Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

22 (Letzter Bericht 1964)

Tagungsbericht

Zur Didaktik des mathematischen Gymnasialunterrichtes
vom 25. bis 30. Oktober 1964

Die Modernisierung des Mathematikunterrichts an Gymnasien war der Anlaß zu einer Tagung, die im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach unter Leitung der Herren Professoren M. Barner und K. Fladt vom 25. bis 30. Oktober 1964 stattfand. Teilnehmer waren Gymnasiallehrer, Vertreter der Schulbehörden und Hochschullehrer der deutschsprachigen Länder. Im einzelnen waren folgende Damen und Herren anwesend:

Arzt, Gymn. Prof. K., Tübingen
Athen, OSt. Dir. Dr. H., Elmshorn
Barner, Prof. Dr. M., Freiburg
Böhmer, K., Karlsruhe
Beisswanger, P., Tübingen
Botsch, OSt. Dir. O., Heidelberg
Denk, St. Prof. F., Fürth
Engel, StR. A., Stuttgart-Rohr
Fischer, StR. W., Fürth
Fladt, Prof. Dr. K., Freiburg/Calw
Flohr, Dr. F., Freiburg
Freund, Dr. H., Göttingen
Friedli, Dr. R., Bern
Gall, Oberschulrat H., Düsseldorf
Gericke, Prof. Dr. H., München
Götz, Gymn. Prof. W., Bad Cannstatt
Griesel, Dr. H. Letmathe
Hildebrandt, StR. R., Karlsruhe
Hruby, Landesschulinsp. E., Wien
Hürten, OStR. K. H., Köln
Jahner, Stud. Ass. H., Hagen
Jeger, Dr. M., Luzern
Jung, Doz. W., Seeheim
Karcher, H., Berlin
Karcher, Frau StRätin, Verden
Kipper, OSchulrätin Dr. E., Wiesbaden
Kirsch, Dr. A., Gießen
Klar, OSt. Dir. A., Lörrach
Knabe, OSchulrat P., Duisburg
Kropp, OSchulrat Dr. G., Berlin
Kunle, Prof. Dr. H., Karlsruhe
Laub, Gymn. Dir. Dr. J., Wien
Lauter, StR. Dr. J., Aachen
Maaß, Akad. Rat D., Karlsruhe
Oberschelp, Dr. A., Hannover
Ostermann, StR. Dr. F., Köln
Pickert, Prof. Dr. G., Gießen
Prade, Dr. H. Freiburg
Proksch, OSt. Dir. Dr. Ruth, Hannover
Raith, Gymn. Prof. F., Freiburg
Raussen, OStR. B., Trier
Röhrl, E., Stuttgart

Rudolph, K., Karlsruhe
Ruopp, Gymn. Prof. P., Schwäbisch Gmünd
Schön, Hofrat Dr. R., Wien
Schweizer, OSt. Dir. Prof. W., Tübingen
Seebach, OSt. Dir. Dr. K., München
Sielaff, StR. K., Hamburg
Steller, StR. E., Wildtal
Stephan, Gymn. Prof. H., Karlsruhe
Strunz, Prof. Dr. K., Würzburg
Toussaint, M., Karlsruhe
Wäsche, StR. H., Lübeck
Walter, Prof. Dr. W., Karlsruhe

Die Diskussion über die Modernisierung des Unterrichts war aufgegliedert nach den Sachgebieten Algebra, Geometrie, Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung, wobei jedem Teil ein ganzer Tag gewidmet war (für Wahrscheinlichkeitsrechnung ein halber Tag). Die Vorträge waren i.a. Berichte über eigene Unterrichtsversuche, und im Anschluß daran entwickelte sich jedesmal eine lebhafte Aussprache. In einer abschließenden Diskussion wurden die allgemein anerkannten Mindestforderungen zu einem "Fundamentalplan" zusammengestellt.

Es war von vornherein klar, daß in der kurzen Zeit höchstens die Aufstellung eines Kataloges der Begriffe möglich sein würde, die unbedingt auf der Schule behandelt werden sollten. Es wurde bedauert, daß nicht auch ein Stoffplan vorgelegt werden konnte, da eine nur abstrakte Aufzählung leicht utopisch und damit abschreckend wirkt. Erfahrungen der letzten Jahre, die auch in einigen Vorträgen zum Ausdruck kamen, und damit an die Anwesenden weitergegeben wurden, haben jedoch gezeigt, daß viele moderne Begriffe bereits durch eine andere Anordnung des Stoffes und etwas veränderte Unterrichtsschwerpunkte herausgearbeitet werden können. Damit ist eine kontinuierliche Modernisierung möglich, was für die Praxis wichtig ist. Außerdem führt ein Kanon wünschenswerter Begriffe zu neuen didaktischen Versuchen, die schon mehrfach bewiesen haben, daß manche Modernisierungswünsche keineswegs utopisch sind.

