Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Cohen's Unabhängigkeitsbeweise in der Mengenlehre.

2. bis 5. April 1965

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand unter Leitung von Dr. G. H. Müller einr Tagung statt, bei der über Methoden für Unabhängigkeitsbeweise in der Mengenlehre berichtet wurde, die im Anschluß an Paul J. Cohen's Sätze entstanden sind. Die Tagung wurde sehr bereichert durch zahlreiche Diskussionen mit R.M. Solovay vom Institute for Advanced Study (Princeton). Für die Übernahme seiner Flugkosten ist die Tagungsleitung der National Science Foundation zu Dank verpflichtet.

Teilnehmer:

Felscher, Dr.W.	Freiburg
Fenstad, Dr. J. E.	Oslo
Hermes, Prof.Dr.H.	Münster
Jensen, Dr.R.B.	Bonn
Müller, Dr.G.H.	Heidelberg
Oberschelp, Dr.A.	Hannover
Oberschelp, Dr.W.	Hannover
Rödding, Dr.D.	Münster
Schwabhäuser, Dr.W.	Münster
Schwarz, H.	Freiburg
Solovay, Dr.R.M.	Princeton/USA
Thiele, Dr.E.J.	Hannover

Nach einer einleitenden Übersicht von G.H. Müller stellte R.B. Jensen in neun Vorträgen ausführlich die von Scott, Fefermann und Solovay angeregte Technik der generischen Modelle dar und gab eine Modellkonstruktion, bei welcher die Kontinuumshypothese in bestimmter Weise verletzt wird. In einem weiteren Vortrag berichtete W. Felscher über eine mehr an den ursprünglichen Cohenschen Verfahren orientierte Konstruktion sog. verallgemeinerter Gödelmodelle, die von H. Schwarz unter Mitwirkung des Vortragenden ausgedacht worden ist. Den Abschluß der Tagung bildete ein Vortrag von

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

R.M. Solovay über messbare Kardinalzahlen und die Kontinuumshypothese. In dem anschließenden Kolloquium der Deutschen Vereinigung f. Mathematische Logik und f. Grundlagenforschung er exakten Wissenschaften gab R.M. Solovay weiter eine Zusammenfassung der mit den Cohen'schen Techniken bisher bewiesenen Sätze. Ein Bericht darüber findet sich am Schluß dieses Tagungsberichtes.

Vortragsauszüge:

Müller, G. H.: Hauptzüge der Cohen'schen Methode für Unabhängigkeitsbeweise in der Mengenlehre:

Sei $M = \langle U_M, \epsilon \rangle$ ein Modell der Zermelo-Fraenkel'schen Axiome einschließlich Fundierungsaxiom, ausschließlich Auswahlaxiom, und sei On_M die Klasse der Ordinalzahlen von M. Eine von Gödel stammende (verallgemeinerte) Modellkonstruktion G_M angewandt auf eine "Zwischen"-Klasse U mit $On_M < U < U_M$ führt zu einem ZF-Modell $G_M(U) < M$. Um zu einem ZF-Modell $G_M(U)$ zu gelangen, das z.B. die allgemeine Kontinuumshypothese verletzt, muß man auf Grund von Resultaten von Gödel, Shepherdson und Cohen verhindern, daß $G_M(U)$ Submodell von M wird. Dazu werden neue Grundprädikate, z.B. ein Prädikat Q(u,v), $\langle u,v \rangle \epsilon U \times U$ eingeführt, für das an Stelle der gewohnten universell erklärten Belegung auf $U \times U$ nur ein durch eine Menge indiziertes System von Teilbelegungen auf Teilklassen $V \subseteq U \times U$ gegeben sei. An Stelle des üblichen Folgerungsbegriffes tritt dann der Cohen'sche Erzwingungsbegriff, der sich als eine natürliche Verallgemeinerung des Folgerungsbegriffes herausstellt. Setzt man nun voraus, daß M abzählbar ist (Anwendung des Löwenheim-Skolemschen Satzes), dann gelingt es durch die (metamathematische) Abzählung aus dem System von Teilbelegungen wieder zu einer universellen "generischen" Belegung von Q zu gelangen, die aber allgemeiner ist, als die im Rahmen von M selbst definierbaren Belegungen. Es gilt dann der "Modellsatz", demzufolge $G_M(U)$ für alle "geeigneten" Systeme von Teilbelegungen ein ZF-Modell ist. - Die Unabhängigkeitsbeweise beruhen nun wesentlich darauf, daß man in geschickter Weise geeignete (= genügend "dichte") Systeme von Teilbelegungen

