Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Z a h l e n t h e o r i e

(insbesondere algebraische Zahlentheorie)
6. bis 11. Sept. 1964

Die Leitung der Tagung hatten die Professoren H. HASSE (Hamburg) und P. ROQUETTE (Tübingen).
Außer ihnen nahmen teil:

Becken, S., Hamburg
Behr, H., Göttingen
Benz, H., Hamburg
Berger, R., Berlin
Bernstein, L., Tel-Aviv
Bremer, H., Basel
Brückner, H., Hamburg
Cassels, J.W.S., Cambridge
Châtelet, F., Besançon
Deuring, M., Göttingen
Dress, A., Kiel
Eichler, M., Basel
Fröhlich, A. London
Geyer, W.D., Tübingen
Habicht, W., Basel
Harder, G., Hamburg
Hoechsmann, K., Hamburg
Jacobinski, H., Vendelsö
Jehne, W., Heidelberg
Knebusch, M., Hamburg
Kneser, M., Göttingen
Koch, H., Berlin
Kostrikin, I.A., Moskau
Kubota, T., z.Zt. Tübingen
Kunz, E., Heidelberg
Lakkis, K., Hamburg
Leopoldt, W., Tübingen
Lorenz, F., Tübingen
Madan, M,L., Tübingen
Maus, E., Hamburg
Menalda, A., Leiden
Meyer, C., Hamburg
Néron, A., St.Ouen
Payan, J.J., Grenoble
Pfister, A., Göttingen
Popp, H., Tübingen
Rieger, G.J., München
Schafarewitsch, I.R., Moskau
Zassenhaus, H., Columbus
Zimmer, H.G., Tübingen

Die Tagung war der algebraischen Zahlentheorie gewidmet. Ihr überaus vielseitiges Vortragsprogramm wird in der anschließenden (chronologischen) Liste der Vorträge zu erkennen sein. Wichtiger als der Roh- und Gesprächsstoff der Vorträge war jedoch die von den Teilnehmern lebhaft genutzte Gelegenheit, miteinander Kontakt aufzunehmen und mathematische Informationen auszutauschen.

Arithmetische Untersuchungen stehen seit einigen Jahren wieder im Vordergrund mathematischen Interesses. Diesem Umstand verdankte die Tagung viel von ihrer Anziehungskraft. Ihr Höhepunkt war ein

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Bericht des Moskauer Mathematikers I.R. Schafarewitsch über das Klassenkörperturmproblem, ein jahrzehntelang ungelöstes Problem, welches er in diesem Frühjahr in Zusammenarbeit mit seinem Schüler Golod lösen konnte. Dieser Vortrag wurde am Abend fortgesetzt durch eine inhaltlich informelle Erörterung von Fragen und Vermutungen gruppen- und zahlentheoretischer Art, die mit diesem Problem in Zusammenhang stehen.

VORTRÄGE:

J.W.S. Cassels: Über Summen von Quadraten.

Folgender Satz wurde bewiesen: Es sei k irgendein Körper. Jedes $f \in k[x]$, das Summe von n Quadraten aus $k(x)$ ist, ist notwendigerweise Summe von n Quadraten aus $k[x]$ (n irgendeine natürliche Zahl). Es wurde über einige Anwendungen gesprochen. Die betreffende Arbeit ist schon in den Acta Arithmetica (Mordell-Festschrift: IX) erschienen.

A. Pfister: Multiplikative quadratische Formen.

Bestimmung aller quadratischer Formen φ über einem beliebigen Körper K der Charakteristik $\neq 2$, die eine Kompositionsformel $\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(z)$ gestatten. Dabei seien x,y unbestimmte Vektoren, z ein Vektor, dessen Komponenten sich aus denen von x,y als
a) in x und y rationale Funktionen
b) in x rationale, in y lineare Funktionen
c) bilineare Funktionen
berechnen. (Teil c) schon früher bekannt).
Anwendung auf die Berechnung der Stufe des Körpers K und die Wittsche Gruppe von K: die Stufe von K sowie die Ordnung eines Elements der Wittschen Gruppe von K ist immer entweder eine 2-Potenz oder ∞.

A. Dress: Elementarer Beweis für die Existenz unendlich vieler voll zerfallender Bewertungsringe bei separabler Körpererweiterung.