In dem Begriffskatalog am Schluß kommen einige Punkte nicht zum Ausdruck, die den Teilnehmern wichtig waren:

Moderne abstrakte Begriffe sollen erst eingeführt werden, wenn mehrere

Beispiele für sie zur Verfügung stehen. Zur Klärung des Körperbegriffs werden Restklassenkörper empfohlen, besonders da die Axiome vollständig durch Einsetzen bestätigt werden können. Auch für die Geometrie werden endliche Modelle, bei der Einführung in die Gleichungslehre endliche Grundmengen vorgeschlagen, da so zunächst schwierige abstrakte Beweise vermieden werden, die wichtigen Erscheinungen jedoch gelehrt werden können. Ferner müssen zu jedem abstrakten Begriff Beispiele gegeben werden, auf die er nicht zutrifft, vom Assoziativgesetz angefangen bis zur stetigen Funktion. Im letzten Fall kommt dazu, daß unstetige oder nicht überall differenzierbare Funktionen im täglichen Leben häufig sind. Der Unterschied zwischen affiner und metrischer Geometrie kann wahrscheinlich nicht nur durch solche Gegenüberstellungen deutlich gemacht werden sondern erst durch einen hinreichend langen rein affinen Lehrgang.

Insgesamt stehen die Ergebnisse der Tagung in erfreulicher Übereinstimmung mit denen anderer europäischer Reformbemühungen.

Im einzelnen wurden folgende Vorträge gehalten:

Kirsch, A. "Elementare Zahlbereichserweiterungen und Gruppenbegriff".

Der Gruppenbegriff kann auf der Schule auch bei Zahlbereichserweiterungen eingesetzt werden. Die folgende Darstellung ist für Lehrer gedacht, aber in dieser Form auch der Oberstufe angemessen. Eine unterstufengemäße Behandlung wird von H. Freund beschrieben.

Die Strukturen $(N,+)$ bzw. $(N \setminus \{O\}, \cdot)$ sind kommutative reguläre Halbgruppen, die in die Gruppen $(Z,+)$ bzw. $(\overset{+}{Q}, \cdot)$ eingebettet werden;

1) Konstruktion einer geeigneten Menge G
2) Definition einer Verknüpfung $\&$ in G.
3) Nachweis, daß $(G, \&)$ eine kommutative Gruppe ist
4) Umkehrbare homomorphe Abbildung von z.B. $(N,+)$ in $(G,\&)$
5) Identifizierung.

Dieser Einbettung geht zweckmäßig eine Betrachtung der endlichen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

additiven und multiplikativen Restklassengruppen voraus. (Dabei wird auch das Kopfrechnen geübt.)

Der didaktische Wert dieser Methode liegt darin, daß damit zugleich ein Muster für die späteren höheren Zahlbereichserweiterungen gegeben ist.

Fischer, W.L. "Freie Halbgruppen und endliche Automaten".

Aus den n Zeichen x_i eines Alphabets werden durch Hintereinandersetzen Worte gebildet, die mit der "Verkettung" als Verknüpfung eine freie Halbgruppe erzeugen. Ein endlicher Automat ist ein schwarzer Kasten, der endlich viel innere Zustände a_i hat und der den Worten der Halbgruppe der Eingangsseite Worte der Halbgruppe der Ausgangsseite zugeordnet. Das geschieht deterministisch mit der Ergebnisfunktion $\lambda : A \times X \rightarrow Y$, (A ist die Menge der inneren Zustände, X, Y die Menge der Eingangs- bzw. Ausgangsworte) und der Steuerungsfunktion $\delta : A \times X \rightarrow A$, die die inneren Zustände ändert. Beispiele:

1) alle Codierungen (u.a. genetische Probleme)

2) binäre Addiermaschinen

Lit.: Fletcher "Some Lessons on Mathematics", Cambridge Univ.Press

Jeger, M. "Boole'sche Algebra im Schulunterricht" (Bericht über einen Unterrichtsversuch).

Im obligatorischen Unterricht erwies sich die Boole'sche Algebra bei der Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen, vor allem aber der Kombinatorik (Eulersche φ-Funktion) und der Wahrscheinlichkeitsrechnung als sehr nützlich. In einer Arbeitsgemeinschaft wurden mit ihrer Hilfe die Grundelemente der Schaltalgebra behandelt und Relaisschaltungen entworfen. Das Ziel war der Bau eines funktionsfähigen Computers aus 450 Telefonrelais usw. (Demonstrationsgerät für die Schule, acht Programme, achtstellig). Dazu wurden noch Schaltungen mit Folgeverhalten (Flip-Flop) besprochen. Durch diese Beschäftigung werden die Schüler an mathematische Probleme geführt, die sonst schwer zu-

gänglich sind. (z.B.: Was ist Formalisierbarkeit?)

