Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Arbeitsgemeinschaft über das Klassenkörperturmproblem
18. bis 23. Oktober 1964.

Die Leitung der Tagung hatte P. ROQUETTE (Tübingen).
Die weiteren Teilnehmer waren:
R. Berger (Berlin), S. Böge (Heidelberg), W. Böge (Heidelberg), W. Felscher (Freiburg), W. Gaschütz (Kiel), G. Harder (Hamburg), K. Hoechsmann (Tübingen), W. Jehne (Heidelberg), O. Kegel (Frankfurt a.M.) H. König (Köln), E. Kunz (Heidelberg), H. Kupisch (Saarbrücken), E. Lamprecht (Saarbrücken), H. Leptin (Hamburg), D. Puppe (Saarbrücken).

Die schon vor Jahrzehnten gestellte Frage, ob es unendliche Klassenkörpertürme gibt oder nicht, wurde im Frühjahr 1964 von den russischen Mathematikern Golod und Schafarewitsch positiv entschieden. Diesem Ergebnis war die Tagung der Arbeitsgemeinschaft gewidmet. Darüber hinaus beschäftigten sich die letzten beiden Vorträge mit dem Versuch, die (unendlichen) Galoisgruppen der maximalen ℓ-Erweiterungen lokaler und globaler Körper zu beschreiben. Die ersten drei Vortragenden legten das Fundament für die Hauptarbeit mit Berichten über bekannte Resultate der Kohomologietheorie und Klassenkörpertheorie.

Vorträge:

W. Böge: Kohomologie endlicher Gruppen.

Sei G eine endliche Gruppe. Man betrachtet eine Z[G]-freie Auflösung von Z: $0 \leftarrow Z \overset{\varepsilon}{\leftarrow} X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \dots$ und die duale Auflösung

$$0 \to Z^* \overset{\mu}{\to} X_{-1} \to X_{-2} \to \dots \quad \text{mit } X_{-i-1} = \mathrm{Hom}_Z(X_i, Z) \text{ und}$$

$Z^* = \mathrm{Hom}(Z,Z)$.

Durch natürliche Identifizierung von Z^* mit Z erhält man einen 'Komplex für G':

$$\begin{tikzcd} \dots & X_{-2} \arrow[l] & X_{-1} \arrow[l] & & X_0 \arrow[ll] \arrow[dl, "\varepsilon"] & X_1 \arrow[l] & \dots \arrow[l] & = X_* \\ & & & Z \arrow[ul, "\mu"] & & & & \end{tikzcd}$$

Für einen G-Modul A werden die Homologiegruppen des Komplexes $\mathrm{Hom}_G(X_*,A)$ die Kohomologiegruppen von G mit Koeffizienten in A genannt.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Bezeichnung: $H^i(G,A)$. Für kleine (positive und negative) i wird $H^i(G,A)$ gedeutet. Die wichtigsten Eigenschaften des Funktors $\{H^i(G,\cdot)\}$ werden bewiesen. Weiter wird gezeigt, daß für den induzierten Modul A eines U-Moduls B (U: Untergruppe von G) Shapiros Lemma gilt: $H^i(U,B) \simeq H^i(G,A)$. Schließlich wird noch der Dualitätssatz

$$H^i(\hat{A}) \simeq \widehat{H^{-i-1}(A)}$$

erwähnt. Dabei bedeutet ^ jeweils den Charaktermodul.