von Q wählt, und mit dessen Hilfe die z.B. die allg.Kont. Hyp. verletzenden Mengen "nennbar" machen kann. Der Modellsatz garantiert dabei, daß stets weiter ein ZF-Modell vorliegt.

Jensen, R. B.: Natürliche Modelle der Mengenlehre.

Die von P. Cohen entdeckte Methode zur Gewinnung von Unabhängigkeiten in der Mengenlehre wurde am folgenden Beispiel erläutert:
M sei ein natürliches abzählbares Modell für ZF+KH+Auswahlaxiom. Dann gibt es ein natürliches Modell $N \supset M$ für ZF+Auswahlaxiom mit

(a) Ordnungszahlen von M = Ordnungszahlen von N

(b) $(\aleph_\nu)_M = (\aleph_\nu)_N$

(c) $2^{\aleph_\nu} = \aleph_{\nu+1}$ in N für $\nu < \gamma$

(d) $2^{\aleph_\gamma} \geqslant \aleph_{\gamma'}$

(e) $2^{\aleph_\gamma} = \begin{cases} \aleph_{\gamma'} & \text{falls } \mathfrak{J}\,\aleph_{\gamma'} > \aleph_\gamma \text{ in M} \\ \aleph_{\gamma'+1} & \text{sonst} \end{cases}$

(hierbei sind γ, γ' festgewählte Ordnungszahlen von M mit $\gamma < \gamma'$). In dem Beweis werden Ideen von Scott, Fefermann, und Solovay benutzt. Der Satz ist ein Sonderfall eines von Easton bewiesenen Resultates.

Felscher, W.: Bericht über verallgemeinerte Gödelfunktionen, die für kritische Formeln durch Mengen von Bedingungen bestimmt sind; Konstruktion verallgemeinerter Gödelmodelle nach einer einheitlichen Methode von R. Solovay. Allgemeine Beweisbarkeit der Ersetzbarkeitsaxiome und, unter Zusatzvoraussetzung, des Potenzmengenaxioms. Dabei allgemeine Voraussetzung: abstraktes Modell für ZF mit abzählbarem, transitivem Submodell für ZF. Zahlreiche der mitgeteilten Sätze wurden von Hubert Schwarz in ähnlicher oder gleicher Form zuerst bewiesen.

Solovay, R. M.: Measurable Cardinals and the Continuum Hypothesis.

A proof was sketched that the existence of measurable cardinals (MC) implies neither the continuum hypothesis

not its negation. In symbols

$$\mathrm{Con}(ZF+MC) \longrightarrow \mathrm{Con}(ZF+MC+CH)$$
$$\mathrm{Con}(ZF+MC) \longrightarrow \mathrm{CON}(ZF+MC+\neg CH).$$

Solovay, R. M.: Applications of Cohen's Method.

A general survey of results obtained using the Method of Forcing was given. A list of the theorems presented will Follow. For brevity let "(#)" be an abbreviation for: "If Zermelo-Fraenkel is consistent, then so is Z-F plus the following:"

Models in which the axiom of choice fails:

Theorem 1 (P. Cohen) (#). 1) The reals are not well-orderable. 2) The countable axiom of choice for pairs fails.

Theorem 2 (R.M. Solovay). If Z-F + "there exists a weakly inacessible cardinal" is consistent, then so is Z-F plus the followings axioms:

1) The principle of dependent choices;
2) Every set of reals is Lebesgue measurable;
3) Every set of reals has the property of Baire;
4) Every uncontable set of reals contains a perfect subset.

Theorem 3 (Jensen) (#). Countable Axiom of Choice $\not\rightarrow$ Principle of Dependent Choices.

Theorem 4 (A. Levy) (#). 1) The reals are a countable union of countable sets; 2) $\aleph_0$ is cofinal with $\aleph_1$; 3) Every well-ordered set of reals is denumerable.

Theorem 5 (Levy and Halperin) (#). The ordering theorem the reals are well-ordered.

From now on, Z-F includes axiom of choice.

Theorem 6 (Easton). Let $\mathfrak{M}$ be a model of Z-F + "the generalized continuum hypothesis" which is natural (*) and countable. Let F: $O_{n_{\mathfrak{M}}} \rightarrow O_{n_{\mathfrak{M}}}$ be "$\mathfrak{M}$-definable".

We suppose that

1) $\alpha \leq \beta \longrightarrow F(\alpha) \leq F(\beta)$;

2) $\mathrm{cf}(\aleph_{F(\ )}) > \aleph_\alpha$

(*) $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{U}, \Omega \rangle$ heißt natürlich $\underset{\mathrm{Df.}}{\longleftrightarrow} \Omega(\epsilon) = \epsilon \restriction \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$ transitiv "ϵ" und "transitiv im Sinne der Metasprache.

Then there is a natural model $\mathfrak{N}$ of Z-F such that

1) $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$
2) $On_{\mathfrak{M}} = On_{\mathfrak{N}}$
3) $(\aleph_\alpha)_{\mathfrak{M}} = (\aleph_\alpha)_{\mathfrak{N}}$, for $\alpha \in On_{\mathfrak{M}}$
4) $cf(\aleph_\alpha)_{\mathfrak{M}} = cf(\aleph_\alpha)_{\mathfrak{N}}$
5) $(2^{\aleph_\alpha})_{\mathfrak{N}} = \aleph_{F(\alpha)}$, (für $\aleph_\alpha$ regulär.)

Theorem 7 (Tannenbaum) ($\#$). Souslin's Hypothesis is false.
Theorem 8 (Feferman) ($\#$). There is no definable well-ordering of the reals.
Theorem 9 (Jensen). Let $\mathfrak{M}$ be a countable natural model of Z-F . Then $\exists$ countable natural model $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ such that

1) $On_{\mathfrak{M}} = On_{\mathfrak{N}}$
2) In $\mathfrak{N}$, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

We need the following proposition.
(H). There exists a set S of functions from ω to ω such that $\overline{\overline{S}} = \aleph_1$, and if $f: \omega \to \omega$, $\exists g: \omega \to \omega$, $g \in S$ such that $g(n) \geq f(n)$, for $n \in \omega$.
Theorem 10 (Solovay). Let $\mathfrak{M}$ be a countable natural model of Z-F + CH. Let $\aleph_\tau$ a cardinal of Z-F with

$$cf(\aleph_\tau) > \aleph_0, \quad \aleph_\tau > \aleph_1$$

Then $\exists$ countable natural models $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ such that

1) $On_{\mathfrak{M}} = On_{\mathfrak{N}_i}$; (i = 1,2),
2) $(\aleph_\alpha)_{\mathfrak{M}} = (\aleph_\alpha)_{\mathfrak{N}_i}$; (i = 1,2),
3) $2^{\aleph_0} = \aleph_\tau$ in $\mathfrak{N}_i$
4) H is true in $\mathfrak{N}_1$ and false in $\mathfrak{N}_2$.

Theorem 11 (Solovay, Levy). If Z-F + "there exists a measurable cardinal" (MC) is consistent, then so are Z-F + MC + CH; Z-F + MC + $\neg$CH.
Theorem 12 (Solovay, Jensen). If A-E of Gödel's orange monograph imply a theorem φ of Z-F, then φ follows from Z-F (which includes the axiom of choice).

H. Schwarz (Freiburg)