Götz, W. "Zur Gleichungslehre".

Folgende Vorschläge zur Verbesserung der Bezeichnungsweise in der Gleichungslehre wurden zur Diskussion gestellt :

Anstelle von "Gleichung" soll gesetzt werden "Bedingung" (erfüllbar, unerfüllbar) oder besser "Forderung". "Aussageform" wird wegen zu großen logischen Aufwandes abgelehnt. Statt des Zeichens "=" soll in Bedingungen das Zeichen "$\stackrel{!}{=}$" benützt werden. Zur Erläuterung des Begriffes "Variable" wurden Beispiele aus Physik und Geometrie vorgeführt.

Lauter, J. "Aufbau der Gleichungslehre nach logischen und mengentheoretischen Gesichtspunkten".

Zur systematischen Behandlung der Gleichungslehre wurden Begriffe wie Grundmenge, Term, Definitionsbereich eines Terms, Lösungsmenge usw. definiert. Definitionsbereich und Lösungsmenge wurden zunächst durch vollständiges Einsetzen einer endlichen Grundmenge bestimmt. Dadurch gelangt man auf einfache Weise zu einer frühzeitigen Behandlung aller bei der Lösung von Gleichungen auftretenden Probleme. Bei der Umformung von Gleichungen wurde unterschieden zwischen Termersetzungen und Gleichungsumformungen, deren Begründung mit Hilfe der Körperaxiome (besonders der Kürzungsregel der Multiplikation) gegeben wurde.

Hürten, K.H. "Spiegelungs-, Bewegungs- und Kongruenzgeometrie". Eine sachdidaktische Analyse und ihre Bedeutung für die Propädeutik.
Im ersten Teil des Vortrags wurde der algebraische Zusammenhang zwischen Spiegelungs-, Bewegungs- und Kongruenzgeometrie herausgearbeitet. Mit Hilfe der Spiegelungen wurden endliche affine Inzidenzstrukturen eingeführt. Dabei wurde am Beispiel des Tetraedermodells für die affine Ebene mit vier Punkten und sechs Geraden darauf hingewiesen, wie man den Schüler erziehen kann, Worte der Umgangssprache für mathematische Begriffe (Punkt, Gerade), so zu verstehen, wie sie definiert wurden. Sodann wurde die verschiedene Stellung von Figuren in den drei Systemen

behandelt. (Gerade als Fixmenge bei Spiegelungen, als Bahn bei der Bewegungslehre und als Elementarfigur in der Kongruenzlehre). Die didaktischen Konsequenzen wurden anhand einiger elementargeometrischer Aufgaben angedeutet.

Beisswanger, P. "Zur Methodik der Verhältnislehre".

Vor Euklid waren Kettenbruchentwicklungen das einzige Mittel, die Gleichheit von irrationalen Verhältnissen festzustellen. Euklids Definition: "Zwei Größen einer Art a, b haben dasselbe Verhältnis wie zwei Größen A, B einer andern Art, wenn aus dem Bestehen einer Ungleichung für die Größen ma, nb (m, n beliebig, ganz) stets dieselbe Ungleichung für mA, nB folgt", ist für beliebige auch nichtrationale Verhältnisse brauchbar. Man kann das heute so formulieren: Wenn die von a, b erzeugte geordnete Halbgruppe $\{ma + nb\}$ isomorph zu $\{mA + nB\}$ ist, dann haben a und b dasselbe Verhältnis zueinander wie A und B. - Der Rechenstab veranschaulicht eine Isomorphie zwischen archimedisch geordneten Halbgruppen.

Proksch, Ruth "Der Begriff Symmetrie in gruppentheoretischer Auffassung".

Die Vorstellung "Symmetrie" umfaßt üblicherweise nicht nur die Spiegelungen, sondern auch andere Deckbewegungen einer Figur. Es ist daher naheliegend, die Symmetrie als Automorphismengruppe einer Figur zu definieren. Nur in dieser Allgemeinheit ist die Symmetrie auch ein nützliches Prinzip zur Stoffbeschränkung. Auf natürliche Weise werden Ornamente und Parkettierungen der Ebene durch die verschiedenen Untergruppen (Translationen, Gleitspiegelungen) hergestellt. Die entstehenden Muster sind zur propädeutischen Untersuchung von Gruppenstrukturen (Klasseneinteilung durch Färben, Hintereinanderausführen von verschiedenen Abbildungen) geeignet. Symmetrie tritt u.a. auch bei Endziffern von Quadratzahlen $(25+r)^2 \equiv (25-r)^2 \bmod (100)$, bei Kegelschnitten, trigonometrischen Kurven und Wurzelkörpern auf.