S. Böge: Der Satz von Tate.

N sei Normalteiler einer endlichen Gruppe G,A ein G-Modul. Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(G/N) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(N)^{G/N} \xrightarrow{\text{Tg}} H^2(G/N) \xrightarrow{\text{Inf}} H^2(G)$$

exakt. Dabei ist $H(G/N) = H(G/N,A^N)$ zu lesen; die Abbildungen Inflation, Restriktion und Transgression werden erklärt. Ist $H^\nu(N,A) = 0$ für $\nu = 1 \ldots r-1$, so folgt auch die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow H^r(G/N) \xrightarrow{\text{Inf}} H^r(G) \xrightarrow{\text{Res}} H^r(N).$$

Hieraus erhält man den Satz über kohomologische Trivialität: $H^r(U,A) = H^{r+1}(U,A) = 0$ für irgendein $r \in Z$ und alle Untergruppen $U \subset G \Longrightarrow H^\nu(G,A) = 0$ für alle $\nu \in Z$. Aus diesem folgt der Satz von Tate in der folgenden Fassung: Sei f: A → B ein G-Homomorphismus; für irgendein $r \in Z$ und alle $U \subset G$ seien Sequenzen

$$H^{r-1}(U,A) \xrightarrow{f^{r-1}} H^{r-1}(U,B) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^r(U,A) \xrightarrow{f^r} H^r(U,B) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^{r+1}(U,A) \xrightarrow{f^{r+1}} H^{r+1}(U,B) \qquad \text{exakt.}$$

Dann ist f^ν ein Isomorphismus für alle ν. Mittels Dimensionsverschiebung erhält man das Korollar:
Ist $H^1(U,A) = 0$, $H^2(U,A)$ zyklisch der Ordnung $(U:1)$ für alle $U \subset G$, so ist $H^0(G,A)$ isomorph zu $H^{-2}(G,Z) = G/G'$ (G' = Kommutatorgruppe).

G. Harder: Grundtatsachen der Klassenkörpertheorie.

Ist G eine pro-endliche Gruppe, M ein topologischer G-Modul (d.h. die Fixgruppe eines jeden Elements ist offen in G), so erhält man durch Bildung des direkten Limes Kohomologiegruppen $H^i(G,M)$, die alle wesentlichen Eigenschaften der Kohomologie endlicher Gruppen besitzen.

k sei ein lokaler Körper, $\bar{k}$ sein algebraischer Abschluß und G die Galoisgruppe von $\bar{k}/k$. Der wesentliche Schritt in der lokalen Klassenkörpertheorie liegt im Beweis der Existenz eines kanonischen Isomor-

Gefördert durch
Deutsche Forschungsgemeinschaft

phismus $\mathrm{inv}_k: H^2(G,\bar{k}^*) \to Q/Z$, mit der Eigenschaft, daß für Oberkörper K/k: $\mathrm{inv}_K \circ \mathrm{Res}_{k,K} = [K:k]\ \mathrm{inv}_k$. Aus dem Satz von Tate folgt dann die Existenz eines kanonischen Isomorphismus
$\omega_k: k^*/N_{K/k}K^* \to G^a(K/k)$ für jeden normalen Oberkörper K/k; dabei bedeutet $G^a(K/k)$ die Faktorkommutatorgruppe der Galoisgruppe von K/k.
Jetzt bezeichne k einen globalen Körper, $k_{\mathfrak{p}}$ den zur Primstelle $\mathfrak{p}$ von k gehörigen lokalen Körper. Es werden die Idelegruppe I_k und die Ideleklassengruppe $C_k = I_k/k^*$ [1] kompakten Gruppe I_k; I_k^o/k^* ist kompakt, wobei I_k^o die Idele der Norm 1 bedeutet. Hieraus folgen die Endlichkeit der Divisorenklassengruppe Cl_k sowie der Dirichlet'sche Einheitensatz.
Sei K/k eine normale Erweiterung. Man hat eine kanonische Injektion $C_k \to C_K$. Ist G die Galoisgruppe von K/k, so gilt $C_K^G = C_k$. Außerdem hat man die Normabbildung $N_{K/k}: C_K \to C_k$.
Die Hauptschritte in der Entwicklung der Theorie sind die Sätze, welche die Anwendung des Satzes von Tate auf $H(G,C_K)$ gestattet.

1. $H^1(G,C_K) = 0$ folgt aus dem Hasseschen Fundamentalsatz der Algebrentheorie.
2. Die Existenz eines kanonischen Isomorphismus $\mathrm{inv}_{K/k}: H^2(G,C_K) \to \frac{1}{n}Z/Z$ (wobei $n = [K:k]$) mit derselben Eigenschaft bezüglich Restriktion wie im lokalen Fall.

Nach dem Satz von Tate gibt es dann einen Isomorphismus
$\omega_k: C_k/N_{K/k}C_K \to G^a(K/k)$ (Reziprozitätsgesetz).
Schließlich hat man noch den Existenzsatz: Zu jeder offenen Untergruppe $B \subset C_k$ mit $(C_k:B) < \infty$ gibt es einen abelschen Erweiterungskörper K/k mit $B = N_{K/k}C_K$. Denkt man sich die Multiplikationsgruppe $k_{\mathfrak{p}}^*$ einer lokalen Komponente $k_{\mathfrak{p}}$ in C_k eingebettet, so kann man aus der Größe des Durchschnitts $B \cap k_{\mathfrak{p}}^*$ das Zerlegungsverhalten der Stelle $\mathfrak{p}$ in K ablesen. (Zerlegungsgesetz).

D. Puppe: <u>Die erste fundamentale Ungleichung.</u>

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, E_k die Einheitengruppen von k, ϱ deren p-Rang (p: feste Primzahl). K/k sei die maximale normale, unverzweigte p-Erweiterung von k. Man nehme an, ihre Gruppe G sei endlich. Weiter sei Z_p die additive Restklassengruppe modulo p, und

$$d = \dim H^1(G,Z_p) = \dim H^{-2}(G,Z_p)$$
$$r = \dim H^2(G,Z_p) = \dim H^{-3}(G,Z_p).$$

Die Gleichheit folgt in beiden Fällen aus dem Dualitätssatz. Durch Bildung des alternierenden Produkts von Gruppenordnungen in der aus

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{p} Z \longrightarrow Z_p \longrightarrow 0$$

[1] definiert. k^* ist eine diskrete Untergruppe der lokal

abgeleiteten exakten Kohomologiesequenz ergibt sich:

$$r - d \leq \text{Rang } H^{-3}(Z).$$

Aus der Klassenkörpertheorie (Isomorphie von $H^{-3}(Z)$ und $H^{-1}(C_K)$) folgt nun die erste fundamentale Ungleichung: $r - d \leq \rho$.

Dieser Vortrag legte zusätzlich noch das Fundament für den nächsten. Es wurde nämlich bewiesen, daß es für jede endliche p-Gruppe G eine $Z_p[G]$ - freie Auflösung:

$$0 \longleftarrow Z_p \xleftarrow{\lambda_o} X_o \xleftarrow{\lambda_1} X_1 \xleftarrow{\lambda_2} X_2 \longleftarrow \ldots \text{ mit } X_o = Z_p[G],$$

$X_1 \simeq d\cdot Z_p[G]$, $X_2 \simeq r\cdot Z_p[G]$ gibt, derart, daß ker $\lambda_o = I$ (Augumentationsideal, erzeugt von Elementen der Form $\sigma-1$) und ker $\lambda_1 \subseteq I\cdot X_1$.

W. Gaschütz: Die zweite fundamentale Ungleichung.

Für eine endliche p-Gruppe G gibt es nach dem vorangehenden Vortrag einen G-Homomorphismus $\varphi: d\cdot Z_p[G] \to Z_p[G]$ mit im $\varphi = I$, ker $\varphi \subseteq IA$ (wobei $A = d\cdot Z_p[G]$); außerdem einen Epimorphismus $\psi: r\cdot Z_p[G] \to$ ker φ. Setze B = ker φ = im ψ. - Die Z_p-Dimensionen der Faktoren in der absteigenden Kette $I \supseteq I^2 \supseteq \ldots \supseteq I^n = 0$ sind gleich den entsprechenden Dimensionen der Urbilderkette $A = \varphi^{-1}(I) \supseteq \varphi^{-1}(I^2) \supseteq \ldots \supseteq \varphi^{-1}(I^n) = B$.

Da $I^{\nu}A \subseteq \varphi^{-1}(I^{\nu+1})$ (für $\nu = 0$ und 1 sogar gleich), kann man $\dim \varphi^{-1}(I^{\nu+1}) = \dim I^{\nu}A + \dim \varphi^{-1}(I^{\nu+1})/I^{\nu}A$ ansetzen. Setzt man $a_{\mu} = \dim \varphi^{-1}(I^{\mu+3})/I^{\mu+2}A$, $d_{\nu} = \dim I^{\nu}/I^{\nu+1}$ $(\nu,\mu \geq 0)$, so erhält man das Gleichungssystem

$$1 = d_o, \quad dd_o = d_1, \quad dd_{\nu} = d_{\nu+1} + (a_{\nu-1} - a_{\nu-2}), \quad \nu \geq 1,$$

wobei $a_{-1} = 0$.

Da $\varphi^{-1}(I^{\nu+1}) = B + I^{\nu}A$, ist andererseits $a_{\mu} = \dim B/B\cap I^{\mu+2}A$. Man betrachtet nun den Epimorphismus ψ und erhält aus $\psi(I^{\nu}[r\cdot Z_p[G]]) \subseteq B\cap I^{\nu+1}A$ $(\nu \geq 1)$ das Ungleichungssystem

$$a_{\mu} \leq r(d_o + \ldots + d_{\mu}) \quad (\mu \geq 0).$$

Nun multipliziere man beide Systeme mit aufsteigenden Potenzen eines positiven Parameters t. Dann ergeben sich für die Polynome

$$P(t) = \sum_{\nu \geq 0} d_{\nu}t^{\nu}, \quad R(t) = \sum_{\lambda \geq 0} t^{\lambda}, \quad S(t) = \sum_{\mu \geq 0} (a_{\mu} - a_{\mu-1})t^{\mu}$$ die Beziehungen

$$1 + dtP(t) = P(t) + t^2S(t) \quad \text{und} \quad S(t)\,R(t) \leq rP(t)\,R(t) .$$

Zusammen liefern sie die Ungleichung: $1 \leq P(t)\,[rt^2 - dt + 1]$, woraus man leicht $\frac{d^2+1}{4} \leq r$ schließt. Letzteres ist die zweite fundamentale Ungleichung.

W. Felscher: Zum Beweis der zweiten Ungleichung.

In diesem Vortrag haben d und r eine andere Bedeutung als vorher: d ist die minimale Erzeugendenzahl der Gruppe G, r die minimale

Gefördert durch
Deutsche Forschungsgemeinschaft

Anzahl von erzeugenden Relationen, d.h. die minimale Anzahl von Elementen einer freien Gruppe F mit d Erzeugenden, die benötigt werden, um den Kern R des natürlichen Homomorphismus $F \to G$ als Normalteiler von F zu erzeugen. Für endliche p-Gruppen G läßt sich aber beweisen, daß $d = \dim H^1(G,Z_p)$ und $r = \dim H^2(G,Z_p)$.
Auf Grund der neuen Deutung von d und r wird nun ein anderer Beweis für die Existenz einer exakten Sequenz $r \cdot Z_p[G] \xrightarrow{\psi} d \cdot Z_p[G] \xrightarrow{\varphi} I \to 0$ mit im $\psi \subseteq I\,(d \cdot Z_p[G])$ geliefert, und zwar nach der hektographierten Schrift von Roquette (Ohio State University).

