Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Partielle Differentialgleichungen
vom 8. - 13. März 1965

Unter der Leitung von W. Haack und G. Hellwig (Berlin) fand im Oberwolfacher Institut in der Woche vom 8. bis 13. März 1965 die dritte Tagung über partielle Differentialgleichungen statt. Neben den 21 Vorträgen wurde die Gelegenheit zur Diskussion reichlich genutzt.

Die Betreuung durch das Institut war wieder vorbildlich. Die ausgezeichnete Küche und der hervorragende Weinkeller halfen mit, eine angenehme Atmosphäre zu schaffen.

Teilnehmer:

Batt, Dr.J., Heidelberg
Beckert, Prof.Dr.H., Leipzig
Browder, Prof.Dr.F.E., Chicago
Bruhn, G., Berlin
Cimmino, Prof.Dr.G., Bologna
DePrima, Prof.Dr.Ch.R., Pasadena
Florian, Dr.H., Graz
Grigorieff, R.D., Berlin
Guber, Dr.S., Hamburg
Haack, Prof.Dr.W., Berlin
Habetha, Dr.K., Berlin
Heinz, Prof.Dr.E., München
Hellwig, Prof.Dr.G., Berlin
Hervé, Prof.R.-M., Nancy
Hervé, M., Nancy
Hölder, Prof.Dr.E., Mainz
Jörgens, Prof.Dr.K., Heidelberg
John, Prof.Dr.F., New York
Kreyszig, Prof.Dr.E., Graz
Lehman, Prof.Dr.R.S., z.Zt.Göttingen
Leis, Dr.R., Aachen
Meister, Dr.E., Saarbrücken
Pachale, Prof.Dr.H., Berlin
Poulsen, Prof.Dr.E.Th., z.Zt.Heidelberg
Reichert, Dr.M., Frankfurt
Rohde, H.W., Berlin
Segal, Prof.Dr.I., Cambridge/Mass.
Staude, Dr.U., Mainz
Stummel, Prof.Dr.F., Frankfurt
Tautz, Prof.Dr.G., Freiburg
Walter, Prof.Dr.W., Karlsruhe
Wendland, W., Berlin
Wienholtz, Dr.E., Berlin
Zerner, Prof.Dr.M., Marseille

Vortragsauszüge

BECKERT, H.: Existenzbeweise zur Kanaltheorie der Gezeiten.

Es wird ein Existenzbeweis für ebene Potentialströmungen einer schweren Flüssigkeit um einen Zylinder gegeben, wenn die Flüssigkeit allseitig an ein Medium konstanten Druckes grenzt und ein Störkörper (Mond) die Bewegung beeinflußt (Gezeitenströmung). Nach Einführung der Variablen von Levi-Civita wird das Problem auf die Lösung eines Randwertproblems über einem Kreisring zurückgeführt, wobei längs der

Ränder algebraisch nichtlineare Integrodifferentialgleichungen gelten. Haupthilfsmittel sind der Fixpunktsatz von Schauder sowie Verallgemeinerungen der Sätze von Fatou-Privalow.

BROWDER, F.E.: Nonlinear partial differential equations.

A survey of the application to boundary value problems for nonlinear partial differential equations (elliptic, parabolic, wave equations, nonlinear equations of evolutions) of the recently developed theory of monotone operators T from a reflexive Banach space X to its dual X*, i.e. operators from a dense linear subspace D(T) of X to X* for which $(Tu - Tv, u - v) \geq 0$. Abstract theorems for monotone operators are proved and their applications to concrete problems sketched.

BROWDER, F.E.: Infinite-dimensional manifolds and nonlinear elliptic eigenvalue problems.

If $f(u) = \int F(x,u, \ldots, D^m u)dx$, $g(u) = \int G(x,u, \ldots, D^{m-1})dx$, A and B their Euler-Lagrange operators, theorems are given on the existence of infinitely many normalized eigenfunctions of the eigenvalue problem $Au = \lambda Bu$. These theorems follow from a general theory of Lusternik-Schnirelman category ofr infinite-dimensional Finsler manifolds.

BRUHN, G.: Die Randwertaufgabe der Charakteristik 1/2 für ein System von zwei linearen elliptischen Differentialgleichungen.

In einem beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebiet G der komplexen z-Ebene mit $\dot{G} \in C^1_{\alpha+\epsilon}$ wird für die Differentialgleichung

$L(w) = w_{\bar{z}} + Aw + B\bar{w} = F$ mit $A, B, F \in C_\alpha(G+\dot{G})$ $(0 > \alpha > 1)$

die lineare Randwertaufgabe

$R(w) = \mathrm{Re}[e^{i\tau}w] = f$ mit $\tau(s), f(s) \in C^1_\alpha$

betrachtet. Bekanntlich existiert im Falle einer <u>ganzzahligen</u> Charakteristik

$$n = \frac{\tau(s+L) - \tau(s)}{2\pi} \leq 0 \qquad (L = \text{Umfang von } \dot{G})$$

eine $2|n|+ 1$ parametrige Lösungsschar w und es gilt sogar $w \in C^1_{\alpha+}(G+\dot{G})$. Man sieht leicht ein, daß auch halbzahlige Werte der Charakteristik <u>ohne Sprünge</u> der Randbedingung R möglich sind. Die obige Existenzaussage läßt sich auf diesen Fall erweitern. Speziell gilt unter den angegebenen Voraussetzungen der Satz: Das Randwertproblem der Charakteristik 1/2 besitzt genau eine stetige Lösung w. Diese gehört zur

Klasse $C^1_\alpha(G+\dot{G})$.

Zum Beweis wird die Aufgabe durch Vorgabe einer Randpolstelle auf ein Hilfsproblem der Charakteristik 0 zurückgeführt. Unter Ausnutzung des freien Parameters der zugehörigen Lösung kann die Randpolstelle durch eine entsprechende Null stelle getilgt werden. Eine genauere Untersuchung liefert anschließend die behaupteten Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösung.

CIMMINO, G.: Verallgemeinerte Randbedingungen bei linearen partiellen Differentialgleichungen.

Rand eines offenen Gebietes als Randelementenmenge. Gleichmäßig und im Mittel angenommene Randwerte einer im Gebiete definierten Funktion. Eindeutigkeitsbeweise für die Lösung des Dirichletproblems Inhomogene Randwertprobleme und Ermittelung der entsprechenden homogenen adjungierten Probleme aus Orthogonalitätsbedingungen im Cartesischen Produkt eines Randwertfunktionenraumes mit einem Raum von im Gebiet definierten Funktionen. Erweiterung der Klasse der zulässigen Randwertfunktionen. Distributionen als Randspuren. Raum der Randspuren sämtlicher Lösungen einer gegebenen Differentialgleichung in einem gegebenen Gebiet: seine Topologisierung und sein Isomorphismus mit dem topologischen Raum der Lösungen.

DE PRIMA, C.R.: A simple-minded approach to non-linear differential problems.

The following simple principle:

"Let B, B_o, E be Banach spaces with $B \subset B_o$ topologically such that the injection J of B into B_o is compact. If T is a mapping von $B_o \times B$ into E with

1) for all $u_o \epsilon B_o$ exists a unique $u \epsilon B$: $u = g(u_o)$ with $T(u_o, g(u_o)) = 0$,
2) g is continuous and bounded from B_o to B,
3) it exists an $s > 0$, so that for $u_o | B \leq s$ follows $|g(u_o)|_B \leq s$,

then exists a $u^* \epsilon B$ with $T(u^*, u^*) = 0$.".

is used to obtain strong solutions of various quasi-linear elliptic boundary value problems, where certain crude a-priori estimates are available. In particular, the general second order elliptic quasi-linear Dirichlet problems is solved in $D_{\alpha+2}$ for sufficiently "small" boundary conditions.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

GRIGORIEFF, R.; Zur wesentlichen Selbstadjungiertheit elliptischer Differentialoperatoren.

Sei $L[u] = -\sum_{j,k=1}^{n} (p_{jk}u_{x_j})_{x_k} + 2i \sum_{j=1}^{n} r_j(x)u_{x_j} + i \sum_{j=1}^{n} (r_j(x))_{x_j} u$ $+ q(x)u$ elliptisch in $G \subset R^n$. Sei weiter $\mathcal{D}_A = \{u(x) / u \in C^2(G) \cap H, L[u] \in H\}$, $Au = L[u]$ und A_0 die Restriktion von A auf $\mathcal{D}_{A_0} = C_0^{\infty}(G)$. Es werden einige Sätze, welche für die entsprechenden gewöhnlichen Differentialoperatoren gelten, auf $L[u]$ übertragen. Die Beweise werden anstelle des Fundamentalsystems mit Hilfe eines Weylschen Lemmas geführt, das unter Voraussetzung genügender Differenzierbarkeitseigenschaften der Koeffizienten von $L[u]$ besagt, daß die Defekträume von A_0 in $\mathcal{D}_A$ liegen. Man erhält $A_0^* = \bar{A}$ und ein Ergebnis von Wienholtz, daß A_0 genau dann wesentlich selbstadjungiert ist, wenn A symmetrisch ist. Ferner gewinnt man gewisse allgemeine Randbedingungen, die auf wesentlich selbstadjungerte Erweiterungen von A_0 führen.

HELLWIG, G.: Kriterien für die Selbstadjungiertheit singulärer elliptischer Differentialoperatoren.

Es wird allgemeines Kriterium für die Selbstadjungiertheit elliptischer Differentialoperatoren im Gebiet $G \subseteqq R_n$ gegeben, welches als eine Verallgemeinerung des bekannten LEVINSONschen Kriteriums für das Vorliegen des Grenzpunktfalles bei $x = \infty$ im WEYL-STONEschen Differentialoperator aufgefaßt werden kann.

HERVÉ, R.M.: Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique à coefficients discontinus; les fonctions surharmoniques associées.

Il s'agit d'une équation de la forme $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} = 0$ et des sous-solutions locales au sens des distributions. Soient Ω un domaine borné de R^n et $W_0^{1,2}(\Omega)$ l'adherence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace des fonctions qui sont dans $L^2(\Omega)$ ainsi leurs dérivées partielles premières.

Le principe du maximum est celui-ci: Toute sous-solutions locale dans Ω, majorée p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est < 0 p.p. dans Ω.

En utilisant essentiellement les théorèmes de de Giorgi, Moser et Stampacchia, on montre que les solutions locales de $Lu = 0$ forment un système de fonctions harmoniques satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot; on peut alors parler des fonctions surharmoniques associées à l'opérateur L et montrer quelques propriétés intéressant de la théorie du potentiel.

HÖLDER, E.: Lokale Lösbarkeit des Randwertproblems partieller Differentialgleichungen.

Das nichtlineare kanonische System

$$(*) \quad \begin{aligned} Dx - \xi &= \Theta_{c\xi} \\ D'\,\xi - ax &= \Theta_x \end{aligned}$$

x^i auf ∂I gegeben mit der gesuchten Vektorfunktion $x = (x^i(t)) \in R^n$ und den unabhängigen Variablen $t = (t^\alpha) \in I \subset R^\mu$ und nichtlinearen rechten Seiten besitze Nullösungen $\binom{\varphi}{\chi}$. Dann wird mit den Methoden von Morrey der erweiterte Green-de Rhamsche Operator G gebildet, sowie zu $DG = I$ der adjungiert $H = GD'$ mit $(\xi, DGz)_1 = (D'\xi, Gz)_0 = (GD'\,\xi, z)_0$. Dann ist die Lösung von (*) durch Auflösung der nichtlinearen Operatorgleichungen

$$x = \Sigma\, r\, \varphi \; + \; G\, \Theta_x + H\Theta_{c\xi}$$

$$\xi = \Sigma + \chi \; + \; I\, \Theta_x + DHO_{c\xi}$$

zu gewinnen, wo die unbestimmten Parameter r durch die Verzweigungsgleichungen $(\Theta_x, \varphi)_0 + (\Theta_{c\xi}, \chi) = 0$ zu bestimmen sind. Deren Anfangsglieder sind explizit angebbar, ebenso die Stabilitätsverhätlnisse durch Eigenwertsstörung.

JÖRGENS, K.: Zur Spektraltheorie der elliptischen Differentialoperatoren.

Ein Kriterium für die wesentliche Selbstadjungiertheit von Differentialoperatoren

$$Tu = \sum_{j,k=1}^{n} (i\,\partial_j + b_j)\, a_{jk}(i\,\partial_k + b_k)u + qu$$

in $C_0^\infty(G)$, $G \subset R^n$, wird angegeben, ferner die Bedingungen für $V(x)$ derart, daß $T + V$ dasselbe wesentliche Spektrum hat wie T.

JOHN, F.: Laurentsche Reihen für singuläre Lösungen elliptischer Gleichungen.

Der Operator L sei elliptisch, linear, analytisch, von der Ordnung m. Die Lösung $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ von $Lu = 0$ habe eine

isolierte Singularität für $x = z$. In Analogie zur Laurentschen Reihe der Funktionentheorie erwartet man für x in einer Umgebung von z eine Entwicklung der Form

$$u(x) = \sum_s c_s J_s(x,z) + \sum_s d_s N_s(x,z)$$

mit im Punkte z regulären Lösungen J_s und singulären Lösungen N_s. Spezielle Formeln dieser Art gaben F. John und M. Wachman an. Eine allgemein gültige Formel mit eleganter zugehöriger Koeffizientendarstellung bewies jetzt M. Balch. Der Multiindex $s = (s_1, \ldots, s_n)$ ist auf nicht-negative s_k mit $s_1 < m$ beschränkt. Für $J_s(x,z)$ nimmt man diejenige Lösung, für die sich $D^t J_s(x,z)$ für $x = z$ und $t_1 < m$ auf δ_s^t reduziert. Außerdem ist $N_s(x,z) = D^s K(x,z)$, wo $K(x,z)$ in x Fundamentallösung von L und in z vom adjungierten Operator ist; D^s ist das übliche Differentiationssymbol.

JOHN, F.: Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation.

Der Vortrag gibt eine Verallgemeinerung (veröffentlicht in: Seminari dell' Instituto di Alta Matematica 1962/63, S. 465 (Roma 1964)) eines Lemmas von Nirenberg und John (Comm. Pure and Appl. Math. 1961). Wir bezeichnen mit C Würfel des R^n mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen und mit $m(\delta)$ das Maß einer Menge δ. Sei nun $f(x)$ eine Funktion, definiert in einem Würfel C_o und mit Werten, die zu einem normierten linearen Raum gehören, ferner sei f meßbar. Für jedes $C \subset C_o$ existiere ein Wert γ_C, so daß

$$m(\{x|x\epsilon C, |f(x) - \gamma_C| > 1\}) \leq \frac{1}{3} m(C).$$

Dann folgt für jedes reelle M

$$m(\{x|x\epsilon C, |f(x) - \gamma_C| >.$$

LEIS, R.: Zur Eindeutigkeit der Außenraumaufgaben bei stückweise glatten Rändern.

Bei der Behandlung der Randwertaufgaben des Außenraumes mit nur stückweise glattem Rand treten an den Ecken charakteristische Schwierigkeiten auf, weil die Lösungen hier singulär werden können. Es werden daher am Beispiel der Schwingungsgleichung für homogene beschränkte Lösungen a priori-Abschätzungen hergeleitet, aus denen die Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen der Randwertaufgaben folgt.

MEISTER, E.: Das Randwertproblem für ein schwingendes Profil in einer Unterschall-Kanalströmung.

Das Randwertproblem für das Potential des Störgeschwindigkeitsfeldes, das von einem mit beliebiger Aufwindverteilung harmonisch schwingenden, dünnen Profil in einem ebenen Kanal induziert wird, den ein reibungsfreies und adiabatisches Gas mit Unterschallgeschwindigkeit durchströmt, wird auf ein gemischtes Randwertproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung der Beugungstheorie reduziert. Nach Abspaltung der weit vor dem Profil nicht exponentiell abklingenden Glieder der Fourierentwicklung werden mittels der Laplace-Transformation zwei Darstellungen für die Bildfunktion des Restpotentials hergeleitet. Die darin auftretenden Bildfunktionen genügen einer Funktionsgleichung vom verallgemeinerten Wiener-Hopf-Typ. Mittels des Wiener-Hopf-Verfahrens und Residuenrechnung läßt sich diese - für nicht zu kleine Profiltiefen vorerst - iterativ lösen.

POULSEN, E.T.: Evolutionsoperatoren in Banach-Räumen.

Evolutionsoperatoren sind beschränkte lineare Operatoren $U(t,s)$ in einem Banach-Raum X, die für $t \geqq s$ erklärt sind und die einer Differentialgleichung der Form

$$U_t(t,s) = A(t)\, U(t,s), \quad U(s,s) = I,$$

genügen, wobei die $A(t)$ im allgemeinen unbeschränkte lineare Operatoren sind.

Die Rolle solcher Evolutionsoperatoren für Anfangswertprobleme partieller Differentialgleichungen wird erläutert, und einige Methoden zur Konstruktion von Evolutionsoperatoren werden skizziert. Die Resultate stellen Verallgemeinerungen von den Ergebnissen von Tanabe (Osaka Math. J. 12 (1960), 363-376) und Kato und Tanabe (Osaka Math. J. 14 (1962), 107-133) dar.

ROHDE, H.-W.: Zur Spektralzerlegung singulärer Differentialoperatoren.

In einem Gebiet G des n-dimensionalen euklidischen Raumes seien $q(x)$, $k(x) > 0$, reellwertig und hölderstetig, $p_j(x)$ reellwertig und hölderstetig differenzierbar, $p_{jk}(x) = p_{kj}(x)$ zweimal hölderstetig differenzierbar. Zugrundegelegt wird der Hilbertraum

$$H = \{u \mid \int_G |u(x)|^2 k(x)dx < \infty\}. \text{ Der Operator}$$

$$Au = \frac{1}{k(x)}\left\{ - \sum_{j,k=1}^{n} (p_{jk}(x)u_{x_j})_{x_k} + 2i\sum_{j=1}^{n} p_j(x)u_{x_j} + u\left[q(x) + i\sum_{j=1}^{n} (p_j)_{x_j}\right] \right\}$$

wird in einem Teilraum $\mathfrak{A} < \{u \mid u \in H$, u zweimal stetig differenzierbar, $Au \in H\}$ betrachtet, für den A in $\mathfrak{A}$ wesentlich selbstadjungiert ist. E_λ sei weiter die zur Abschließung S in $\mathfrak{T}$ von A in $\mathfrak{A}$ gehörige Spektralschar. Mit Hilfe eines verallgemeinerten Weylschen Lemmas läßt sich dann zeigen, daß die Eigenpakete von S in $\mathfrak{T}$, sowie $(E_\lambda\ E_\mu)u$, $\int_\lambda^\mu \gamma dE_\gamma u$ für alle $u \in H$ zweimal hölderstetig differenzierbar sind.

SEGAL, I.: Asymptotics and the solution manifold for relativistic equations.

The questions of global existence, uniqueness, and asymptotic stability, are considered for abstract equations of evolution. The results are applied to non-linear relativistic equations. The Scattering operator is constructed, and invariant measures and differentialgeometric structures in the solution manifolds are treated.