Lit.: Fejes Tóth "Regular Figures", Coxeter "Unvergängliche Geometrie".

[illegible] Spielregeln, die Wahl bei der [illegible] Komponente [illegible]). Die [illegible] [illegible] zu [illegible]

[illegible]

[illegible] Mus- [illegible] Zwei [illegible] einer Ungleichung [illegible] die Umrichtung [illegible] ist [illegible] auch nichtrationale Verhältnisse [illegible] formalisieren: Wenn die von a, b erzeugt [illegible] zu [illegible] ist, dann haben [illegible] - Der Lochstreifen [illegible] Reihung [illegible].

[illegible] "Spielfläche in Tapetendesign" [illegible]

[illegible] nicht nur die Spiegelung [illegible]. Es ist daher naheliegend [illegible] zusätzliche [illegible] Elemente und [illegible] (Trans- [illegible] entstehenden Muster sind zur [illegible] (Klassifikation [illegible] Abbildungen) [illegible] Kurven [illegible]

Raussen, B. "Affine Abbildungen in Mittel- und Oberstufe".

In der Mittelstufe werden die affinen Abbildungen synthetisch behandelt mit dem Ziel, die wichtigsten Invarianten kennenzulernen und einen vorläufigen Überblick über die Untergruppen der affinen Gruppe zu gewinnen. Wichtig ist dabei, daß schon hier sauber zwischen affinen und metrischen Begriffen und Eigenschaften unterschieden wird. In der Oberstufe folgt die analytische Behandlung mit 2, 2-Matrizen. Dieser Teil soll die auf Quarta durch geometrische Betrachtungen gewonnenen Ergebnisse analytisch bestätigen und eine Klassifizierung der affinen Abbildungen mit Hilfe der Eigenwerte der Matrizen herbeiführen. (Aufstellung der Jordanschen Normalformen). Ein weiterer Grund für die Einführung der Matrizen ist die anschließende Klassifikation der Kegelschnitte (Hauptachsentransformation).

Prade, H. "Affine Geometrie in der Mittelstufe".

Um den Schüler der Mittelstufe zu einer scharfen Trennung affiner und metrischer Begriffe zu veranlassen, wird die synthetische Behandlung der affinen Geometrie ausschließlich mit dem Parallelenlineal durchgeführt. Dem Schüler sind alle mit dem Parallelenlineal durchführbaren Konstruktionen erlaubt:

1) Verbinden zweier Punkte A, B

2) Schneiden zweier Geraden g, h und Konstruktion von parallelen Geraden.

Daraus ergibt sich als wichtigste Konstruktion die Schiebung. Die Festlegung einer Schiebung durch verschiedene Punktepaare führt sofort auf eine Desarguesfigur (Schiebungsdesargues). Induktiv gelangt man etwa zu folgendem Axiomensystem:

I Zu zwei Punkten gibt es stets genau eine Verbindungsgerade

II Parallelenaxiom

III Schiebungsdesargues

Damit werden behandelt:

1) Schiebungen (Konstruktion von äquidistanten Skalen)

2) Parallelprojektionen

3) Punktspiegelungen

4) Bei der Einführung des Teilverhältnisses fordertman als Axiom IV: Drei kollineare Punkte besitzen stets ein rationales Teilverhältnis. Dies ist berechtigt, da man mit dem Parallellineal kein irrationales Teilverhältnis konstruieren kann. Dieser rationale Teil der Proportionenlehre entspricht der Altersstufe; die Problematik des Strahlensatzes für nichtrationale Verhältnisse kann verschoben werden.

5) Nun können affine Abbildungen wie Schrägspiegelung, Scherung usw. behandelt werden, die nicht in der metrischen Untergruppe liegen.

6) Flächeninhalt (vgl. Referat von A. Kirsch).

Der Ausgang von den Schiebungen bietet gleichzeitig eine Möglichkeit, den Vektorbegriff schon in der Mittelstufe auf natürliche Weise einzuführen.

Ostermann, F. "Ein Aufbau der Vektorgeometrie aus einfachen anschaulichen Vorstellungen".

Auf dem Begriff der Parallelgleichheit aufbauend wird ein Vektor definiert als Klasse äquivalenter Punktepaare: Zwei Punktepaare heißen äquivalent, wenn sie ein Parallelogramm bilden. Man definiert die Addition von Vektoren durch Antragen und zeigt leicht, daß die Vektoren eine additive abelsche Gruppe bilden. Die Multiplikation mit einem Skalar führt man axiomatisch ein, wobei man sich von den Regeln für die Multiplikation mit natürlichen Zahlen als sukzessive Addition leiten läßt. In dem so gewonnen Vektorraum erklärt man eine Metrik, indem man für die Begriffe "orthogonal" ($\perp$) und "längengleich" ($\cong$) folgende Axiome fordert:

$a \perp b \Rightarrow b \perp a$; $a \perp b$ und $\lambda \in K \Rightarrow a \perp \lambda b$;

$a \perp b$ und $a \perp c \Rightarrow a \perp b + c$; $a, b \in V$ und $a \neq 0 \Rightarrow \bigvee_{\lambda \in K} a \perp b - \lambda a$;

$a \cong b \Leftrightarrow a + b \perp a - b$; $a \cong b$ und $b \cong c \Rightarrow a \cong c$;

$a, b \in V, a \neq 0 \Rightarrow \bigvee_{\mu} b \cong \mu a$

Denk, F. "Auflockerung der Trigonometrie. - Die didaktischen Schwierigkeiten bei der Modernisierung des mathematischen Unterrichts".

Am Beispiel tregenometrischer Aufgaben wurde der pädagogische Wert von Fragestellungen betont, bei denen bewußt von einer allzu eingefahrenen Form abgewichen wurde. Um die trigonometrischen Funktionen nicht zu

sehr mit der Konstruktion von Dreiecken zu verbinden, wurde auf eine davon unabhängige Einführung (am Kreis) und die Anwendungen in der Vektorgeometrie und der Physik hingewiesen.

An didaktischen Schwierigkeiten bei der Modernisierung des Unterrichts wurden genannt:

Die Theorie wird im Vergleich zu den für die Schule interessanten Problemen überbetont. Die Oberstufe darf nicht allein modernisiert werden. Schülern der Unterstufe fehlt mehr die Ausdrucks als die Denkfähigkeit. - In der Oberstufe sollte das selbständige Literaturstudium begonnen werden. Dazu wird die Einrichtung von Klassenbibliotheken empfohlen (z.B. VEB Schriftenreihe).

Kirsch, A. "Die Behandlung des Flächeninhalts im Unterricht".

Die Frage des Flächeninhalts wird zunächst nur für Polygone gestellt. Für diese wird der Begriff der Zerlegungsgleichheit $P \cong Q$ definiert. Ist A eine affine Abbildung, so gilt $P \cong Q \Rightarrow A(P) \cong A(Q)$, hieraus folgt später die affine Invarianz von Flächenverhältnissen. Mit Hilfe von Punktspiegelungen und Schiebungen (Gruppe "S") kann jedes Polygon in einen zerlegungsgleichen Abschnitt des Einheitsparallelogramms (E) verwandelt werden. Auf der Schule muß man die Unmöglichkeit paradoxer Zerlegungen als Axiom fordern (de Zolt) . Für die Flächeninhaltsfunktion F (eingeführt als Teilverhältnis einer Seite des zerlegungsgleichen Abschnittes von E zu einer Seite von E) findet man induktiv die Axiome:

1) $F(E) = 1$

2) Additivität

3) $F(P) = F(P^{\sigma})$ $\sigma \in S$

4) $F(xE) = x$

5) $P \cong Q \Rightarrow F(P) = F(Q)$

6) $P \lesssim Q \Rightarrow F(P) \leq F(Q)$

Auf dieser Stufe kann man die Problematik des Flächeninhalts $F(R) = ab$ eines Rechtecks mit nichtrationalen Seitenlängen behandeln, indem man für $a = 1$ und b beliebig ausnutzt, daß $F(R) = ab = f(b)$ monoton ist.

Kropp, G. "Grundlagen der Analysis - Möglichkeiten und Grenzen".

Nach einigen Vorbemerkungen über den anschaulichen Zugang zum Irrationalen über Streckenverhältnisse in der Mittelstufe wurde für die Oberstufe der axiomatische Aufbau der reellen Zahlen empfohlen. Erste Folgerungen aus dem Axiomensystem wurden vorgeführt, u.a. die auch als Beispiele nützlichen Funktionen sign a und $|a|$. Als Grundlage für den weiteren Aufbau könnte die Behandlung der Nullfolgen nach Kowalewski dienen.

Freund, H. "Ein anschaulicher Zugang zur Differentialrechnung, insbesondere zur Behandlung der e-Funktion."

Falls die reellen Zahlen nicht axiomatisch eingeführt worden sind, empfiehlt sich auf der Oberstufe ein Vergleich mit den Zahlbereichserweiterungen $N \to Z$, $Z \to Q$: Auf der Menge aller konvergenten Schachtelungen wird eine Äquivalenzrelation erklärt. Für die Klassen äquivalenter Schachtelungen kann +, ., $\leq$ so definiert werden, daß Q isomorph einbettbar ist. Die Vollständigkeit gegen neue Schachtelungen wird bewiesen (Courant).

Wegen der großen Anschaulichkeit sind "monotone" Intervallschachtelungen $[x_n, X_n]$ (x_n wachsend, X_n fallend) zur Einführung reeller Zahlen besonders geeignet. - Monotone Funktionen ergeben monotone Schachtelungen $[f(x_n), f(X_n)]$. Falls aus jeder konvergenten Schachtelung wieder eine konvergente wird, heißt f stetig. - Mit Hilfe eines "Steigungsmessers" wird aus $[x_n, X_n]$ eine Schachtelung $[s_n, S_n]$, die für konvexe Funktionen "monoton" ist; konvergiert $[s_n, S_n]$, so heißt f differenzierbar. Die Verallgemeinerung aller Begriffe ist naheliegend.

Eine hierauf aufbauende Behandlung der Differentialgleichung $y' = y$ führt leicht zu e-Funktionen und deren Reihe.

Seebach, K. "Behandlung der Analysis auf der Oberstufe".

Der folgende Aufbau, der die topologische Struktur der reellen Zahlen

ebenso betont wie die Anwendungen der Infinitesimalrechnung, wurde erläutert:

Eigenschaften von R: a) Körper, b) Anordnung, c) Vollständigkeit,
d) Zahlgerade

Vollständige Induktion (Binomischer Satz, Bernoullische Ungleichung),

Kombinatori-Mengen (Mengen reeller Zahlen), Intervalle, Umgebungen,

obere Schranken, Funtionsbegriff (Umkehrbarkeit, Monotonie, Beschränktheit)

Trigonometrische Funktionen und Vektorrechnung

Grenzwerte von Funktionen ($x \to \pm\infty$, $x \to a$)

Grenzwerte von Folgen, unendliche Reihen

Stetigkeit (Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum)

Ableitung (lineare Approximation, Mittelwertsatz)

Stammfunktion

Bestimmtes Integral (monotone oder stetige Funktionen)

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

Anwendungen (Flächeninhalt, Mittelwerte, der Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Ausbau (Kettenregel, Umkehrfunktion, $(x^a)'$ mit a rational)

Neue Funktionen arc, log, exp, Isomorphie (R, +), $(R^+, .)$

Uneigentliche Integrale

Ausbau der Integralrechnung, Näherungsmethoden, Anwendungen.

Jahner, H. "Möglichkeiten zur Einführung in die Integralrechnung mit Hilfe der Treppenfunktionen".

Eine Behandlung der Treppenfunktionen ist wegen der vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten (numerische Mathematik, graphische Darstellungen) sicher nützlich. Darüber hinaus führen sie auf folgendem Wege zur Integralrechnung: Die Treppenfunktionen $t_n : x \to (\frac{1}{n}[nx])^2$ konvergieren gegen $f: x \to x^2$. Der Grenzwert der Folge der Inhalte $I_o^1(t_n)$ kann noch nicht als Inhalt von f erklärt werden, wie das Beispiel "$t_n(x) = n$ für $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$ und = 0 sonst" zeigt. Konvergiert jedoch eine Folge von Treppenfunktionen t_n gleichmäßig gegen eine Funktion f, so existiert $\lim_{n \to \infty} I_a^b(t_n)$, und dieser Grenzwert hat für jede gleichmäßig gegen f konvergierende Folge den-

selben Wert. Für monotone beschränkte Funktionen findet man leicht approximierende Treppenfunktionen, und die Regeln der Integralrechnung ergeben sich sofort.

Klar, A. "Arithmetische Folgen und Reihen und die ganze rationale Funktion in Unter-, Mittel- und Oberstufe".

Der Begriff der Folge (Reihe) läßt sich frühzeitig vorbereiten, trägt zur Auflockerung des Unterrichts bei und eignet sich, die jeweiligen Rechentechniken (Brüche, Klammern) zu üben.

Sexta: Arithmetische Folgen und Reihen 1. Ordnung. Ab Quinta: Multiplikation von Folgen, Bruchfolgen, Differenzschema. Tertia: Die ganze rationale Funktion 2. Grades. Ab Untersekunda: Summenformel der ersten n Quadrat- und Kubikzahlen, quadratische Interpolation, Reihen k-ter Ordnung, Potenzsummen und rekursive Gleichungssysteme. Unendliche Reihen. Integration ganzer rationaler Funktionen und Approximation beliebiger Funktionen.

Pickert, G. "Deduktive Geometrie im Oberstufenunterricht".

Vorausgesetzt werden die Rechengesetze für natürliche Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion. Dem Mittelstufenstoff werden einfache geometrische Begriffe als Grundbegriffe und einfache Aussagen über sie als Axiome entnommen. Zunächst wird die ebene Inzidenzgeometrie entwickelt. Der Schiebungsdesargues oder direkt die Forderung der Existenz von Translationen führt zu Vektoren, zu deren Addition und zu Parallelprojektionen. Die Anordnungsaxiome und das Eudoxosaxiom gestatten, eine skalare Multiplikation zu definieren. Die Skalare sind 0, 1 - Folgen, Addition und Multiplikation kann so erklärt werden, daß sie einen Körper bilden, der die rationalen Zahlen umfaßt. Das Vollständigkeitsaxiom führt zu den reellen Zahlen. Schließlich ermöglichen Orthogonalitätsaxiome die Definition von Spiegelungen, Längengleichheit von Vektoren usw. Der nächste Schritt liefert die metrische Geometrie.

[illegible] Wert. Für [illegible] beschränkte Funktionen findet man leicht approximierende [illegible] und [illegible] in der [illegible] realisieren, ergeben sich einfach.

[illegible] rationale [illegible] Unter-, Mittel- und Oberstufe.

[illegible] (Zahl) läßt sich früh [illegible], trägt [illegible] Unterrichts bei und [illegible], die jeweiligen [illegible] zu [illegible].

Inhalt: [illegible] Folgen und Reihen 1. Ordnung, [illegible] Multiplikation von [illegible], Grenzfolgen, Differenzenrechnung. [illegible]: Die ganzrationale Funktion [illegible] ersten [illegible] und Kubikzahlen, quadratische Interpolation, Reihen k-ter Ordnung [illegible] und rekursive [illegible]. Unendliche Reihen. [illegible] rationaler Funktionen und approximative [illegible].

Richert, [illegible] "Didaktik [illegible] Mathematikunterricht".

[illegible] für natürliche Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion. Der [illegible] werden [illegible] Grundbegriffe und einfache [illegible] [illegible] Zunächst wird die [illegible] entwickelt, [illegible] Einordnung der [illegible] [illegible] Parallel [illegible] [illegible] und [illegible] [illegible] Vollständigkeit [illegible] Vollständigkeitsaxiom [illegible] Zahlen. [illegible] [illegible] Schrift [illegible]

Arzt, K. "Möglichkeiten und Erfahrungen mit der Wahrscheinlichkeits-

rechnung im Gymnasialunterricht".

Wegen der Bedeutung der WR für viele nichtmathematische Berufe wurde auf der Oberstufe ein 30-Stunden Lehrgang durchgeführt, in dem natürlich auch klassische Stoffe wie vollständige Induktion, implizite Definition, Integralrechnung usw. geübt wurden. Angestrebt wurde ein axiomatischer Aufbau aus folgendem System:

1) $0 \leq w(A) \leq 1$

2) $w(S) = 1$

3) $w(A \cup B) = w(A) + w(B)$, falls A, B unvereinbar

4) $w(A \cap B) = w(A) \cdot w(B/A)$ "w(B/A)" bedingte Wahrscheinlichkeit

Als Vorbereitung wurde die Mengenalgebra behandelt. Begriffe wie a-priori-Wahrscheinlichkeit (etwa aus Symmetriegründen), relative Häufigkeit (als Maßzahl einer Wahrscheinlichkeit) und die Möglichkeit der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten gewisser Ereignisse aus anderen a-priori gegebenen wurdenerklärt. Es ergab sich: die WR läßt sich gut im Arbeitsunterricht behandeln, da für den Schüler viele Ausgangspunkte und ihn interessierende Anwendungen vorhanden sind. Man gelangt bis zu Stichprobentesten.

Nagel, A. "Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Unter- und Mittelstufe".

Es wurde über zehn Jahre Unterrichtsversuche mit WR in den Klassen 1-6 berichtet. Die Schüler werden zunächst an statistisches Denken durch Erfahrung gewöhnt, so daß sie später die Abstraktion verstehen können.

Stoffplan: Klasse 1 und 2 (je 2 mal 5 Stunden): Grundregel der Kombinatorik, Baumdiagramme und gerichtete Graphen, Begriff des Stichprobenraums, Ereignisse und ihre Verknüpfung. Klasse 3: Empirische Einführung in die Begriffswelt der WR, Simulieren eines stochastischen Prozesses, Zufallszahlen, Monte-Carlo-Methode. Klasse 4: WR als abstraktes mathematisches Modell für zufällige Erscheinungen. Ableitung der Grundregeln.
Klassen 5 und 6: Begriff der Zufallsgröße, Erwartungswert, Streuung,

- 14 -

einfache Markowketten, Summen von Zufallsgrößen, schwaches Gesetz der großen Zahlen, binomische Verteilung, Konstruktion einfacher mathematischer Modelle von Situationen der realen Welt.

Einige Unterrichtsbeispiele:

In 1 und 2: Die möglichen Ausgänge bei vierfachem Münzwurf können als Worte voher aufgeschrieben werden und so den Stichprobenraum vorstellen. Gerichtete Graphen können Spiele beschreiben.

In 3: Mit Würfeln und Münzwurf stellt jedes Kind seine eigene Zufallszahlentafel her. Im weitern sind die Würfel überflüssig ; mit den Tafeln können stochastische Prozesse als Spiele verkleidet sehr rasch simuliert werden, in wenigen Minuten wird ein Experiment 1000 mal durchgeführt; Spielchancen können berechnet werden (Bruchrechnung) und anschließend ausprobiert werden.

Ab 4: Bei der nun beginnenden theoretischen Behandlung macht nicht einmal die bedingte Wahrscheinlichkeit Mühe.

Friedli, R. "Diskussion über das Unterrichtsprogramm von M.W. Servais."

Das auf der Tagung der Organisation de coopération et de Développement Economique in Athen aufgestellte Programm für naturwissenschaftliche Gymnasien wurde allen Anwesenden ausgehändigt. Herr Friedli hob zunächst die Begriffe hervor, die in den meisten europäischen Reformplänen als fundamental angesehen werden:

Mengen, Relationen, Funktionen als Abbildungen, Gruppen und andere Strukturen, Vektorräume und lineare Abbildungen. Die Analysis beginnt mit der Topologie. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird als Konstruktion eines mathematischen Modells behandelt. Die Geometrie tritt hinter der algebraischen Auffassung zurück. Vollständig fehlen die Darstellende Geometrie, Kegelschnitte, Differentialgleichungen, Doppelintegrale. - Belgien hat das Programm nahezu unverändert übernommen, ebenso die Lehrplankommission der Suisse Romande. In der deutschen Schweiz möchte man der Geometrie mehr Platz einräumen.

In der Abschlußdiskussion wurde der folgende Katalog fundamentaler Begriffe aufgestellt. Die Gesichtspunkte, die dabei noch einmal zur Sprache kamen, finden sich in den Vortragsprotokollen und in der Einleitung. Es sei hier nur noch betont, daß dieser Katalog nahezu ein - stimmig zustande kam, und zwar nicht nur als Einigung über abstrakte Begriffe, sondern so, daß eine langsame Umstellung des Unterrichts unter der Leitung dieser Begriffe auch möglich erscheint.

I) Mengen ($\{x / A(x)\}$, $\in$, $\notin$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\subseteq$

Paarmenge, Relation (insbesondere Äquivalenz- und Ordnungsrelation)

Abbildungen d.h. Funktionen ("in", "auf", "umkehrbar", f oder $x \to f(x)$

Verknüpfungen

Logik umgangssprachlich (Negation, Kontraposition)

Variable, Term (Ausdruck), Aussageform (bei Gleichungen und Ungleichungen), Lösungsmenge

II) Mengen mit Verknüpfung

Gruppen, Körper (kommutative)

Vektorraum (algebraisch)

III) Geometrie

Der Vektorbegriff soll in der Geometrie als Leitbegriff dienen.

Figuren als Punktmengen

Spezielle Abbildungen und Abbildungsgruppen (Deckabbildungen)

Allgemeiner Symmetriebegriff

Elementargeometrie affin und metrisch

Lokales Ordnen, Axiomatisieren

Analytische Geometrie, affin und metrisch

Zeichnerisch-konstruktive Verfahren

IV) Zahlbegriff

Sukzessive Zahlbereichserweiterungen:

Natürliche (N), Ganze (Z), Rationale (Q), Reelle (R), Zahlen und das Rechnen in diesen Bereichen, insbesondere mit Anordnung und Betrag

V) Analysis

Umgebung

Grenzwert (insbesondere bei Folgen)

Monotone Funktionen

— 16 —

Stetige und unstetige Funktionen

Rationale Funktionen

$\sqrt{\ }$, sin, cos, tan, exp, log

Ableitungen

Stammfunktionen

Bestimmtes Integral

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Numerische Verfahren

VI) Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

H. Karcher (Berlin) M. Toussaint (Karlsruhe)