Sei L:K eine endliche separable Körpererweiterung. Gilt dann für eine Menge $S = \{\varphi, \vartheta, \ldots\}$ von K eine Produktformel, so zerfallen von den zu S gehörigen Bewertungsringen von K stets unendlich viele in L (eine Verallgemeinerung des Satzes 126 der Heckeschen Vorlesung), - was sich mit Hilfe des Henselschen Lemmas leicht einsehen läßt. Als Folgerungen ergeben sich
a): Ist K nicht eine algebraische Erweiterung eines endlichen Kör-

pers, so besitzt K stets unendlich viele in L voll zerfallende Bewertungsringe mit archimedischen Wertegruppen.

b): Für eine beliebige Körpererweiterung L/K ist $L^{\times}/K^{\times}$ nicht unendlich zyklisch.

A. Fröhlich: Module conductors.

$\mathfrak{o}$ is a Dedekind domain, A a finite sep. normal extension of its quotient field, Γ the Galois group, I an $\mathfrak{o}(\Gamma)$-module, finitely generated, projective over $\mathfrak{o}$. The module conductors are a pair of functions of the triplet $(\mathfrak{o},A,I)$, whose values are ideals of $\mathfrak{o}$. For $I = \mathfrak{o}(\Gamma)$ we get the discriminant. In general they reflect both the ramification over $\mathfrak{o}$, and the structure of the integral closure in A over $\mathfrak{o}(\Gamma)$.
There is a connection with generalised resolvents and with the Artin conductors, and a close formal analogy with the latter as regards functorial properties.

F. Châtelet: Les idéaux de l'anneau des polynomes a coefficients entiers rationnels.

Dans un travail inédit, A.CHATELET avait étudié les idéaux de l'anneau des polynomes a coefficients entiers rationnels. Il avait montré qu'il existe des bases finies dans chacun de ces idéaux. On peut definir une base particulière dans chacun de ses idéaux. Pour cette base, il existe une représentation particulière unique de chaque polynome, obtenue en imposant des inégalités convenables aux degrés des coefficients dans la représentation.
Ces représentations peuvent être utiles dans l'étude des corps finis et dans l'étude des idéaux de l'anneau des entiers de certains corps algébriques.

T. Kubota: Modulformen für Picardsche Gruppen.

Es sei G = SL(2,C) die Gruppe aller komplexen Matrizen mit Determinante 1, und es sei U = SU(2) die Gruppe aller unitären Matrizen in G. Dann ist der Quotientenraum H = G/U der 3-dimensionale, euklidische, obere Halbraum mit dem Koordinatensystem (x,y,v), (v>0). Auf diesem Raum kann man eine ähnliche Theorie der Modulformen kontruieren wie im klassischen Fall von Hecke, indem man statt analytischer Funktionen die C^{∞}-Eigenfunktionen des G-linksinvarianten Differentialoperators

$$\Delta = v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - v\frac{\partial}{\partial v}$$

auf H benutzt. An Stelle der Modulgruppen betrachtet man dabei Picard'sche Gruppen, d.h. die Gruppen derjenigen Matrizen in G, die im Körper $Q(i)$ ganzzahlig sind.

H. Hasse: Mehrklassige eingeschlechtige, reellquadratische Zahlkörper.

Es handelt sich darum, Fälle anzugeben, wo für einen der eingeschlechtigen, reell-quadratischen Zahlkörpertypen

$$\begin{cases} P(\sqrt{p}), \ p \equiv 1 \mod. 4, \text{ Primzahl} \\ P(\sqrt{q}), \quad (\sqrt{2q}), \ q \equiv -1 \mod. 4, \text{ Primzahl} \\ P(\sqrt{qq'}), \ q,q' \equiv -1 \mod. 4, \ q<q', \text{ Primzahlen} \end{cases}$$

die Klassenzahl größer als 1 ist. Als Hilfsmittel dazu bietet sich eine in Spezialfällen auf Davenport-Ankeny zurückgehende obere Abschätzung der nicht-quadratischen Zahlen m an, für die die diophantische Gleichung $\pm m = \frac{1}{4}(x^2-dy^2)$ lösbar ist. Diese Abschätzung benutzt die Koordinaten der Grundeinheit und wird daher auf Körper des Degertschen Types angewandt, für die diese ja bekannt sind. Es ergibt sich dabei die Mehrklassigkeit sowie eine untere Abschätzung der Klassenzahl in einigen Fällen.

