2

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

T a g u n g s b e r i c h t

Arbeitstagung über Funktionalanalysis
18. - 24.1.1965

Die Leitung der Tagung hatten Herr Prof.Dr.H. König, Köln, und Herr Prof.Dr.F.W. Schäfke, Köln. Außer ihnen waren anwesend:

Armbrust, Dr.	Köln
Bresser, H.	Köln
Dankert, Frau Dipl.-Math.G.	Köln
Ebert, Dr.	Köln
Ertz, R.	Köln
Hackenbroch, Dipl.-Phys.W.	Köln
Kölzow, Dr.D.	Jülich
König, Prof.Dr. H.	Köln
Köpping, D.	Köln
Koppelberg, D.	Köln
Krekel, D.	Köln
Kremer, F.	Köln
Leis, Doz. Dr. R.	Aachen
Mennicken, Dr. R.	Köln
Müller-Hartmann, E.	Köln
Nießen, Dipl.-Math.D.	Köln
Sattler, Dr. A.	Köln
Schäfke, Prof.Dr. F.W.	Köln
Schmidt, D.	Köln
Schneider, Dr. A.	Köln
Schönhage, Doz.Dr. A.	Köln
Schwedt, D.	Köln
von den Steinen, J.	Köln
Stoß, J.	Köln
Tobergte, Dipl.-Math. J.	Köln
von Waldenfels, Dr. W.	Jülich
Walzel, Dipl.-Math. A.	Köln
Weiß, Ch.	Köln

Es folgen kurze Zusammenfassungen der einzelnen Vorträge.

Armbrust, M.: <u>Quasidirekte Zerlegungen universeller Algebren.</u>

Direkte Zerlegungen universeller Algebren sind darstellbar durch Systeme von Kongruenzrelationen. Zur Konstituierung einer praktikablen Zerlegungstheorie, die außer dem direkten Produkt auch Bildungen wie die direkte Summe von Hilberträumen abstrakt erfaßt, werden durch gewisse Assoziativitätsforderungen Produktbegriffe eingeführt, die jedenfalls bei endlich vielen Faktoren das volle direkte Produkt liefern. Die umfassendste dieser Verknüpfungen ist das quasidirekte Produkt: Eine quasidirekte Zerlegung der Algebra A wird repräsentiert durch eine Menge R von Kongruenzrelationen in A mit $\bigcap_{\rho \in R} \rho = \mathrm{id}$ und $\rho_0 \cdot \bigcap_{\rho \neq \rho_0} \rho = A \times A$ für jedes $\rho_0 \in R$. Quasidirekte Zerlegungen, die zugleich ein gewisses Teilsystem H des Kongruenzrelationenverbandes direkt zerlegen, heißen H-treu. Sie sind gekennzeichnet durch die Bedingung $\sigma = \bigcap_{\rho \in R} (\rho \cup \sigma)$ für alle $\sigma \in H$. Je zwei treue quasidirekte Zerlegungen besitzen eine größte gemeinsame Verfeinerung. Die treuen direkten Zerlegungen bilden einen beschränkt vollständigen Verband unter der Relation der Verfeinerung.

Dankert, G.: <u>Zur Verallgemeinerung der Sobolewschen Einbettungssätze auf Orliczräume.</u>

Zwei der für L^p-Räume gültigen Sobolewschen Einbettungssätze lassen sich auf Klassen von Orliczräumen übertragen. Seien Φ und Ψ komplementäre Orliczfunktionen und sei $\Phi(2x) \leq k\,\Phi(x)$ für $x \geq 0$. Sei $\Omega \subset R^n$ offen und erfülle eine Sobolewsche Kegelbedingung. Sei f eine reell- oder komplexwertige Funktion auf Ω mit $f, \partial^\lambda f \in L^\Phi(\Omega)$ für alle $\lambda : |\lambda| = m \geq 1$ (distributionentheoretische Ableitungen). Dann gilt für alle β: $0 < |\beta| < m$, daß $\partial^\beta f \in L^\Phi(\Omega)$ ist. Sei außerdem

$$\int_a^\infty \Phi'(x)^{-\frac{e}{n-e}}\,dx < \infty \quad (\Phi'(a) \neq 0)$$

für ein $\ell : 0 < \ell < n$, so ist $\partial^\beta f \in L^\infty(\Omega)$ für alle $\beta : 0 \leq |\beta| \leq m - \ell$. Genüge zusätzlich auch Ψ der Bedingung

$\Psi(2x) \leq k\Psi(x)$ für $x \geq 0$. Dann gilt für jede Familie $(f_\iota)_{\iota\in I}$ von Funktionen auf Ω mit

$$f_\iota,\ \partial^\lambda f_\iota \in L^\Phi(\Omega) \qquad (|\lambda| = m)$$

$$\|f_\iota\|_{L^\Phi(\Omega)},\ \|\partial^\lambda f_\iota\|_{L^\Phi(\Omega)} \leq A$$

und jedes β : $0 \leq |\beta| \leq m-\ell$: Die Familie $(\partial^\beta f_\iota)_{\iota\in I}$ ist gleichgradig, gleichmäßig stetig auf Ω.

Ebert, R.: Über Rodriguessche Polynomsysteme.

Ein Polynomsystem $\varphi_n(x)$ mit Grad $\varphi_n \leq n$, $n = 0,1,2,\ldots$ ist Rodriguessches Polynomsystem, wenn eine Darstellung

$$p(x)\varphi_n(x) = [p(x)\Phi^n(x)]^{(n)} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

existiert mit holomorphem p und Φ. Aus der Darstellung und der Gradforderung für n = 1,2,3 allein folgt, daß Φ ein Polynom vom Grad $\leq$ 2 ist. Nach Wahl von Φ und φ_1 läßt sich p bestimmen und die Darstellung liefert für alle n Polynome φ_n vom Grad $\leq$ n. Durch Klassenbildung gelingt eine Aufzählung aller Rodriguesschen Polynomsysteme. Anwendung der Sätze auf Polynomsysteme in zwei Variablen mit der Darstellung

$$p(x,y)\varphi_{mn}(x,y) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}[p(x,y)\Phi^m(x,y)\Psi^n(x,y)]$$

liefert analoge Sätze für $\Phi = \Psi$ und schwächere für $\Phi \neq \Psi$.

Ertz, R.: Über Berührung von Mengen in einem Punkt.

Sei E ein metrischer Raum, $p \in E$; $M,N \subset E$. Wir sagen, M und N berühren sich in p, wenn

$$\sigma(V_p^\varepsilon \cap M, V_p^\varepsilon \cap N) = o(\varepsilon) \qquad \text{ist.}$$

Dabei ist σ die Haudorffsche Metrik in $\mathfrak{P}E$

$$\sigma(A,B) = \max(\rho(A/B), \rho(B/A))$$

$$\rho(A/B) = \sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y)$$

und V_p^ε die offene ε-Kugel um p. Für jedes feste p ist die Berührung in p eine Aquivalenzrelation in $\mathfrak{P}E$.

$f(x) \le K\psi(x)$ [illegible] $x \ge 0$. Dann gilt für jede positive [illegible]
[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

Bem. 3: Rodrigues-Formel und orthogonale Polynomsysteme.

Ein Polynomsystem $\varphi_n(x)$ mit Grad $\varphi_n \le n$, $n = 0,1,2,\dots$ ist ein Rodrigues-System, wenn eine Darstellung

$$r(x)\varphi_n(x) = [p(x)\phi(x)^n]^{(n)} \quad (n = 0,1,2,\dots)$$

existiert mit Polynomen p und ϕ. Aus der Darstellung und der Orthogonalität für $n = 1,2$ folgt, daß ϕ ein Polynom vom Grad ≤ 2 ist. [illegible] die Darstellung liefert für alle Polynome φ_n [illegible] Grad $\le$ [illegible] eine Klassifizierung [illegible] Polynomsysteme. Anwendung der Sätze auf Polynomsysteme in zwei Variablen mit der Darstellung

$$r(x,y)\varphi_{nm}(x,y) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial y^m}[p(x,y)\phi(x,y)^n\psi(x,y)^m]$$

liefert analoge Sätze für $\phi = \psi$ und schwächere für $\phi \ne \psi$.

Bem. 4: Über Berührung von Mengen in einem Punkt.

Sei E ein metrischer Raum, $p \in E$; $A, B \subset E$. Wir sagen, A und B berühren sich in p, wenn

$$\rho(V_\varepsilon \cap A, V_\varepsilon \cap B) = o(\varepsilon)$$

ist.

Dabei ist ρ die Hausdorffsche Metrik in E

$$\rho(A,B) = \max(\rho(A/B), \rho(B/A))$$

$$\rho(A/B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x,y)$$

und V_ε die offene ε-Kugel um p. Für jedes $p \in E$ ist die Berührung eine Äquivalenzrelation in 2^E.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Hackenbroch, W.: Einige Anwendungen des Rieszschen Darstellungssatzes.

Für einen lokal kompakten Hausdorffraum X bezeichne C(X) den Vektorraum der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X, $C_o(X)$ bzw. $C_{oo}(X)$ die Teilräume der im Unendlichen bzw. außerhalb eines Kompaktums verschwindenden Funktionen aus C(X). Aus der bekannten Darstellung (*) $\Lambda f = \int f d\lambda$ der positiven linearen Funktionale Λ über $C_{oo}(X)$ durch außenreguläre Borelmaße λ wurde gefolgert: 1. Diese Darstellung ist für außenreguläre λ eindeutig. Jedes über den Kompakten außenreguläre Borelmaß λ ist regulär. Jedes Bairemaß ist Restriktion eines eindeutig bestimmten regulären Borelmaßes. 2. Die Rieszsche Darstellung von $C_o(X)^*$ (bzgl. der üblichen Normtopologie) mittels (*) durch reguläre beschränkte komplexwertige Maße über R_b, dem σ-Ring der Borelmaße in X, und hieraus eine Isomorphie von $C(X)^*$ (bzgl. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakten für C(X)) mit den regulären komplexen Maßen über R_b mit kompaktem Träger (mittels (*)). 3. Ein indirekter Beweis des Satzes von Stone-Weierstrass aus bekannten Sätzen der Dualitätstheorie mit Hilfe der Rieszschen Darstellung von $C_o(X)^*$ durch ein maßtheoretisches Argument.

Kölzow, D.: Topologische und Endlichkeitseigenschaften von Maßen.

Die Maßräume, welche zu einem abstrakten Integral im Sinne von Bourbaki gehören, sind charakterisiert durch die Existenz gewisser Systeme m_1 und m_2 meßbarer Mengen, welche im Falle eines Radonschen Maßes mit dem System der offenen bzw. der kompakten Mengen übereinstimmen.
Alle im Falle des Radonschen Maßes geltenden Adaptionsbeziehungen lassen sich auf den abstrakten Fall als Beziehungen bezüglich m_1 und m_2 übertragen, insbesondere das Lokalisationsprinzip für die Meßbarkeit einer Menge, die Induzierung eines Integrals im Sinne von Bourbaki in eine Menge aus m_2, die Existenz eines Trägers und die Existenz eines Systems k_o von paarweise disjunkten Mengen positiven endlichen Maßes aus m_2, so daß das Komplement von $\bigcup k_o$ eine lokale Nullmenge und k_o auf $\bigcup m_1$ lokal ab-

[illegible], V.: Einige Anwendungen [illegible] Rieszschen Darstellungssätze.

[illegible] lokal kompakten Hausdorffraum X bezeichne C(X) [illegible] stetigen komplex-wertigen Funktionen auf X, [illegible] $C_0(X)$ [illegible] im Unendlichen bzw. [illegible] Funktionen aus C(X). Aus der bekannten Darstellung [illegible] positiven linearen Funktionale Λ auf $C_{00}(X)$ durch [illegible] reguläre Borelmasse μ [illegible] diese Darstellung ist für [illegible] eindeutig, jedoch aber [illegible] regulär. Jedem Beispiel ist [illegible] eindeutig bestimmt [illegible] Borel-[illegible] 2. Die Rieszsche Darstellung von $C_0(X)^*$ [illegible] der [illegible] mittels (*) durch reguläre beschränk-te komplexwertige [illegible] -Ring der Borelmasse in X, [illegible] Topologie der [illegible] C(X)) mit den [illegible] komplexer [illegible] kompakten Träger [illegible] (*)). 3. Die [illegible] den Sätzen von Stone-[illegible] aus bekannten Sätzen der Dualitätstheorie mit Hilfe der Rieszschen Darstellung von $C_0(X)^*$ durch ein maß-[illegible].

[illegible]: Topologische und Endlichkeitseigenschaften [illegible]

Die Merkmale, welche [illegible] stetigen Integral [illegible] von [illegible] charakterisiert durch die Existenz geeigneter [illegible] und n_2 mehrerer [illegible], welche im Fall [illegible] bzw. [illegible] ganzen Überdeckung [illegible].

[illegible] Induktion [illegible] Menge aus [illegible] Träger [illegible] Existenz eines [illegible] von [illegible] positiven endlichen [illegible] Komplement [illegible] $\bigcup K_0$ [illegible] und K_n [illegible] lokal abzählbar bezüglich m_1 ist. Für das Integral im Sinne von Stone gilt Entsprechendes mit Ausnahme der Existenz eines Trägers und einer Zerlegung k_0 (Gegenbeispiel erscheint im Archiv der Mathematik).

König, H.: Ein Beweis des Integralsatzes von Gauß.

Der Integralsatz wird für die offenen beschränkten Teilmengen $G < R^n$ mit der nachstehenden Eigenschaft bewiesen: Es sei S(G) der singuläre Rand von G, d.h., die Gesamtheit der Randpunkte von G, in deren Umgebung der Rand von G eine nicht (n-1)-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit ist. S(G) ist also kompakt. Dann wird vorausgesetzt, daß S(G) den (n-1)-dimensionalen Minkowski-Inhalt Null besitzt. Diese Annahme gestattet einen sehr einfachen Beweis des Integralsatzes. (Erschienen im Jahresbericht DMV 66, 119-138 (1964)).

Koppelberg, B.: Isotypische Komponenten.

Ein Untermodul P eines Moduls M heißt distributiv, wenn es einen Untermodul P' von M gibt mit $M = P \oplus P'$, so daß für jeden Untermodul U von M gilt $U = P \cap U \oplus P' \cap U$.
Sei M halbeinfach. Dann sind äquivalent: a) P ist Summe isotypischer Komponenten, b) P ist vollinvariant, c) P ist distributiv.
Sei A ein Ring mit Einselement. Dann sind äquivalent: a) jeder A-Modul ist halbeinfach, b) jeder A-Modul ist Summe minimaler vollinvarianter Untermoduln, c) in jedem A-Modul sind die vollinvarianten Untermoduln genau die distributiven Untermoduln.

Leis, R.: Approximationssätze für stetige Operatoren.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Banachraum, $f \in \mathfrak{B}$ und $T(x)$ $(0 \leq x \leq a < \infty)$ ein bzgl. x stetiger Operator, der $\mathfrak{B}$ in sich abbildet. Dann gilt mit $T(x)f = f(x)$ und

$$B_n(x,h) = \frac{n!}{h^n}\left(f(x+h) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x)\right)$$

der Satz: Es sei f(x) (n-1)-mal stetig differenzierbar und

a) $B_n(x,h_i)$ gleichmäßig beschränkt für $h_i \to 0$

b) $B_n(x,h_i)$ konvergiert fast überall schwach gegen eine stetige Grenzfunktion $\varphi_n(x)$ für $h_i \to 0$. Dann ist $f^{(n)}(x) = \varphi_n(x)$ und es gilt

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x) + O(h^n).$$

Aus diesem Satz werden Anwendungen auf das Randverhalten von Potentialfunktionen hergeleitet.

Mennicken, R.: Berechnung der charakteristischen Exponenten von Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten.

Für gewisse Differentialgleichungen der Form

$$p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0;$$

$$p_\nu = a_\nu + b_\nu e^{ix} + c_\nu e^{-ix},$$

läßt sich ein dem von Schäfke für die Mathieusche Differentialgleichung entwickelten Verfahren (Numerische Mathematik, 3, 30-38, 1961) nachgebildetes Verfahren aufstellen, das die Berechnung des charakteristischen Exponenten auf die Berechnung dreigliedriger Rekursionen zurückführt.

Nießen, H.: Über separierbare Operatoren.

Es wurden einige Ergebnisse aus der Theorie separierbarer Operatoren bewiesen, wobei ein Operator separierbar genannt wird, wenn er sich als Determinante anderer Operatoren darstellen läßt; dabei wirken die Operatoren der j-ten Spalte auf Funktionen, die eine Menge R_j in einen Körper abbilden. Der Nullraum eines separierbaren Operators kann durch die Nullräume anderer "einfacherer" Operatoren, die sich bei der Separation ergeben, charakterisiert werden. Hierzu wurde folgender Satz (anscheinend neu) der linearen Algebra bewiesen:

Vor.: Sei $n \geq 2$ und seien $M_1, \ldots, M_n$ linear abhängige nichtleere Mengen eines linearen Raumes, von denen je n-1 linear unabhängig sind.

Beh.: $\dim [M_1 \cup \ldots \cup M_n] = n-1$.

Dabei heißen $M_1,\ldots,M_n$ linear abhängig, wenn $x_1,\ldots,x_n$ linear abhängig sind, sofern $x_i \in M_i$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Schäfke, F.W.: Differenzengleichungen in Gruppen und eine Verallgemeinerung der Kettenbruchmethode.

Die vom Vortragenden in der Mathematischen Zeitschrift (1965) entwickelte Theorie der Lösungstypen von Differenzengleichungen in normierten abelschen Gruppen wird auf nichtabelsche Gruppen übertragen. Es wird ein einfaches konstruktives Verfahren zur Gewinnung genügend vieler Minimallösungen dargestellt, das wenig Voraussetzungen erfordert und sich als Verallgemeinerung der Kettenbruchmethode für lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung erweist.

Schmidt, D.: Zur Konvergenzverbesserung bei der Berechnung des charakteristischen Exponenten der Mathieuschen Differentialgleichung.

Nach einem von F.W. Schäfke entwickelten Verfahren (Num. Mathematik, 3, 30-38, 1961) berechnet sich der charakteristische Exponent der Mathieuschen Differentialgleichung im wesentlichen unter Verwendung dreigliedriger Rekursionen des Typs

$$(*) \qquad \gamma_{n+1} = \gamma_n + k_n \gamma_{n-1} \qquad (k_n = O(n^{-4})).$$

Sofern man

$$\gamma_n = \prod_{\varkappa=1}^{n-1} (1 + c_\varkappa) \zeta_\varkappa$$

- wobei $c_n - k_n = O(n-8)$ - transformiert, geht (*) in eine Rekursion

$$\zeta_{n+1} = \frac{1}{1+c_n} \zeta_n + \frac{k_n}{(1+c_n)(1+c_{n-1})} \zeta_{n-1}$$

über. Es ist $\zeta_{n+1} - \zeta_n = O(n^{-8})$.

Schneider, A.: Eigenwerttheorie für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Betrachtet werden Eigenwertaufgaben der Form:

$$C_1(x)y'(x) + C_2(x)y(x) = \lambda \left\{ \hat{C}_1(x)y'(x) + \hat{C}_2(x)y(x) \right.$$

$$A_1y(a) + B_1y(b) = \lambda \left\{ A_2y(a) + B_2y(b) \right\} .$$

Zur Untersuchung wählt man zwei Unterräume f und g im Raum der stetig differenzierbaren Vektoren y, und definiert auf f bzw. g zwei lineare Funktionale F(u,v) bzw. G(u,v) mit Hilfe der Differentialgleichungen und der Randbedingungen. Sind diese hermitesch, so nennt man die Aufgabe selbstadjungiert. Entsprechend definiert man auch Definitheit. Ist $\lambda = 0$ Nichteigenwert, so ist die Eigenwertaufgabe äquivalent einer Gleichung $y - \lambda Ay = 0$ in einem linearen Raum $\mathfrak{R}$. A hat dabei genau die Eigenschaften, um die Ergebnisse von H. Wielandt anwenden zu können. (Mathem. Nachrichten, Bd. 4, S. 308-314). Durch Spezialisierung der Matrizen C_i, $\hat{C}_i$, A_i, B_i werden eine Reihe von Aufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung umfaßt, so z.B. Aufgaben, wie sie von E. Kamke, N.J. Lehmann und E. Bukovics betrachtet werden.

Schönhage, A.: <u>Multiplikation großer Zahlen.</u>

Der Aufwand bei Multiplikation zweier n-stelliger Binärzahlen nach der üblichen Methode wächst mit $n \to \infty$ wie n^2. Es wird am Modell der Turing-Maschinen der Begriff "Aufwand" für beliebige "Multiplikationsmaschinen" präzisiert und ein Verfahren mit einem Aufwand

$$A(n) = O\left(n^{1+ \sqrt{2+\varepsilon} / \sqrt{^2\log n}} \right)$$

angegeben.
Dabei ist wesentliches Hilfsmittel das Rechnen in simultanen Kongruenzen mod $Q_1, \ldots, Q_k$ mit

$$Q = 2^{qi} - 1, \quad \sum_i qi \geq 2n+1,$$

q_i paarweise teilerfremd.

Stoß, H.J.: <u>Eine Transformation von Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.</u>

Eine Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu}(x)\, y^{(\nu)}(x) = 0$$

mit periodischen Koeffizienten wird durch jede Transformation der Form

$y(x) = u(x)T(x)$ ($T(x)$ periodisch, $\neq 0$, n-mal stetig differenzierbar) in eine Differentialgleichung der gleichen Form mit demselben charakteristischen Exponenten überführt. Aus dieser Tatsache kann man einige Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten ableiten.

von den Steinen, J.: Existenz algebraisch abgeschlossener Erweiterungen von Derivationen.

Gegeben seien zwei nicht assoziative Algebren $P \subset Q$ über einem kommutativen Körper K und eine Derivation $\Delta : P \to Q$, d.h., eine lineare Abbildung mit $\Delta(ab) = (\Delta a)b + a\Delta b$. Es läßt sich ein Vektorraum $W \supset Q$ und eine lineare Abbildung $\Gamma : W \to W$, die Δ fortsetzt, konstruieren, so daß W freie Erweiterung von Q ist. Man kann eine Algebra $R \supset Q$ und eine Derivation $\Lambda : R \to R$ finden, so daß R den Raum W umfaßt und Λ die Abbildung Γ fortsetzt. Es ist möglich, R so zu wählen, daß 1. bei voll assoziativem Q eine schwache Assoziativität der Multiplikation in R gilt, oder daß 2. für gewisse x,y W das Produkt wieder in W liegt. In einigen Fällen existieren Algebren R, welche die Forderungen 1. und 2. gleichzeitig erfüllen.

Tobergte, J.: Reversibilität und Irreversibilität von linearen dissipativen Transformationen.

Es sei C der Raum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf der Zahlengeraden, deren Werte n-dimensionale komplexe Vektoren sind und die links einer (von der Funktion abhängigen) Abszisse verschwinden. Eine lineare translationsinvariante Abbildung L von C in sich heißt dissipativ, wenn

$$\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\tau} \langle L f(t), f(t) \rangle \, dt \geq 0$$

ist für alle reellen τ und $f \in C$. Seien

$$C_- = \{ f \in C \mid \lim_{t \to \infty} t^n f^{(k)}(t) = 0 \text{ für } n,k = 0,1,2,\dots \}$$

und

$$C_\alpha = \{ f \in C_- \mid f(t) = 0 \text{ für } t \leq \alpha \} .$$

Für $f \in C_-$ existieren

$$V(L,f,\alpha) = \inf \{ \mathcal{R}\mathrm{e} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle L(f(t)-h(t), f(t)-h(t) \rangle dt \mid h \in C_\alpha \}$$

und

$$\lim_{\alpha \to \infty} V(L,f,\alpha)$$

L heißt reversibel, wenn dieser Grenzwert für jedes $f \in C_-$ verschwindet. Zu L ist umkehrbar eindeutig eine (n x n)-matrixwertige Verteilungsfunktion φ zugeordnet, deren Ableitung φ' für fast alle reelle x existiert. Sei $\mathcal{S}_\alpha$ der von den Fouriertransformierten $\hat{f}$, $f \in C_\alpha$ erzeugte lineare Teilraum des Hilbertraums $L^2(\varphi')$. L ist genau dann reversibel, wenn es n orthonormierte Funktionen $u_1,\dots,u_n \in \hat{\mathcal{S}}_\alpha$ gibt mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \left| \log \left| \langle \varphi'(x)u_j(x), u_j(x) \rangle \right| \right| dx = \infty \text{ für } j=1,2,\dots n.$$

von Waldenfels, W.: Differentiation formaler nicht kommutativer Potenzreihen.

Sei K ein kommutativer Körper, X eine beliebige Menge und K(X) die von X frei erzeugte Algebra. Wir ordnen jedem $x \in X$ die Unbestimmte dx zu und bilden die freie Algebra $K(X \cup dX)$. Das Differential df von $f \in K(X)$ entsteht, indem man jedes x durch x + dx ersetzt und den in dx linearen Teil heraushebt. Sei $K(X)^*$ die zu K(X) entgegengesetzte Algebra, so definieren wir $(f \otimes g^*)dx = f\,dx\,g$ für $f \otimes g^* \in K(X) \otimes K(X)^*$. Das Differential df ist eindeutig in der Form

$$df = \sum_{x \in X} \frac{\partial f}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \in K(X) \otimes K(X)^*$$

darstellbar. Sei Δ die Derivation

$$f \in K(X) \to f \otimes 1 - 1 \otimes f^* \in K(X) \otimes K(X)^*,$$

so sind die $\partial f / \partial x$ eindeutig durch die Formel von Finkelstein

$$\Delta f = \sum_{x \in X} \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x$$

bestimmt. Diese Formel ermöglicht die explizite Berechnung der Differentiale verschiedener Potenzreihen, z.B. von $\log e^x e^y$.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft