Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Satelliten- und Raumflugtheorie
22. - 27.3.1965

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand vom 22.3. - 27.3.1965 erstmals eine Tagung über Satelliten- und Raumflugtheorie statt, die unter der Leitung von Prof. Dr. K. Magnus (Stuttgart) und Dr. P. Sagirow (Stuttgart) stand.

Die 23 Teilnehmer, die aus dem ganzen Bundesgebiet zusammengekommen waren, begrüßten dankbar die Gelegenheit, mit so vielen Fachkollegen in regen wissenschaftlichen Gedankenaustausch treten zu können.
Das lebhafte Interesse, das den insgesamt 16 Vorträgen entgegengebracht wurde, kam in den stets sehr angeregten Diskussionen zum Ausdruck, die oft noch am späten Abend im kleineren Kreise fortgesetzt wurden.
Die vorbildliche Betreuung der Teilnehmer durch das Oberwolfacher Institut hat wesentlich zum erfolgreichen Verlauf der Tagung beigetragen. Allgemein wurde der Wunsch geäußert, ein derartiges Seminar nach angemessener Zeit zu wiederholen.

Tagungsteilnehmer:

Bockemüller, E.A., Dipl.-Math., Braunschweig
Bollermann, W., Dr., Oberpfaffenhofen
Frik, M., Dipl.-Ing., Stuttgart
Hempel, P., Dr., München
Henschel, F., Dipl.-Math., Braunschweig
Herbst, H., München
Hofer, E., cand.math., Stuttgart
Kolbe, O., cand.math., Stuttgart
Leipholz, H,, Prof. Dr., Karlsruhe
Lunderstädt, R., cand.aer., Stuttgart
Magnus, K., Prof. Dr., Stuttgart
Metzger, R., Dipl.-Phys., München
Mewes, E., Prof. Dr., Braunschweig
Ossenberg, F., Dipl.-Ing., München
Pohl, A., München

Regenberg, S., Dipl.-Math., Bremen
Schmidt, W., Dipl.-Phys., München
Schmieder, L., Dipl.-Phys., Oberpfaffenhofen
Sagirow, P., Dr., Stuttgart
Schiehlen, W., Dipl.-Ing., Stuttgart
Traenkle, C.A., Prof. Dr., München
Tschauner, J., Dr., München
Zehle, H., Dr., Berlin

Vortragsauszüge

Bollermann, W.: Eine verallgemeinerte Keplernäherung für Bahnen im n-Körperproblem nebst Erweiterung auf Schubkräfte.

Die klassische Keplernäherung für die Bewegung eines Raumfahrzeuges im n-Körperproblem $\ddot{\overline{R}}_n = -\sum_{p=1}^{n-1} \mu_p \overline{R}_{np}/R_{np}^3 + \overline{F}$ ($\overline{F}$ Schubbeschleunigung) wird unter Zuhilfenahme der Lösungen von $\ddot{\overline{K}}_{np} = -\mu_p \overline{K}_{np}/K_{np}^3$, $\overline{K}_{np}(0) = \overline{R}_{np}(0)$, $\dot{\overline{K}}_{np}(0) = \dot{\overline{R}}_{np}(0)$ und $\ddot{\overline{W}} = \overline{F}(t,\overline{W},\dot{\overline{W}})$, $\overline{W}(0) = \overline{R}_{nj}(0)$, $\dot{\overline{W}}(0) = \dot{\overline{R}}_{nj}(0)$ auf folgenden Näherungsansatz erweitert

$$\tilde{\overline{R}}_n = \overline{R}_n(0) + \dot{\overline{R}}_n(0)t + \sum_{p=1}^{n-1}\left\{\overline{K}_{np} - \overline{R}_{np}(0) - \dot{\overline{R}}_{np}(0)t\right\} + \left[\overline{W} - \overline{R}_{nj}(0) - \dot{\overline{R}}_{nj}(0)t\right].$$

Für $\overline{F} \equiv \overline{F}(t,R_{nj})$ beginnt die Korrekturfunktion $\overline{A} \equiv \overline{R}_n - \tilde{\overline{R}}_n$ erst mit Potenzen 4. Ordnung $\overline{A} = \overline{A}_4 t^4/4! + \overline{A}_5 t^5/5! + \ldots$

Als einführendes Beispiel wird der Abschnitt einer Flugbahn zum Mond gerechnet unter Einbeziehung folgender Fälle: Schubbeschleunigung proportional dem Vektor Zielkörper-Raumfahrzeug, konstanter Schub, dem Betrage nach konstanter Schub in Richtung der Bahntangente. Dabei läßt sich der konstante Schub günstig für geeignete Lenkmanöver bei Abweichung von der Soll-Bahn verwenden.

Bockemüller, E.A.: Analytische Untersuchungen zur Lösungsmannigfaltigkeit des Dreikörperproblems.

Eine spezielle Darstellung der Bewegungsgleichungen des Dreikörperproblems bildet die Grundlage für eine Klassifizierung

der Lösungsmannigfaltigkeit und ermöglicht Aussagen insbesondere über räumliche Lösungen. Dabei wird die zentrale Bedeutung der partikulären Lösungen von Euler-Lagrange deutlich. Weiterhin kommt man zu einer Beschreibung gleichschenkliger Lösungen in einer Umgebung der Lagrangeschen Dreiecks-Lösungen. Über die Möglichkeit analytischer Fortsetzung dieser Lösungen über endliche Bereiche ist bisher nichts bekannt.

Henschel, F.: Über symmetrische periodische Lösungen von Differentialgleichungen mit Anwendung auf das restringierte Dreikörperproblem.

Unter der Annahme, daß das Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = X(x)$ die Symmetrie $RX(x) = -X(Rx)$ (R ist eine involutorische Abbildung) aufweist, wird gezeigt, daß die Abbildung $Tx^o = x^o + \int_0^{\tau} X(x)dt$ symmetrisch ist (RT ebenfalls involutorisch). Diese Tatsache kann man ausnützen, um symmetrische periodische Lösungen zu berechnen. Es wird gezeigt, daß das Richtungsfeld der Differentialgleichung des restringierten Dreikörperproblems diese Symmetrie aufweist und die Berechnung solcher Lösungen unter Zuhilfenahme des Jacobischen Integrals noch weiter erleichtert wird.

Hempel, P.: Optimale Rendezvous-Manöver zu einem in kreisförmiger Bahn umlaufenden Ziel.

Die Relativbewegung zweier Flugkörper im Feld mit dem Potential $U = -\gamma/r$ wird durch

$$\xi'' - 3\xi + 2\eta' = \alpha \; ; \quad \eta'' - 2\xi' = \beta \; ; \quad \zeta'' + \zeta = \gamma$$

beschrieben, wenn einer der Körper auf einer Kreisbahn umläuft und der Abstand der beiden Körper genügend klein ist. Gesucht sind α, β, γ als Funktionen der Zeit, die einen gegebenen Ausgangszustand in den Nullzustand überführen, wobei noch das Integral $\int \left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + |\gamma|\right) d\tau$ möglichst klein sein soll (minimaler Treibstoffbedarf). Eine untere Grenze für den Massenbedarf wird hergeleitet, und es wird gezeigt, wie man durch ein in geschlossener Form angebbares Programm bei passender Wahl der Dauer dieser unteren Grenze beliebig nahe kommen kann. Voraussetzung hierfür ist, daß die durch die Ausgangskonstellation bestimmten Keplerbahnen der beiden beteiligten Objekte keinen Punkt gemeinsam haben.

Tschauner, J.: Rendezvous zu einem in elliptischer Bahn umlaufenden Ziel.

Die Relativbewegung des rendezvouswilligen Körpers K zum Ziel Z wird bei kleinem Abstand $\bar{r} = -r_Z(\xi\,\bar{i}_Z + \eta\,\bar{j}_Z + \zeta\,\bar{n}_Z)$ durch das lineare System

$$\xi'' - 3\frac{r_Z}{p_Z}\xi + 2\eta' = \alpha;\quad \eta'' - 2\xi' = \beta;\quad \zeta'' + \zeta = \gamma$$

$r_Z/p_Z = 1/(1 + \varepsilon\cos\mathcal{T})$ beschrieben.
Da die maßgebende Differentialgleichung

$$\xi'' + (4 - 3\,{}^{r_Z}/_{p_Z})\xi = -2\xi_1\;,\quad \xi_1 = \eta' - 2\xi$$

explizit gelöst werden konnte, gelang eine kanonische Darstellung des Problems, welche die Auffindung optimaler Beschleunigungsprogramme in Aussicht stellt.

Zehle, H.: Berechnung optimaler Austiegsbahnen.

Für die Zweitstufe eines Raumtransporters werden die Bewegungsgleichungen angeschrieben. Diese enthalten den Schub S und den Schubwinkel β (Richtung des Schubes gemessen gegen die Bahntangente) als Steuergrößen. Sie sind so zu bestimmen, daß

1) $0 \leq S \leq \mathrm{Min}\left\{S_{max},\ m\,b_{zul}\right\}$, 2) $m(t_e) = \mathrm{Max}$.

Dabei ist b_{zul} die maximal zulässige Schubbeschleunigung und t_e die (offene) Endzeit, zu der vorgegebene Endwerte erreicht werden. Diese Aufgabe wird mit dem Maximumprinzip von Pontrjagin behandelt. Weil die Grenze des zulässigen Bereiches für S von der Zeit abhängt, ist die Hilfsfunktion H nicht konstant. Die klassische Variationsrechnung ergibt jedoch $H(t_e) = 0$ als Transversalitätsbedingung. Während des Fluges tritt eine Freiflugphase (S = 0) auf. In dieser können alle Integrale der Bewegung angegeben werden, so daß lediglich die relativ kurzen Antriebsphasen numerisch integriert werden müssen. Die richtigen Endwerte werden durch sukzessive Verbesserung einiger Anfangswerte erreicht. Sie werden so gewählt, daß für die Endwerte ein optimaler Schritt in Richtung des Gradienten der Fehlerfläche ausgeführt wird.

Sagirow, P.: Optimale Flugbahnen mit beschränkter Winkelgeschwindigkeit.

Betrachtet wird ein Flugkörper mit den Bewegungsgleichungen

$$\dot{x}_i = x_{i+2}\ ,\ \dot{x}_{i+2} = u_1 v\tilde{u}_i/x_5 + g_i(t,x_1,x_2)\ ,\ \dot{x}_5 = -u_1,\ x_6 = u_2$$

$i = 1,2$, $\tilde{u}_1 = \cos x_6$, $\tilde{u}_2 = \sin x_6$, $0 \leq u_1 \leq u_{1max}$, $|u_2| \leq \omega$.

Gesucht werden optimale Steuerungen u_1, u_2, für die

$J = \int_0^T u_1 dt$ ein Minimum wird. Mit Hilfe des Maximumprinzips von Pontrjagin wird gezeigt, daß nur folgende optimale Bewegungen möglich sind:

a) Bewegungen mit $u_1 = 0$

b) Bewegungen mit $u_1 = u_{1max}$ und $u_2 = \pm \omega$

c) Bewegungen mit $u_1 = u_{1max}$ und $\tan x_6 = \psi_4 / \psi_3$, wo ψ_4 und ψ_3 Lösungen des adjungierten Systems sind.

d) Bewegungen auf der Lawdenschen Spirale

e) Bewegungen, die in Polarkoordinaten folgenden Gleichungen genügen

$$[\rho'' - \rho(1+z')^2 + 1/\rho^2] \cos z - [2\rho'(1+z') + z''] \sin z = b_1$$

$$[\rho'' - \rho(1+z')^2 + 1/\rho^2] \sin z + [2\rho'(1+z') + z''] \cos z = 0$$

$$-3\rho' \sin 2z + 2\rho z' \cos 2z = 2\rho \cos 2z + \tfrac{3}{4}\tfrac{1}{\rho^2} \sin^2 2z - \tfrac{2}{3}\rho - \tfrac{4}{3}\rho^4$$

wo $' \equiv \frac{d}{d\tau}$, $\tau = \omega t$, $z = \varphi - \tau$

und b_1 die variable Schubbeschleunigung ist.

(d) und e) gelten im Newtonschen Feld).

<u>Lunderstädt, R.:</u> Kombinierte Bahn-Stufenoptimierung eines 2-stufigen Flugkörpers.

Für einen sich im konstanten Gravitationsfeld bewegenden 2-stufigen Flugkörper werden für verschiedene Endbedingungen die strengen nutzlast- bzw. verbrauchsoptimalen Flugbahnen berechnet. Die Betrachtungen werden dabei durchgeführt für Flugkörper mit konstanten bzw. treibstoffproportionalen Strukturmassen, wobei unter Strukturmassen die Gesamtheit aller nicht aus Treibstoff und Nutzlast bestehenden Massen verstanden wird. Die Optimierung erfolgt durch Anwendung des Maximumprinzips von Pontrjagin. Man erhält damit Aussagen über die Steuerung der Schubkraft nach Betrag und Richtung sowie notwendige Bedingungen für den günstigsten Zeitpunkt des Übergangs von der ersten zur zweiten Stufe. Die erhaltenen Ergebnisse können auf Flugkörper mit beliebiger Stufenzahl erweitert werden. Weiter ist eine Anwendung auf stückweise konstante Gravitationsfelder möglich. Für die 2-dimensionale Bewegung wird das Lawdensche Tangensgesetz bestätigt.

Weiterhin ist als Spezialfall das "Molina-Summerfield"-Kriterium in den gefundenen Resultaten enthalten.

Regenberg, S.: Berechnung optimaler Wiedereintrittsbahnen mittels Gradientenverfahren.

Ein Raumfahrzeug soll unter Ausnützung aerodynamischer Kräfte aus einer Raumflugbahn auf einem Planeten mit Atmosphäre landen. Die Flugbahn soll durch Steuerung des Anstellwinkels so zu gegebenen Endbedingungen führen, daß die Gesamtaufheizung längs dieser Flugbahn möglichst gering wird. Die Lösung dieses nichtlinearen Problems wird mit Gradientenverfahren angegangen. Es wurde ein Digitalrechnerprogramm ausgearbeitet. Anhand von numerischen Ergebnissen, die mit diesem Programm erhalten wurden, wird die Wirkungsweise dieser Methode näher erläutert.

Schmieder, L.: Die Genauigkeit der Bestimmung von Satellitenbahnen auf Grund bordeigener Messungen.

Satellitenbahnen werden heute vor allem durch Funkortung vermessen. Bekannt ist zum Beispiel das amerikanische Minitrack-Verfahren, dessen Meßgenauigkeit etwa 5 Bogensekunden beträgt. Einen wesentlich geringeren Aufwand würden Messungen von Bord aus erfordern, deren Genauigkeit jedoch wesentlich geringer ist. Es wird untersucht, ob etwa durch eine größere Zahl von Messungen über die ganze Bahn hinweg und Anwendung der Gaußschen Ausgleichsrechnung dieser Nachteil ausgeglichen werden kann.

Magnus, K.: Die Stabilität der Drehbewegung starrer Satelliten.

Beim allgemeinen n-Körperproblem gehen die Orientierungen dieser Körper in den Ausdruck für die potentielle Energie ein. Das führt zu einer Verkopplung zwischen Bahn- und Drehbewegungen, so daß eine getrennte Behandlung der Kepler-Bewegung der Massenmittelpunkte und der Euler-Bewegung der Kreiseldrehung um den Massenmittelpunkt i.a. nicht möglich ist. Das wurde am Sonderfall eines vereinfachten 2-Körper-Systems Erde-Satellit untersucht. Wenn die Erde Kugelpotential besitzt, gelten hier die Gleichungen

$$m_S \ddot{\bar{R}} = -\gamma m_E \int \frac{\bar{R}'}{R'^3}\, dm = -\gamma \frac{m_E m_S}{R^3} \bar{R} + \ldots\ldots$$

$$d\bar{H}/dt = d'H/dt + \bar{\omega} \times \bar{H} = -\gamma m_E \int \frac{\bar{r} \times \bar{R}'}{R'^3}\, dm = \frac{3g}{R} \int (\bar{r}\bar{e}_v)(\bar{r} \times \bar{e}_v)\, dm + \ldots.$$

Nimmt man nur die bezüglich $L/R \ll 1$ quadratisch kleinen Glieder mit (L Satellitenlänge, R Bahnradius), dann wird die Bahn von der Orientierung unabhängig, nicht aber die Drehbewegungen unabhängig von der Bahn. Im Rahmen dieser Näherung kann die Drehbewegung aus $d'\bar{H}/dt + \bar{\omega} \times \bar{H} = \frac{3g}{R} (\bar{e}_v \times \Theta \bar{e}_v)$ berechnet werden. Partikuläre Lösungen sind z.B.

1) $A = B = C, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_0$;
2) $B = C, \bar{\omega} = \bar{e}_x p, \; q = r = 0$;
3) "relative Ruhe zur Bahn";
4) Überschlagen um eine Achse senkrecht zur Bahnebene.

Die Stabilität dieser Partikular-Lösungen wurde diskutiert und in der Ebene des "Form-Dreiecks" dargestellt.

Hofer, E.: Partikuläre Lösungen der allgemeinen Grundgleichungen für die Bahn- und Drehbewegungen von Satelliten.

Die i.a. miteinander gekoppelten Grundgleichungen für die Bahn- und Drehbewegungen von starren Satelliten können für Sonderfälle bezüglich der Körperform und Orientierung integriert werden. Es können für spezielle homogene Satelliten von der Form eines Kreisringes, einer Kreisscheibe, eines Kreiszylindermantels und eines Kreiszylinders partikuläre Lösungen für ebene Kreisbahnen gefunden werden. Bezüglich der Orientierung sind für alle diese Körper nur die 3 Fälle möglich, für welche Duboschin Sonderlösungen für einen stabförmigen Satelliten angegeben hat. Zur anschaulichen Deutung der Ergebnisse wird der Begriff des "Metazentrums" eines Satelliten eingeführt. Es zeigt sich, daß in den hier behandelten Fällen durch die Lage dieses Metazentrums zum Massenmittelpunkt des Satelliten Aussagen über die Stabilität der Bewegung gewonnen werden können.

Schiehlen, W.: Drehbewegungen von Satelliten auf elliptischen Bahnen.

Für einen starren Satelliten auf einer elliptischen Bahn existiert die partikuläre Lösung $\psi = \psi(t)$, $\delta = 0$, $\varphi = 0$, wenn man mit ψ, $\delta = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ und φ die Euler-Winkel zwischen dem bahnfesten Koordinatensystem und dem körperfesten Hauptachsensystem bezeichnet. Dabei muß ψ dem Differentialgleichungssystem

$$\ddot{\psi} + 3\Omega^2 \frac{B-C}{A}(1+e\cos\alpha)^3 \sin\psi\cos\psi = -\ddot{\alpha}\ ;\ \dot{\alpha} = \Omega(1+e\cos\alpha)^2$$

genügen. Das bedeutet, daß der Satellit auf einer elliptischen Bahn stets erzwungene, ebene Schwingungen ausführt. Es wird über die Ergebnisse verschiedener Untersuchungen über die Stabilität von möglichen ebenen, periodischen Schwingungen und über die räumliche Stabilität der Lage der relativen Ruhe berichtet.

Traenkle, C.A.: Endnavigation bei interplanetarer Raumfahrt.

Übergangstrajektorien von einem Basisplaneten zu einem Zielplaneten werden durch die "Einflußsphären" um die Planeten in aufeinanderfolgende Abschnitte eingeteilt: Die Mittenphase im Mittenabschnitt zwischen den Planeten, innerhalb des Sonnenfeldes und die beiden planetaren Endphasen. Es wird gezeigt, daß sich die Navigation der Endphasen wirksam mittels einer Sequenz von Geschwindigkeitskorrekturen nach Art einer abnehmenden geometrischen Progression durchführen läßt, wie entsprechend in einer früheren Arbeit für die Mittkursnavigation. die untersuchten Sequenzverfahren ergeben sich als einfach und wirtschaftlich: die mittlere Summe der Geschwindigkeitskorrekturen, entsprechend dem Verbrauch an Treibstoffreserve für die Korrekturmanöver ist sehr klein, verglichen mit dem entsprechenden Verbrauch für den gesamten Übergang.

Kolbe, O.: Optimaler Ausgleich des Bahnfehlers bei Mehrstufenraketen.

Betrachtet wird ein Navigationsproblem, bei dem ein Projektil oder ein Verband von Projektilen mit beschränkten Steuerungen über eine längere Zeit hinweg gesteuert wird. Es liege bereits ein fester "Fahrplan" für eine Steuerung vor, die in irgend einer Hinsicht optimal sein kann; und es bestehe die Möglichkeit, während des Fluges an bestimmten Zeitpunkten den tatsächlichen Zustand des Verbandes mit dem Sollzustand des Fahrplanes zu vergleichen. Es wird vorgeschlagen, einen späteren Abschnitt des Fahrplanes so abzuändern, daß man bei festgehaltener Ablaufsdauer dem zugehörigen Sollzustand so nahe wie möglich kommt. Falls die Bahnfehler klein sind, kann ein lineareт Störungsansatz gemacht werden. Für die Lösung dieses Problems wird ein Verfahren der sukzessiven Approximationen angegeben, das auf einem Verfahren von Demjanow basiert. Als konkretes Beispiel wird die Bahn einer aufsteigenden Mehrstufenrakete gewählt.

Mewes, E.: Einfluß kugelförmiger rotierender Erde auf Bewegungsgleichungen und Bahnverläufe für einen angetriebenen Körper im Zentralfeld.

Die Bewegungsgleichungen eines fliegenden Körpers werden unter Berücksichtigung des Einflusses der Kugelform der Erde und ihrer Rotation aufgestellt. Es wird ermittelt, für welche Flugzustände die Ansätze vereinfacht werden dürfen. In Komponentendarstellungen werden die Ansätze für Aufstiege und weiche Landungen unter bestimmten Umständen besonders übersichtlich. Dazu werden "Geschwindigkeitsachsenkreuz" und verschiedene normale geodätische Achsenkreuze eingeführt und die Beziehungen dazwischen benutzt. Bahnen für Landungen auf dem Zentralkörper aus Umlaufbahnen heraus sind für verschiedene Tangentialschubverläufe berechnet und für Vereinfachungen gegenübergestellt. Die Korrekturen durch Zentrifugal- und Corioliskräfte werden abgeschätzt.

M. Frik (Stuttgart)