L. Bernstein: Periodische Jacobische Algorithmen.

Der Algorithmus von C.G.J. Jacobi, eine Verallgemeinerung des Euklidischen Algorithmus, setzt n Zahlen zueinander in Beziehung. Ist wenigstens eine von diesen irrational, so setzt sich der Algorithmus ins Unendliche fort.

Ob es überhaupt periodische Jacobische Algorithmen für ein System, namentlich geeignet gewählter algebraischer Irrationalzahlen gibt, war bisher nicht bekannt.

Es ist dem Vortragenden gelungen, eine ganze Reihe von unendlichen Klassen algebraischer Irrationalzahlen vom Grade n aufzudecken, deren Jacobischer Algorithmus periodisch wird. Es handelt sich dabei namentlich um die Systeme

$$w, w^2, w^3, \ldots, w^{n-1},$$

mit

$$w = \sqrt[n]{D^n \pm d},$$

D,d,n natürlich, $n \geq 3$, d/D.

H. Brückner: Eine explizite Formel zum Reziprozitätsgesetz für Primzahlexponenten p.

Sei k ein diskret bewerteter vollständiger Körper der Charakteristik 0 mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik $p \neq 0$. K ent-

halte die p-ten Einheitswurzeln. Das Problem, das Normsymbol $(a,b)_p$ in k durch eine explizite Formel darzustellen, ist in voller Allgemeinheit (sogar für Exponenten p^n) von I.R.Safarevic gelöst worden. Die Safarevic'sche Formel hängt allerdings von den 'Exponenten' einer bestimmten Basisdarstellung ab.
Für Primzahlexponenten p kann man das Normsymbol auch ohne den Umweg über die Safarevic'sche Basisdarstellung explizit ausdrücken, und zwar durch eine im Bau sehr einfache Formel, die als Verallgemeinerung der bekannten Näherungsformel sowie der für die p-ten Kreiskörper geltenden scharfen Formeln angesehen werden kann. Sie ist ferner bemerkenswert durch ihre formale Analogie zu der von H.L.SCHMID gefundenen Formel zu dem entsprechenden Problem in algebraischen Funktionenkörpern.

C. Meyer: Klasseninvarianten quadratischer Formen.

Es werden elementar-arithmetische Klasseninvarianten ganzzahliger binärer quadratischer Formen untersucht, welche mittels Dedekindscher Summen gebildet sind. Vorzugsweise handelt es sich hierbei um indefinite Formen, deren durch hyperbolische Modulsubstitutionen vermittelte Automorphien bei der Definition die wesentliche Rolle spielen. In vielen Fällen kann die Klasseninvarianz benutzt werden, um die einzelnen Äquivalenzklassen der Formen zu trennen. Jedoch besitzen, wie numerische Beispiele zeigen, die eingeführten elementaren Klasseninvarianten nicht in jedem Falle klassentrennende Eigenschaft. Schließlich sei bemerkt, daß sich die durchgeführten Untersuchungen auf Grund des bekannten eineindeutigen Zusammenhangs zwischen Formenklassen und Ringidealklassen quadratischer Zahlkörper gleichzeitig als Beiträge zur algebraischen Zahlentheorie ansehen lassen. Hier haben die eingeführten Definitionen und anschließenden Untersuchungen letzlich auch ihre Wurzel.

J.J. Payan: Polynomes irréductibles a coefficiénts rationnels.

Après avoir étudié le groupe de Galois des corps kummériens galoisiens relativement au corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, je m'interesse a leurs sous-corps de degré premier relativement a $\mathbb{Q}$. L'étude précédente permet de contruire les polynomes admettant pour racines des éléments conjugés irrationnels d'un corps. Le cas des corps abéliens apparait comme un cas particulier.

K. Lakkis: Die Galoisschen Gausschen Summen von Hasse.

Es sei B eine normale Erweiterung über dem lokalen Zahlkörper A mit der Automorphismengruppe U. Es sei ferner $\aleph$ ein Charakter von U. $\aleph$ hat nach R. Brauer eine Darstellung als Linearkombination von induzierten Charakteren abelscher Charaktere von Untergruppen von U. Mit Hilfe einer R. Brauerschen Darstellung von $\aleph$ wird die lokale Gaussche Summe $\tau(\aleph,B/A)$ definiert. $\tau(\aleph,B/A)$ ist bis auf einen i-Potenzfaktor eindeutig durch $\aleph$ definiert, und der i-Potenzfaktor ist 1, wenn der Grad $[B:A]$ ungerade ist.
$\tau(\aleph,B/A)$ ist eine ganzalgebraische Zahl, und man kann angeben, in welchem Körper sie liegt.
Die Hassesche Gaussche Summe $\tau(\aleph,N/K)$ (N ein Normalkörper über dem endlich-algebraischen Zahlkörper K mit der Automorphismengruppe G und $\aleph$ ein Charakter von G) hat eine Komponentenzerlegung in lokalen Gausschen Summen. Daraus folgt, daß $\tau(\aleph,N/K)$ eine ganzalgebraische Zahl ist und in einem gewissen Körper liegt, der explizit angegeben wird.

I.R. Schafarewitsch: Klassenkörperturmsatz.

Seien k ein algebraischer Zahlkörper, l eine Primzahl und S eine endliche Menge von Primstellen von k. G_S bezeichne die Galoisgruppe der maximalen l-Erweiterung von k, in der höchstens Primstellen aus S verzweigt sind. Es wurde ein Satz über den Zusammenhang der Anzahl der Erzeugenden und der Anzahl der Relationen von G_S bewiesen. Aus diesem folgt, daß G_S unendlich ist, wenn nur die Anzahl ihrer Erzeugenden hinreichend groß ist im Vergleich zum Range $[k:R]$. Insbesondere kann man damit die Existenz unendlicher Klassenkörpertürme beweisen.

Der folgende Vortrag war auf Russisch mit einer Simultanübersetzung von H. Koch.
I.A. Kostrikin: Zum Klassenkörperturmsatz.

Nach Golod und Schafarewitsch besteht zwischen der Anzahl d(G) der Erzeugenden und der Anzahl r(G) der Relationen einer endlichen p-Gruppe die Ungleichung $r(G) > (\frac{d(G)-1}{2})^2$. Dieses Ergebnis wurde von Winberg auf $r(G) > (\frac{d(G)}{2})^2$ verbessert. Es bestand nun die Vermutung von Mennicke, daß sogar $r(G) > \frac{d(G)(d(G)+1)}{2}$ gilt. Diese Vermutung wird hier widerlegt, und zwar durch Konstruktion einer p-Gruppe $(p \neq 2)$ mit $d = 2^n$ Erzeugenden, für die $r \leq \frac{1}{3}(d^2-1)+d$. Man konstruiert dazu zuerst einen Lie-ring mit d Erzeugenden und $\frac{1}{3}(d^2-1)$

Relationen. Eine Gruppenmultiplikation o wird dann durch $x \circ y = x + y + \frac{1}{2}[xy]$ definiert. Betrachtet man das Ganze über Z_p, so hat man die gewünschte p-Gruppe.

H. Koch: <u>l-Erweiterungen von algebraischen Zahlkörpern</u>.

l sei eine Primzahl, k ein endlich algebraischer Zahlkörper und S eine beliebige Menge von Primstellen aus k. Mit k_S werde die maximale l-Erweiterung von k bezeichnet, in der nur die Primstellen aus S verzweigt sind. $G(k_S/k)=G_S$ wird beschrieben als Pro-l-Gruppe mit einem minimalen Erzeugendensystem und definierenden Relationen. Die Relationen werden modulo der zweiten zentralen Ableitung von G_S bzw. der zweiten zentralen l-Ableitung von G_S bestimmt. Im Falle, daß k der Körper der rationalen Zahlen ist, ergibt sich ein vereinfachter Beweis eines Satzes von Fröhlich ('Fields of Class Two'). Weiter wird die Formel von Schafarewitsch über die Anzahl von Erzeugenden und Relationen von G_S neu bewiesen.

A. Néron: <u>Heights and theta-functions</u>.

Let A be an abelian variety defined over an algebraic number field k, A_k denote points rational over k. There is one and only one map $h_o : A_k \to \mathbb{R}^+$ of the form q + l (q quadratic, l linear) and such that $|h-h_o|$ is bounded, where h denotes the(additive) height. The proof uses a local symbol $(X,\mathfrak{A})_v$ defined by the following theorem: Let K be algebraically closed, v a proper valuation on K, A as above. With each pair $(X,\mathfrak{A})$ consisting of a divisor X and a 0-cycle $\mathfrak{A}$ of degree 0, both rational over K and such that supp $X \cap$ supp $\mathfrak{A} = \emptyset$, we can associate in a unique way a real number $(X,\mathfrak{A})_v$ such that (a) $(X,\mathfrak{A})_v$ is bilinear, (b) if X is the divisor of a function f, $(X,\mathfrak{A})_v = v(f(\mathfrak{A}))$, (c) $(X,\mathfrak{A})_v$ is translation invariant, (d) If U(X) is the complement of supp X, $a_o, a \in U(X)$, then $(X,(a)-(a_o))_v$ is locally bounded as a function of a. When v is archimedean, $(X,\mathfrak{A})_v$ can be interpreted in terms of the theta-function of A.

W. Leopoldt: <u>Über eine Klasse p-adischer Funktionen</u>.

Es werden Zahlenfolgen $A: \mathbb{N} \to \Omega$ mit Werten in einer vollständigen Erweiterung Ω des rational- p-adischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}_p$ betrachtet, und es wird die Frage gestellt und beantwortet, welche Folgen A die Entwicklung $A(m) = \sum_n a_n g_n^m$ mit $a_n \to 0$ gestatten, wobei $g_n^m = \frac{1}{n!} \Delta_{x=0}^m x^m$ bedeutet. Das Ergebnis: Solche Folgen A sind charakterisiert dadurch, daß sie auf jeder Restklasse $\mathbb{N}_a = \{m \in \mathbb{N}, m \equiv a(p-1)\}$ eine stetige p-adi-

sche Ergänzung besitzen. Anders ausgedrückt: die Banachsche Algebra $\mathcal{A}$ dieser Folgen ist die direkte Summe von p-1 Exemplaren der Banachschen Algebra $\mathcal{L}$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{Z}_p = \{S \in \mathbb{Q}_p \mid |S|_p \leq 1\}$ und der Banachschen Algebra $\mathfrak{N}$ der Nullfolgen. Der Zusammenhang dieser Fragestellung mit der analytischen Behandlung der in die p-adische Klassenzahlformel für reelle abelsche Zahlkörper eingehenden p-adischen Dirichlet'schen L-Funktionen wird erörtert.

A. Menalda: Theta-functions and representations.

k is a totally real algebraic number field, $\Gamma(1)$ the group of 2×2 matrices whose elements are integers of k and whose determinant is 1. For an integral ideal $\mathfrak{y}$, $\Gamma(\mathfrak{y})$ denotes the subgroup of those elements of $\Gamma(1)$ that are congruent to the unit matrix modulo $\mathfrak{y}$. The problem is to find the irreducible representations of the finite group $\Gamma(1)/\Gamma(\mathfrak{y})$. This problem we solve for the case $\mathfrak{y} = \mathfrak{p}$ is a prime ideal. To this end, theta-series are introduced with the aid of a totally imaginary quadratic extension $K = k(\sqrt{\mu})$ of k. The transformation formulae for these functions yield a representation of $\Gamma(1)/\Gamma(\mathfrak{y}\mathfrak{d})$, where $\mathfrak{d}$ is the relative discriminant of K/k. If $(\mathfrak{y},\mathfrak{d})=1$ we deduce from this a representation of $\Gamma(1)/\Gamma(\mathfrak{y})$. For the case $\mathfrak{y}=\mathfrak{p}$ this representation is split into irreducible components. The result depends only on the value $(\frac{\mu}{\mathfrak{p}})$. The cases $(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}) = 1$ and $(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}) = -1$ together yield all irreducible representations.

M. Kneser: Galois-Kohomologie p-adischer Matrizengruppen.

k sei ein bewerteter vollständiger Körper der Charakteristik 0 mit endlichem Restklassenkörper, K eine galoissche Erweiterung endlichen Grades mit der Galoisgruppe g. G sei eine über k definierte algebraische Matrizengruppe, G_K die Gruppe der über K rationalen Elemente von G. Wenn G einfach zusammenhängend ist (im Sinne algebraischer Gruppen, d.h. es soll keine echte Überlagerungsgruppe geben), dann besteht die eindimensionale Galois-Kohomologie $H^1(g,G_K)$ nur aus einem Element.
Zum Beweis werden neuere Ergebnisse von Steinberg über Klassen konjugierter Elemente in solchen Gruppen verwendet.

G. Harder: Galoiskohomologie globaler Matrizengruppen.

Sei $\mathfrak{G}$ eine halbeinfache, einfach zusammenhängende, über einem algebraischen Zahlkörper k definierte, algebraische Gruppe. Es gibt die folgende interessante Vermutung: Die Abbildung $H^1(k,\mathfrak{G}) \to \prod_{v \in S_\infty} H^1(k_v, G)$

ist bijektiv. Für klassische Gruppen ist dies bekannt. Es wurde hier in zwei weiteren Fällen bestätigt: (I) G eine trialitäre Form der D_4, und (II) k rein imaginär und G innere Form der E_6.

S. Becken: <u>Hermitesche Formen in Zahlkörpern und Quaternionenschiefkörpern.</u>

D sei ein Schiefkörper mit Anti-Involution, V ein n-dimensionaler Vektorraum und (x,y) eine bezüglich der Anti-Involution schiefhermitesche Form auf V. Auf der zugehörigen unitären Gruppe U wird eine Spinornorm erklärt, deren Kern U_1 die Kommutatorgruppe U' enthält. Drei Fälle wurden betrachtet:

(I) D algebraischer Zahlkörper. Dann ist $U_1 = U^+$.

(II) D Quaternionen über algebraischem Zahlkörper mit der Standardinvolution: $U = U^+$.

(III) Wie (II) aber mit Nichtstandardinvolution: $U_1 = U$. Für den Spinorkern U_1 gilt das Hasse-Prinzip: $\bigcap_{\mathfrak{p}}(U \cap U_{\mathfrak{p}1}) = U_1$. In den Fällen (I) und (III) erhält man den starken Approximationssatz für den Spinorkern der orthogonalen Gruppe im indefiniten Fall.

H. Zassenhaus: <u>Die Diskriminante von algebraischen Schiefkörpern</u>.

Ein Schiefkörper mit endlicher Basis über dem rationalen Zahlkörper wird ein algebraischer Schiefkörper genannt. Seine Diskriminante ist eindeutig definiert als die Diskriminante irgendeiner Maximalordnung bezüglich der reduzierten Spur über seinem Zentrum. Der Hauptsatz der Theorie der hyperkomplexen Systeme (und ein Hauptsatz der Klassenkörpertheorie) besagen, daß die Diskriminante genau dann 1 ist, wenn der Schiefkörper gleich seinem Zentrum ist. Es werden die bisher erhaltenen Methoden, den Satz auf geometrischem Wege in Spezialfällen zu beweisen, diskutiert.

P. Roquette: <u>Zerfällung von Algebren durch Funktionenkörper</u>.

Ist K ein elliptischer Funktionenkörper über einem lokalen Körper k, so ist die Ordnung der (zyklischen) Gruppe der von K zerfällten Algebrenklassen gleich dem kleinsten positiven Divisorgrad von K. Dies folgt aus der Tatsache, daß K eine zentral einfache Algebra A über k genau dann zerfällt, wenn A von allen Restklassenkörpern $K_{\mathfrak{p}}$ nach Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K zerfällt wird. Die im Vortrag geäußerte Vermutung, daß sich dieser Satz auch für Körper K beliebigen Geschlechts über beliebigen Konstantenkörpern k beweisen ließe, hat sich inzwischen als falsch erwiesen.

W.-D. Geyer: Ein algebraischer Beweis des Satzes von Weichold für reelle algebraische Funktionenkörper.

Sei F/R ein reeller algebraischer Funktionenkörper einer Variablen vom Geschlecht g, die Kurve γ seiner Stellen 1. Grades zerfalle in r Komponenten. Sei E/K die komplexe Konstantenerweiterung von F/R, G = G(E/F) = G(K/R). Das Periodengitter W der ganzen Differentiale ist als G-Modul durch g und r bestimmt. Um dies explizit zu zeigen, werden die Kohomologiegruppen der Divisorklassengruppe 0. Grades C_o von E/K (es ist ja $C_o \approx K^g/W$) berechnet:

$$\# H^0(G,C_o) = \# H^{-1}(G,C_o) = \begin{cases} 2^{r-1} & \text{für } r > 0 \\ 1 & \text{für } r = 0,\ g = 0 \bmod 2 \\ 2 & \text{für } r = 0,\ g = 1 \bmod 2 \end{cases}$$

Nebenbei werden folgende Fragen behandelt: Wann zerfällt F den reellen Quaternionenkörper? Wann enthält F den nichtrationalen reellen Funktionenkörper vom Geschlecht 0? Kennzeichnung von $N_{E|F}(E^\times)$ durch das Verhalten auf γ. Schiefkörper über F.

Im Anschluß an den Vortrag von Herrn Geyer fand sich noch Zeit für eine Mitteilung von Herrn Leopoldt, deren Zusammenfassung nun folgt:

W. Leopoldt: Über ein Problem von Kostrikin.

Es wird gezeigt: Ist $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$, $q \equiv 1 \bmod 2$, und $n \geq 3$, sowie $\Phi_n(x)$ das n-te Kreisteilungspolynom, so gibt es stets eine Primzahl p mit $p \mid \Phi_n(q)$ und $p \nmid n$ (also $p \equiv 1 \bmod n$). Hieraus wird die folgende von Kostrikin im Rahmen seines Vortrages gestellte Frage beantwortet: Eine ungerade Primzahlpotenz $q = p_o^e$ sei gegeben. Gibt es dann natürliche Zahlen n mit der Eigenschaft: Für jede Primzahl p mit $p \mid q^n - 1$ gibt es ein $n_p < n$ mit $p \mid q^{n_p} - 1$? Antwort für $n \geq 3$: Nein. Im Falle q = Mersennesche Primzahl jedoch hat n = 2 diese Eigenschaft. Nach Kostrikin folgt daraus die Nichtexistenz homogener Algebren über endlichen Körpern einer Charakteristik > 2.

H. Popp: Zur Reduktionstheorie algebraischer Funktionenkörper.

k sei ein vollkommener, unendlicher Körper der Charakteristik p>0. Dann ist jeder Funktionenkörper einer Variablen über k reguläre Reduktion eines Funktionenkörpers der Charakteristik 0. Es wurde über einen elementaren Beweis dieses Satzes berichtet.

[illegible] Funktionenkörper.

[illegible] folgende Fragen [illegible] Wenn [illegible]

[illegible] Spezialfall [illegible]

[illegible] Fragen [illegible]

[illegible] Funktionenkörper.

[illegible] $p \geq 0$.

Denn [illegible] jede [illegible] endlicher Körper [illegible]

Dabei [illegible]

R. Berger: Differenten regulärer Ringe.

Es seien $R \supseteq P$ kommutative, ganz abgeschlossene, noethersche Integritätsbereiche; der Quotientenkörper K von R sei endlich separabel über dem Quotientenkörper k von P. Zwischen den drei Differenten $\vartheta_D(R/P)$ (Dedekind), $\vartheta_N(R/P)$ (Noether) und $\vartheta_K(R/P)$ (Kähler) besteht die Beziehung:
$\vartheta_D \supseteq \vartheta_N \supseteq \vartheta_K \supseteq \vartheta_N^{\,n}$ mit passendem n. Für die Übereinstimmung $\vartheta_D = \vartheta_K$ ist notwendig und hinreichend, daß die Primärkomponenten sämtlich zu minimalen Primidealen gehören. Falls R und P regulär sind (Quotientenringe nach allen Primidealen reguläre lokale Ringe), zeigt eine einfache Abschätzung des Differentialmoduls von R/P, daß dieser die projektive Dimension ≤ 1 hat, woraus folgt, daß $\vartheta_K(R/P)$ lokal ein Hauptideal ist und somit die gewünschte Eigenschaft hat.

H. Benz: Zur Invariantenbestimmung in lokalen einfachen Algebren.

Es handelt sich um einen Beitrag zu der von Hasse gestellten Aufgabe, die Darstellung einer lokalen einfachen Algebra A als verschränktes Produkt eines maximalen galoisschen Teilkörpers Z mit dessen Galois-Gruppe auf die von ihm angegebene zyklische Normalform zu transformieren. Hierzu wird A in geeigneter Weise arithmetisiert. Es zeigt sich, daß die Lösung des Problems, für die eine Lösungsmöglichkeit skizziert wird, entscheidend von der Verzweigungsstruktur von Z über dem Grundkörper K abhängt.

K. Hoechsmann (Hamburg)