O. Kegel: Anwendung und Verallgemeinerung der Ungleichung.

Ist k ein algebraischer Zahlkörper mit abbrechendem p-Klassenkörperturm, so folgt aus den beiden Ungleichungen, daß $\frac{d^2+1}{4} - d \leq \rho$, wobei d die minimale Erzeugendenzahl der Galoisgruppe des p-Klassenkörperturms, ρ der p-Rang der Einheitengruppe E_k bedeutet.
Der Hauptteil des Vortrags war einer Verallgemeinerung der Ungleichung $r \geq \frac{d^2+1}{4}$ auf endlichdimensionale Algebren gewidmet. Diese kann zur Widerlegung der Vermutung von Kurosch, daß algebraische Algebren lokal endlichdimensional sind, benutzt werden.

E. Lamprecht: Körper mit unendlichem Klassenkörperturm.

d_k bezeichne die minimale Erzeugendenzahl der Galoisgruppe des p-Klassenkörperturms eines algebraischen Zahlkörpers k. Behauptung: Für jede Primzahl p und eine beliebige Zahl $\tilde{d}$ gibt es Körper k vom Absolutgrad p mit $d_k \geq \tilde{d}$. Insbesondere kann erreicht werden, daß $\frac{d_k^2 + 1}{4} - d_k > \rho_k$; d.h., es gibt unendliche Klassenkörpertürme. Der Beweis benutzt Klassenkörpertheorie im Körper Q der rationalen Zahlen. Man nehme $\tilde{d}+1$ Primzahlen $q_0, \ldots, q_{\tilde{d}}$ mit $q_\nu \equiv 1 \bmod p$ und betrachte das Produkt $f = q_0 q_1 \ldots q_{\tilde{d}}$. X_f, die Gruppe der Restklassencharaktere mod f, ist direktes Produkt der entsprechenden Gruppen X_{q_ν} für die einzelnen q_ν. In jedem X_{q_ν} wähle man ein Element χ_ν der Ordnung p und betrachte den Klassenkörper k zum Produkt χ dieser Elemente. $[k:Q] = p$. Der Klassenkörper $\tilde{k}$ zum direkten Produkt X der von den χ_ν erzeugten Charaktergruppen ist unverzweigt und elementar abelsch vom Range $p^{\tilde{d}}$ über k.

H. Leptin: Diskriminantenabschätzungen.

Dieser Vortrag erinnert an den Versuch, das Abbrechen des Klassenkörperturms mit Hilfe einer verfeinerten Diskriminantenabschätzung zu beweisen. k_0 sei ein Körper des Grades n_0 und der Diskriminante

d_0 über Q, $k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset \ldots \subset k_\infty$ der Klassenkörperturm zu k_0, wobei $[k_i:k_0] = n_i$, Diskriminante von $k_i/Q = d_i$. Da die Relativdiskriminanten sämtlich 1 sind, folgt $d_i = d_0^{n_i}$. Man interessiert sich für Abschätzungen $d > \varphi(n)$ der Absolutdiskriminante d eines Körpers durch eine Funktion seines Grades n. In der gegenwärtigen Situation gilt dann $d_0 > \varphi(n_0 n_i)^{\frac{1}{n_i}}$. Hätte man ein φ mit $\lim \varphi(n_0 n)^{\frac{1}{n}} = \infty$, so würde daraus das Abbrechen des Klassenkörperturms (d.h. Endlichkeit der n_i) folgen. Die bekannte Minkowskische Diskriminantenabschätzung wurde erörtert.

W. Jehne: Maximale 1-Erweiterung eines lokalen Körpers.

Sei ℓ eine feste rationale Primzahl, k eine Erweiterung vom Range n eines p-adischen Körpers Q_p. Man sucht eine Beschreibung der Galoisgruppe der maximalen normalen ℓ-Erweiterung K von k als Pro-ℓ-Gruppe mit gewissen Erzeugenden und Relationen. Dabei unterscheidet man die Fälle: 1.) k enthält keine ℓ-ten Einheitswurzeln und 2.) k enthält die ℓ-ten Einheitswurzeln. Im ersten Falle ist die Gruppe frei mit einer bzw. n+1 Erzeugenden, je nachdem ob $\ell \neq$ p oder ℓ=p; wenn $\ell \neq$p, ist K/k unverzweigt, wenn ℓ=p folgt die Freiheit nach Schafarewitsch. Im zweiten Falle ist die Galoisgruppe G(K/k) eine sogenannte Demuschkin-Gruppe; d.h. eine Pro-ℓ-Gruppe G mit

a) $H^2(G, Z_\ell) \simeq Z_\ell$ und

b) Die durch das Cup-Produkt vermittelte Paarung
$H^1(G,Z_\ell) \times H^1(G,Z_\ell) \to H^2(G,Z_\ell)$ ist nicht entartet.

Die Eigenschaften a) und b) sind in der vorliegenden Situation leicht nachzuweisen. Der Rest des Vortrags beschäftigte sich mit der Form der nach (a) einzig notwendigen Relation. Die Anzahl der Erzeugenden hängt wieder davon ab, ob $\ell \neq$p oder ℓ=p: sie ist 2 bzw. n+2.

K. Hoechsmann: Maximale ℓ-Erweiterung eines globalen Körpers.

k sei ein algebraischer Zahlkörper, K die maximale ℓ-Erweiterung von k, G die Galoisgruppe von K/k, $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor von k, $k_\mathfrak{p}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Komplettierung, $k_\mathfrak{p}^{(\infty)}$ deren maximale ℓ-Erweiterung und schließlich $G_\mathfrak{p}$ die Gruppe von $k_\mathfrak{p}^{(\infty)}/k_\mathfrak{p}$. Durch geeignete Wahl eines festen über $\mathfrak{p}$ liegenden Primdivisors für jeden endlichen Zwischenkörper kann man die Zerlegungsgruppe $D_\mathfrak{p}$ von K/k bezüglich $\mathfrak{p}$ als den inversen Limes der entsprechenden endlichen Zerlegungsgruppen erklären. Es gibt einen Homomorphismus $\varphi_\mathfrak{p} : G_\mathfrak{p} \to D_\mathfrak{p} \subseteq G$.
Daraus bekommt man eine Abbildung der Kohomologien $H(G,Z_\ell) \to H(G_\mathfrak{p}, Z_\ell)$. Es wurde bewiesen, daß das Produkt dieser Abbildungen (über alle $\mathfrak{p}$)

ein Monomorphismus in Dimension 2 ist; d.h. $H^2(G,Z_\ell) \to \prod_{\mathfrak{g}} H^2(G_{\mathfrak{g}},Z_\ell)$ ist injektiv. Durch die bekannte Deutung von $H^2(Z_\ell)$ als 'Relationen' erhält man einen Beweis des folgenden Satzes von H. Koch: F sei eine freie Pro-ℓ-Gruppe, die einem minimalen Erzeugendensystem von G entspricht ($H^1(F,Z_\ell) \simeq H^1(G,Z_\ell)$). Man konstruiere sich freie Pro-ℓ-Gruppen $F_{\mathfrak{g}}$, derart daß folgende Diagramme kommutativ werden:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & R & \to & F & \to & G & \to & 1 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_{\mathfrak{g}}} & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_{\mathfrak{g}}} & & \\ 1 & \to & R_{\mathfrak{g}} & \to & F_{\mathfrak{g}} & \to & G_{\mathfrak{g}} & \to & 1 \end{array}$$

Dann wird R als Normalteiler von F von den Bildern $\varphi_{\mathfrak{g}}(R_{\mathfrak{g}})$ erzeugt.

Man kann ein minimales Erzeugendensystem von G so wählen, daß man auf diese Weise eine verhältnismäßig übersichtliche Beschreibung von G durch Erzeugende und Relationen bekommt.

K. Hoechsmann (Tübingen)