Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

T a g u n g s b e r i c h t

Arbeitsseminar über Grenzfragen zwischen
Differentialgeometrie und Variationsrechnung
vom 28.2. bis 5.3. 1965

Unter der Leitung von Herrn Professor Dr. W. B a r t h e l (Würzburg) fand im März 1965 in Oberwolfach ein Arbeitsseminar über Grenzfragen zwischen Differentialgeometrie und Variationsrechnung statt. In den Vorträgen wurden Probleme aus der Variationsrechnung mehrfacher Integrale, damit zusammenhängende Fragen aus der Theorie der konvexen Körper, Probleme aus der Differentialgeometrie, insbesondere der auf den Arealbegriff begründeten, und Hilfsmittel aus der Theorie der Differentialgleichungen behandelt. Durch den kleinen Teilnehmerkreis bedingt, wurde auch während der Vorträge eifrig diskutiert.

Die Tagung war von folgenden 13 Teilnehmern besucht:

Barthel, Prof.Dr.W., Würzburg	Heil, Dr.E., Darmstadt
Bauer, Frau G., Würzburg	Kind, B., Mainz
Bettinger, W., Würzburg	Klein, F., Mainz
Burkhardt,O.,OStRat, Crailsheim	Manderscheid, Frl.U., Würzburg
Eschmann, P., Würzburg	Repp, A., Mainz
Ewald, Prof.Dr.G., Mainz	Schichtel, H., Würzburg
Haubitz, Frl.I., Würzburg	

Kurze Zusammenfassung der 13 gehaltenen Vorträge:

BARTHEL, W.: Variationsprobleme in der Affingeometrie auf Mannigfaltigkeiten.

Um die Blaschkesche Affingeometrie des affinen Raumes auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit zu übertragen, werden folgende zwei Strukturen eingeführt (1) eine Volumendichte $f \neq 0$ und (2) ein symmetrischer linearer Zusammenhang $\Gamma_k{}^i{}_h$, der volumentreu ist, d.h. bei Parallelverschiebung eines Parallelotops bleibt dessen Volumen invariant. Auf dieser Grundlage wurde eine Hyperflächentheorie skizziert (vgl. Geometrietagung 1963). - Eine infinitesimale Abbildung $x^i \to x^i + \epsilon\, \xi^i(x)$ heißt affin, wenn $\nabla_h \nabla_k \xi^i = \xi^j R_k{}^i{}_{jh}$,

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

und volumentreu, wenn $\nabla_k \xi^k = 0$ ist. Dann gilt der Fundamentalsatz der Hyperflächentheorie: Eine volumentreue infinitesimale Affinität läßt die Grundformen $g_{\rho\sigma}$, $a_{\rho\sigma\tau}$ einer Hyperfläche 1. Ordnung invariant. - Offen bleibt die Frage, ob zu zwei infinitesimal benachbarten Hyperflächen, deren Grundformen $g_{\rho\sigma}$, $a_{\rho\sigma\tau}$ in 1. Ordnung gleich sind, eine volumentreue infinitesimale Affinität existiert, die die Hyperflächen ineinander überführt.

BAUER, G.: Flächeninhaltsbegriffe im Minkowski-Raum.

In einem Minkowski-Raum, dessen Struktur durch Vorgabe einer Skalardichte $\mathfrak{z}$ und einer Funktion $F^{(n-1)}(X_1, \ldots X_{n-1})$ mit (1) $F^{(n-1)}(X_\rho) > 0$ für linear unabhängige Vektoren, (2) $F^{(n-1)}(\lambda^\rho_{\rho'} X_\rho) = \|\lambda^\rho_{\rho'}\| \, F^{(n-1)\rho}(X_\rho)$ für $\|\lambda^\rho_{\rho'}\| \geqq 0$ und (3) $F^{(n-1)}(\ldots X_i + X'_i \ldots) \leqq F^{(n-1)}(\ldots X_i \ldots) + F^{(n-1)}(\ldots X'_i \ldots)$ in einem n-dimensionalen affinen Raum R^n gegeben ist, werden ein Großsches Minimalmaß, ein oberes und ein unteres Minkowskisches Flächenmaß analog den Definitionen im euklidischen Raum eingeführt. Für das Großsche Minimalmaß wird die Minimaleigenschaft bezüglich einer Klasse von Mengenfunktionen gezeigt. In Analogie zu Nöbeling (Math. Zeitschrift 48) wird der folgende Satz für Minkowski-Räume bewiesen: Wenn A eineindeutiges dehnungsbeschränktes Bild einer kompakten Menge $B \subset R^{n-1}$ ist, gilt für das Großsche Minimalmaß $\mu_G A = {}_{\mathfrak{B}}\int F^{(n-1)}(r_i)\, d\eta$.

Schließlich erhält man im Minkowski-Raum die von M. Kneser (Arch. d. Math. 6, 1955) für den euklidischen Raum hergeleitete Aussage Ist $A \subset R^n$ dehnungsbeschränktes Bild einer kompakten Menge $B \subset R^{n-1}$, so stimmen das untere und das obere Minkowskische Flächenmaß und das Großsche Minimalmaß von A überein.

BURKHARDT, O.: Vektorübertragung und 2. Variation der Oberflächenfunktion in der metrischen Differentialgeometrie.

In einem Finslerraum mit der Grundfunktion L(x,X) ist der Grundtensor gegeben durch $g_{ij} = \dfrac{\partial^2(\frac{1}{2}L^2)}{\partial X^i \partial X^j}$ und eine invariante Differentiation durch $DX^i = dX^i + X^k \gamma_k{}^i{}_h(x,X)\, dx^h$ und $DT^i(x,X) = dT^i + T^k(\gamma^*_k{}^i{}_h dx^h + a_k{}^i{}_l DN^l)$ mit $N^l := \frac{X^l}{L}$ und $\gamma^*_k{}^i{}_l = \gamma_k{}^i{}_l - a_k{}^i{}_r \gamma_0{}^r{}_l$.* Die Differenz $\gamma^*_{ikl} - \gamma^*_{lki} =: \sigma_{ikl}$ heißt Torsionstensor. Weiter sei noch eine Skalardichte $\mathfrak{f}(x)$ vom Gewicht +1 gegeben. Es gilt nun Satz 1: Die $\gamma_{ikl}(x,X)$ lassen sich

*Eine metrische Übertragung liebt vor, wenn $\gamma_{(ik)l} = \frac{1}{2}\, {}_l g_{ik}$ und $a_{(ik)l} = \frac{1}{2} L \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$.

eindeutig aus g_{ik}, a_{ikl} und $\sigma_{(ik)l}$ berechnen. $\gamma_{ikl} = \overset{0}{\gamma}_{ikl} + \sigma_{\widetilde{ikl}} + 1_{il}{}^{r}(\sigma_{0\widetilde{rk}} + a_{rk}{}^{s}\sigma_{0s00}) - a_{kl}{}^{r}(\sigma_{0\widetilde{ri}} + a_{ri}{}^{s}\sigma_{s00})$. Dabei ist $\sigma_{\widetilde{ikl}} := \frac{1}{2}(\sigma_{ikl} - \sigma_{kli} + \sigma_{lik})$ und $\overset{0}{\gamma}_{ikl}$ der torsionsfreie Cartansche Zusammenhang. γ_{ikl} und $\hat{\gamma}_{ikl}$ heißen genau dann geometrisch äquivalent, wenn $\gamma_{0kl} = \hat{\gamma}_{0kl}$. Satz 2: Ist $\sigma_{ikl} = \hat{\sigma}_{ikl} + z_{ikl}$, so sind die zugehörigen metrischen Übertragungen genau dann äquivalent, wenn $z_{0\widetilde{kl}} = 0$ ist.

Die Forderung, daß für p = 1 und p = n-1 die geodätischen Gebilde Extremaleigenschaft haben, führt zu der Bindung des Torsionstensors $\sigma_{i00} = 0$.

$\sigma_{0}{}^{k}{}_{k} = \partial_{0} \log \frac{f}{\sqrt{g}} + a_{r}\gamma_{0}{}^{r}{}_{0}$. Diese Gleichungen werden erfüllt von $\overset{II}{\sigma}_{ikl} := \frac{2}{n-1} N_{[i} g_{|k|l]} f_{0}$ und von $\overset{I}{\sigma}_{ikl} := \frac{2}{n-1} f_{[i}(g_{|k|l} - N_{|k|} N_{l]})$ (vgl. W. Barthel Saarannalen 1955, Seite 171 - 183). Die zugehörigen Übertragungen heißen extremal und es gilt Satz 3: Ist $\hat{\gamma}_{ikl}$ extremal und γ_{ikl} äquivalent zu $\hat{\gamma}_{ikl}$, so ist γ_{ikl} extremal. Dann wird eine Normalform der 2. Variation der Dualoberfläche eines Hyperflächenstücks angegeben: $\delta^{2} I^{(n-1)} = \int_{G}(g^{\rho\sigma} V_{\rho} V_{\sigma} + UV^{2})\, du^{1} \dots, du^{n-1}$ mit $\delta x^{i} = V(u^{\rho}) N^{i}$ und $V_{\rho} = \frac{\partial}{\partial u^{\rho}} V(u^{\sigma})$. Der Skalar U nimmt für beide extremale Übertragungen $\overset{I}{\sigma}_{ikl}$, $\overset{II}{\sigma}_{ikl}$ die Form $U = R_{0}{}^{k}{}_{k}{}_{0} + 2K$ wie in der Riemannschen Geometrie an.

ESCHMANN, P.: Zur Cartan-Kählerschen Theorie der Differentialgleichungen.

Dem Vortrag liegen die Arbeiten von E. Cartan (Ann. Ec. Norm (3) 18 (1901)) und von E. Kähler (Hamb. Math. Einzelzeitschr. Bd. 16) zugrunde. Es werden Integralmannigfaltigkeiten von Systemen von Differentialformen $\vartheta_{1}, \dots, \vartheta_{l}$ auf der **n-dimensionalen C^{ω} -Mannigfaltigkeit** $\mathfrak{M}$ definiert als Untermannigfaltigkeiten von $\mathfrak{M}$, auf denen die ϑ_{i} verschwinden. Unter bestimmten Regularitätsvoraussetzungen können dann sukzessiv eine Folge von Integralmannigfaltigkeiten immer höherer Dimensionen aufgebaut werden, wobei folgender Satz einen einzelnen Schritt bedeutet: Es seien $\vartheta_{1}, \dots, \vartheta_{l}$ l Differentialformen auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, f^{n-r} eine (n-r)-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^{k}$ eine reguläre k-dimensionale Integralmannigfaltigkeit für die ϑ_{i} mit dem Tangentialelement E_{p}^{k}; außerdem habe der Tangentialraum in p an f^{n-r} genau einen Vektorraum $E_{p}^{k+1} (\supset E_{p}^{k})$,

der die ϑ_i annulliert. Dann existiert genau eine (k+1)-dimensionale Integralmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{k+1}$ mit $\mathfrak{M}^k \subset \mathfrak{M}^{k+1} \subset^{n-r}$.

EWALD, G.: Lokalkonvexe Quermaßfunktionen.

Es sei f eine positiv homogone Funktion auf einem Kegel M in einem reellen m-dimensionalen Vektorraum E^m. Unter der Indikatrix I_f von f versteht man die Menge aller $x \in M$ mit $f(x) = 1$. f heißt (fortsetzbar) konvex auf M, wenn I_f in jedem Punkt eine Stützhyperebene $a_i x^i = 1$ besitzt, f heißt stark konvex, wenn eine konvexe Fortsetzung von I_f zu einer streng konvexen Hyperfläche gefunden werden kann. Sind für $M \subset G^n_r$ die a_i so wählbar, daß (a_i) einfach ist, so nennt man f total konvex auf M. Gibt es zu jedem Punkt aus G^n_r eine Umgebung, deren Kegelprojektion M die letzte Eigenschaft hat, so heißt f lokal total konvex auf G^n_r. Mit Hilfe der Quermaßfunktionen konvexer Körper mit zweifach stetig differenzierbarem Rand und überall positiver Gaußscher Krümmung wird gezeigt: Es gibt lokal total konvexe Funktionen, die nicht (global) konvex sind. Damit wird eine im 2. Vortrag von Frl. Manderscheid gestellte Frage beantwortet.

HAUBITZ, I.: Zur Differentialgeometrie, begründet auf dem Begriff des p-dimensionalen Areals.

Dem Vortrag liegt die Arbeit von W. Barthel (Math. Ann. 137, S. 42-63, (1959)) zugrunde. Auf einer Mannigfaltigkeit sind folgende Strukturen gegeben: (1) die Grundfunktion $F(x,X_\mu)$, aus der man das Areal einfacher p-Vektoren $f(x,X^I)$ und den Fundamental-p-Tensor g_{IK} gewinnt, und (2) das invariante Differential einfacher p-Vektoren in der Form $DX^I = dX^I + \gamma^I{}_h(x,X^J)\, dx^h$. Die Zusammenhangskoeffizienten sollen nur geometrisch wesentliche Eigenschaften besitzen, und zwar: (I) Invarianz der Einfachheitseigenschaft bei Parallelverschiebung und (II) Invarianz des Areals $f(x,X^J)$ eines einfachen p-Vektors bei Parallelverschiebung. Die letzte Forderung ist eine wesentliche Abschwächung des in der obigen Arbeit benutzten Lemmas von Ricci. Damit wird die Theorie der p-Flächen entwickelt und die Variation des Areals einer p-Fläche hergeleitet. Mit einer zusätzlichen Struktur, der Volumendichte (x) $\neq 0$ führt man ein (n-p)-Areal ein, stellt eine Theorie der (n-p)-Flächen auf und berechnet die Variation dieses (n-p)-Areals. Für die Grenzdimensionen $p = 1$ und $p = n-1$ können Zusammenhangskoeffizienten angegeben werden, für die Autoparallel-p-Flächen Minimalflächen und gleichzeitig die dualen Autoparallel-

(n-p)-Flächen Dualminimalflächen sind. Für die Konstruktion der Zusammenhangskoeffizienten aus den metrischen Grundgrößen für die Zwischendimensionen ergeben sich wesentliche Schwierigkeiten.

HAUBITZ, I.; Tandais Arbeit über metrische Arealräume.

K. Tandai: " On areal spaces" V, Tensor NS 2, S. 47-58 (1952).

Ein Raum heißt "metrischer" Arealraum, wenn ein symmetrischer homogener "metrischer 1-Tensor" $g_{ij}(x,X^J)$ existiert, der aus F, F_I und g_{IK} berechnet werden kann, und $g_{IJ} = p!g_{i_1}[j_1 \cdots g_{|i_p|}j_p]$ gilt. Tandai beweist in seiner Arbeit den Satz: Für $g_{ij} \in C^2$ und $1 < p < n-1$ sind genau die Riemannschen Räume metrischer Arealräume.

HEIL, E.: Lokal-Minkowskische Räume.

Ein lokal-Minkowskischer Raum ist ein Finslerraum, für den in einem geeigneten Koordinatensystem $\frac{\partial F}{\partial x^h} = 0$ ist. Es wird gezeigt: Ist der von Rund bzw. der von Barthel definierte Parallelismus lokal wegunabhängig und linear, so ist der Raum lokal-Minkowskisch. Dazu wird zunächst gezeigt, daß die Berwaldschen Zusammenhangskoeffizienten $G_j{}^i{}_k$ von der Richtung unabhängig sind. Der von Rund und der von Barthel definierte Zusammenhang stimmt dann mit dem Berwaldschen überein und ist ein integrabler affiner Zusammenhang. Es existiert ein lokales lineares Koordinatensystem und aus der Längentreue folgt die Behauptung.

KIND, B.: Normalität und Transversalität in der Variationsrechnung mehrfacher Integrale.

Auf den a-Ebenen des n-dimensionalen affinen Raumes A^n (d.h. Unterräumen der Dimension a) sei ein translationsinvariantes, stetiges, positives Maß α definiert. Wir betrachten die Unterräume A, B, D : = A $\cap$ B und Q : = A $\vee$ B. Dann heißt A total normal zu B in D bezüglich Q und B total transversal zu A in D bezüglich Q, wenn bei fest vorgegebenem $M_0 \subset A_0$ mit $A_0 \cap B = D$ und $0 < \alpha(M_0) < \infty$ für die Projektion M von M_0 auf A gilt: $\alpha(M)$ minimal. - A heißt normal zu B in D bezüglich Q und B transversal zu A in D bezüglich Q, wenn A total normal ist zu jeder (d+1)-Ebene D_* mit $D \subset D_* \subset B$. Die Existenz eines normalen A zu gegebenen $D \subset B \subset Q$ ist trivial, die Eindeutigkeit von A folgt aus der strengen Konvexität von α. Die Existenz eines transversalen B zu gegebenen $D \subset A \subset Q$ ist äquivalent zur Konvexität von α, die Eindeutigkeit von B äquivalent zur Differenzierbarkeit von α. (Nach Busemann und Straus, Pacific Journal of Math., Vol. 10 No. 1, 1960).

KLEIN, F.: Eigenschaften von Graßmann-Kegeln G_r^n und ihre Bedeutung für das Konvexitätsverhälten von Funktionen auf G_r^n.

Nach vorbereitenden Betrachtungen wird der Satz von Leichtweiß und van der Waerden bewiesen: Sei $R_0 \in G_r^n (0<r<n-1)$ und U eine Umgebung von R_0 auf G_r^n. Dann gilt: R_0 ist ein innerer Punkt der konvexen Hülle U^H in V_r^n. (Nach Busemann, Ewald, Shephard, Math.Ann. 151, S.1-41)

MANDERSCHEID, U.: Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale.

Gegeben sei das Variationsproblem $I = \int_G F(x^i, X^i_\mu) dt^1 \dots dt^p = \min$, wobei G ein p-dimensionales Parametergebiet und $F(x^i, X^i_\mu) \geq 0$, $F(x^i, \lambda^\mu_\nu X^j_\mu) = \|\lambda^\mu_\nu\| F(x^i, X^j_\mu)$ und $F(x^i, X^j_\mu)$ außerhalb der Nullstellen dreimal stetig differenzierbar ist. $F(x^i, X^j_\mu)$ induziert $f(x^i, X^J) = F(x^i, X^j_\mu)$, wobei $X^J := p!\, X^{j}_{[1} \dots X^{j}_{p]}$. Da $F(x^i, X^J_\mu)$ von der Klasse C^3 ist, existieren die verallgemeinerten Ableitungen f_I, f_{IK} von $f(x, X^J)$ nach einfachen p-Vektoren (vgl. W. Barthel, Arch. d.Math. IX (1958)). - $(x^i, X^J(x^i))$ heißt ein geodätisches Feld, wenn die Differentialform $d[\Omega] = d\left(\sum_{i_1<\dots<i_p} f_I(x^i, X^J(x^i))\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\right)$ die Nullform ist. Unter Benutzung des Stokesschen Satzes leitet man aus der Differenz des Variationsintegrals I_E über die Extremale E (Lösung der Eulerschen Differentialgleichung), die in das geodätische Feld eingebettet ist, und des Variationsintegrals über eine Vergleichsfläche $\bar{E}$, die im geodätischen Feld verläuft und an den Rändern mit E übereinstimmt $I_{\bar{E}} - I_E = \int_{\bar{E}} (f(x^i, X^J) - f_I(x^i, X^J(x^i))X^I)\, dt^1 \dots dt^p =$

$$=: \int_{\bar{E}} \mathcal{E}(x^i, X^J, X^J(x^i))\, dt^1 \dots dt^p$$

die hinreichen Weierstraßsche Bedingung ab: Ist $\mathcal{E}(x^i, X^J(x^i))A^I A^K > 0$, so liefert die Extremale ein starkes Minimum. Die Legendre Bedingung erhält man dann durch Entwicklung von $\mathcal{E}(x^i, X^J, X^J(x^i))$: $f_{IK}(x^i, X^J(x^i))\, A^I A^K > 0$ mit $f_I A^I = 0$, $A^I \neq 0$ ist hinreichend für ein schwaches Minimum. Dann wird noch ein Hinweis zur Konstruktion von geodätischen Feldern gegeben.

MANDERSCHEID, U.: Legendre Transformation bei Variationsproblemen mehrfacher Integrale.

Es wird folgender Satz bewiesen: Unter Voraussetzung der hinreichenden Legendre-Bedingung (Bezeichnung wie oben) ist die Legendre Transformation $T: X^I \to X_I = ff_I(x^i, X^J)$ lokal eindeutig umkehrbar. Zum Beweis benützt man folgende Eigenschaften der Indikatrix I_f

(gegeben durch $f(x^i, X^I) = 1$, bzw. die Parameterdarstellung $X^I = X^I(\eta^a)$, $a = 1, \ldots, p.(n-p)$) : (1) I_f ist eine $p.(n-p)$-dimensionale Fläche auf dem Graßmannkegel, (2) zu jedem Vektor $X^I \varepsilon I_f$ gibt es genau eine Hyperebene, die den Tangentialraum in X^I an I_f umfaßt (Beweis: siehe Wagner (s.u.)), und (3) da die Legendre Bedingung erfüllt ist, stützt diese Hyperfläche die Indikatrix lokal. Für ein vorgegebenes X_I sei $c\, X_I A^I = 1$, $c > 0$, die Schar der zu X_I parallelen Hyperebenen; der Berührpunkt X_0^I einer Hyperebene $c_0 X_I A^I = 1$ mit I_f liefert daher lokal $\frac{1}{c_0}\, X_0^I$ als Urbild von X_I unter der Transformation T. Unter den angegebenen Voraussetzungen kann man globale Eindeutigkeit der Umkehrung nicht erwarten (vgl. Vortrag von G. Ewald.).

MANDERSCHEID, U.: Referat über Wagners Arbeit: Geometrie eines Raumes mit Arealmetrik und Anwendungen zur Variationsrechnung.

Mat. Sbornik T 19 (61) N 3 (1946)

In dieser Arbeit werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Extremalen eines Variationsproblems mehrfacher Integrale angegeben und geometrisch gedeutet.

P. Eschmann