STUMMEL, F.: Über die Konvergenz der Differenzenapproximation des Dirichletproblems.

Die Lösungen von Differenzenapproximation des Dirichlet-Problems können als lineare stetige Funktionale auf einem geeigneten Funktionenraum aufgefaßt werden. Mit Hilfe bekannter Ungleichungen für die Lösungen dieser Differenzengleichungen erhält man Aussagen über die Beschränktheit einer Schar von Lösungen, in Abhängigkeit von der Maschenweite des Gitters als Scharparameter. Weiter gewinnt man aus der Kompaktheit dieser Mengen die Existenz von Funktionalen, welche schwache Lösungen des Dirichletproblems sind und gegen die die Lösungen der Differenzenapproximation konvergieren.

WENDLAND, W.: Die Methode der Randbelegungen bei der Lösung der 1. und 2. Randwertaufgabe der Potentialgleichung für Ränder mit Kanten und Ecken.

Die Lösung dieser Aufgaben kann im R_3 auf die Lösung von Funktionalgleichungen auf dem Rand $\mathring{G}$, also auf zweidimensionale Probleme zurückgeführt werden. $\Omega(\mathfrak{p})$ sei der räumliche innere Winkel von G in $\mathfrak{p} \in \mathring{G}$. Bei der ersten Randwertaufgabe des Innengebietes G z.B. lautet die Funktionalgleichung für die Randbelegung μ:

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\mu(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int \frac{n(\mathfrak{q})\cdot(\mathfrak{q}-\mathfrak{p})}{|\mathfrak{q}-\mathfrak{p}|^3}\,\mu(\mathfrak{q})\,do(\mathfrak{q}) + (2\pi - \;(\mathfrak{p}))\mu(\mathfrak{p})\right\} + \frac{1}{2\pi}n(\mathfrak{p}) =$$

$$- K\mu + \frac{1}{2\pi}\,n(\mathfrak{p}).$$

Die Lösung wird für $\mathfrak{r} \in G$ durch

$$n(\mathfrak{r}) = \int_{\mathring{G}} \mu(\mathfrak{q})\,\frac{n(\mathfrak{q})\cdot(\mathfrak{q}-\mathfrak{r})}{|\mathfrak{q}-\mathfrak{r}|^3}\,do(\mathfrak{q})$$

dargestellt. Unter einigen Einschränkungen für kann man zeigen, daß der Fredholmsche Radius h des im Raume der auf $\mathring{G}$ stetigen Funktionen stetiger Operators K den Wert

$$h = \frac{2\pi}{\sup\limits_{\mathring{G}} 2\pi - \Omega(\mathfrak{p})}$$

besitzt. Deshalb gelten die Fredholmschen Sätze für die Funktionalgleichungen, die hier auftreten. Man kann die Funktionalgleichungen auf $\mathring{G}$ durch lineare Gleichungssysteme ersetzen und erhält ein Näherungsverfahren für die genannten Aufgaben. Die linearen Gleichungs systeme besitzen dann bei allen Aufgaben die gleichen Koeffizienten. Bei feiner werdendem Gitter auf G konvergieren die Lösungen der linearen Gleichungssysteme gegen die gesuchten Lösungen der Funktionalgleichungen.

ZERNER, M.: Construction of singular solutions for systems of partial differential equations.

Solutions of a partial differential equation, singular on a bicharacteristic curve γ, are constructed in the following way: Construct first a one parameter family of characteristic hypersurfaces S_t through γ which is stationary at no point outside γ. Let v_t be a solution singular on S_t. Then average over t so as to blur the singularity outside γ.

On going over to systems a difficulty arises from the fact that at the start, one is only able to construct solutions singular on characteristic hyperplanes. An extra averaging is then required to get singular hypersurfaces and care is needed to make sure that some singular point is actually left at the end.

K. Habetha

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft