Deutung und Kontrolle von vorgelegten Graphen durch die Schüler stellt eine einfache Möglichkeit dar, das kritische Denken zu fördern und auf Verständnis zu prüfen.

Über die Behandlung der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität wurde gesagt, daß hierbei das Nebeneinander von anschaulicher und abstrakter Definition günstig ist. Bei den genannten Eigenschaften ist insbesondere auf das "wenn" zu achten und aufzuzeigen, daß ihre Gültigkeit auch von der Menge abhängt. Besonders zu empfehlen sind Aufgaben des folgenden Typs, die auch in der zweiten Klassenarbeit gestellt worden sind:

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gibt es in einer bestimmten Menge, z. B. der Menge der Schüler dieser Klasse, eine Relation,

die reflexiv ist?
die reflexiv und symmetrisch ist?
die reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist?

(Wenn ja, dann gib solch eine Relation an!)

Hiernach wurde auf den Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelation und Klasseneinteilung eingegangen, wobei von den Zuhörern daran erinnert wurde, daß auch unbedingt einmal gezeigt werden muß, daß eine Relation in einer Menge M, auf der sie keine Äquivalenzrelation darstellt, auch keine Klasseneinteilung induziert. Es wurde die Möglichkeit erwähnt, hieran anschließend mit Restklassen zu arbeiten. Hierauf wurde vorgeführt wie der Begriff der Funktion erarbeitet wurde und welche Typen ausgezeichnet worden sind. Eine große Beispielsammlung von geeigneten Relationen zwischen Mengen A und B stellt hier eine ausgezeichnete Arbeitsgrundlage dar.

3. Fachsitzung: "Affin-invariante Behandlung der affinen Geometrie auf der Mittelstufe" (Dr. H. Prade)

Der herkömmliche Geometrie-Unterricht auf der Mittelstufe der Gymnasien baut die gesamte Elementargeometrie auf dem Spiegelungsbegriff, d.h. also auf der euklidischen Bewegungsgruppe auf, obwohl ein erheblicher Teil des zu behandelnden Stoffes aus der affinen Geometrie entnommen ist (Streifen, Parallelogramm, Strahlensätze etc.). Es wird der Vorschlag gemacht, den Ideen des Erlanger Programms folgend, diesen letztgenannten Teil im Unterricht voranzustellen und ihn allein mit den Mitteln der affinen Geometrie zu behandeln, d. h. ohne Verwendung des Zirkels und damit verknüpfter Begriffe. Dafür soll als Zeichengerät ein Parallelenzeichner benutzt werden. Folgender Aufbau bietet sich an:

I. Schiebungen. Eigenschaften, Zusammensetzung, Gruppe der Schiebungen, Schiebungsgleichheit (Äquipollenz) von Strecken, äquidistante Skalen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

II. Parallelprojektionen. Projektion schiebungsgleicher Strecken, Verfeinerung äquidistanter Skalen.

III. Punktspiegelungen. Wichtigste Eigenschaften, Zusammensetzung von Punktspiegelungen untereinander und mit Schiebungen. Gruppe der Schiebungen und Punktspiegelungen. Affine Parkettierungen der Ebene Ebene. Streifen und Parallelogramm.

IV. Das Teilverhältnis. Definition des TV dreier Punkte ausschließlich für rationale Zahlwerte. Strahlensätze für Parallel- und Zentralprojektion.

V. Schrägspiegelungen, Scherungen, zentrische Streckungen. Wichtigste Eigenschaften, Zusammensetzungen; Ähnlichkeit für den Fall der homothetischen Lage.

VI. Flächenlehre. Flächengleichheit als Zerlegbarkeit in paarweise schiebungs- oder punktspiegelungsgleiche Teile.

Dabei werden folgende Axiome benutzt:

1) Es gibt drei nicht kollineare Punkte.
2) Zu zwei Punkten gibt es genau eine Verbindungsgerade.
3) Parallelenaxiom.
4) Kleiner Desargues.
5) Drei kollineare Punkte sind stets Teilpunkte einer äquidistanten Skala.

Nachdem man anschließend den Zirkel einführt, können die echt euklidischen Teile des Stoffes behandelt werden. - Es wurde ferner über ein Unterrichtstertial berichtet, in dem ein Teil des geschilderten Aufbaus in einer Obertertia realisiert wurde.