Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

6. Kolloquium

der Deutschen Vereinigung für Mathematische Logik und für Grundlagenforschung der exakten Wissenschaften (DVMLG)e.V.
vom 6.-9.April 1965

Unter der Leitung von Prof. Dr. H. Hermes (Münster) und Prof. Dr. H.A. Schmidt (Marburg) wurde im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach das sechste Kolloquium der DVMLG abgehalten. Es war das zweite Kolloquium, das in Oberwolfach stattfand. Wie schon im Vorjahre waren auch Gäste erschienen. Eine Beziehung zur unmittelbar vorangegangenen Tagung über Cohen's Beweismethode in der Mengenlehre war dadurch gegeben, daß die Teilnehmer jener Arbeitstagung auch am Kolloquium der DVMLG teilnahmen. Außerdem gaben während des Kolloquiums Herr G.H. Müller einen Überblick über Cohen's Methode zur Konstruktion von Modellen und Herr Solovay eine eindrucksvolle Zusammenstellung der erzielten Resultate. Der Inhalt dieser beiden Vorträge ist in den entsprechenden Kurzberichten zur vorangegangenen Tagung enthalten. Am 8. April 1965 fand eine Mitgliederversammlung der DVMLG statt.

Liste der Teilnehmer:

Burton, Dr. K.	Glasgow	Menne, Dr. A.	Hamburg
Crossley, Prof.Dr. J.N.	Oxford	Müller, Dr. G.H.	Heidelberg
Diller, Dr. J.	Kiel	Oberschelp. Dr. A.	Hannover
Felscher, Dr. W.	Freiburg	Oberschelp, Dr. W.	Hannover
Fenstad, Dr. J.E.	Oslo	Péter, Prof. Dr. R.	Budapest
Fiedler, Dr. H.	Köln	Rödding, Dr. D.	Münster
Hermes, Prof. Dr. H.	Münster	Schmidt, Prof.Dr.A.H.	Marburg
Jensen, Dr. R.	Bonn	Schwabhäuser, Dr. W.	Münster
Kempski, Prof.Dr. J.v.	Hembsen	Solovay, Dr. R.	Princeton
Kreisel, Prof. Dr. G.	Paris	Specker, Prof.Dr. E.	Zürich
Kutschera, Dr. F. v.	München	Stegmüller, Prof.Dr.W.	München
Lorenz, Dr. K.	Erlangen	Thiele, Dr. J.	Hannover

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Es folgen in der Reihenfolge der Vorträge die von den Autoren eingelieferten Vortragsauszüge:

<u>Stegmüller, W.:</u> Wittgensteins Bildtheorie der Satzbedeutung.

Wittgensteins Bildbegriff kann so eingeführt werden, daß der Begriffsapparat seiner Ontologie auch in einem relativierten Sinne verwendet wird. Das formale Analogon zu seinem Begriff der "Substanz der Welt" bildet der Begriff des intensionalen Relationssystems $R = \langle A, R_1, \ldots, R, \ldots \rangle$ mit R_ξ als intensional zu deutenden Attributen. Auf dieser Grundlage läßt sich leicht ein präziser Begriff der Modellwelt einführen. Den entscheidenden Begriff der Bildtheorie bildet der Begriff der <u>Isomorphie</u>, hier angewendet auf Modellwelten. Er läßt sich in vollkommener Analogie zu Tarski's Isomorphie-Definition für "relational systems" einführen. Bilder sind Paare $\mathcal{B} = \langle f,g \rangle$ mit f als Modellwelt und g als 1-1-Funktion, deren Argumentbereich = Bereich der Relationsbasis von f; f ist das Bildfeld, g die abbildende Beziehung. <u>Wahre Bilder</u> von (Modellwelt) $\mathcal{G}$ sind Bilder, deren Feld f auf Grund der abbildenden Beziehung g isomorph auf $\mathcal{G}$ abgebildet wird. Der Begriff des <u>logisch adäquaten</u> Bildes setzt die Einführung eines stärker intensionalen Begriffs der Isomorphie von logischen Räumen voraus. Der logische Raum $\mathcal{L}(R)$ über der Relationsbasis R ist dabei einfach die Klasse der Modellwelten mit fester Basis R. Der <u>echte</u> logische Raum f(R) wird durch Bedeutungspostulate aus L(R) ausgesondert. Falls R und R' durch h ähnlich abgebildet werden, und das Isomorphie-Korrelat von $\mathcal{E}(R)$ bezüglich h mit $J(\mathcal{E}(R), h)$ bezeichnet wird, so ist die Isomorphie von $\mathcal{E}(R)$ und $\mathcal{E}(R')$ festgelegt durch die Bedingung: $J(\mathcal{E}(R), h) = \mathcal{E}(R')$.
Die Bildtheorie wird zunächst auf semantisch elementare Sätze angewendet, wobei das "Satzzeichen" als Bildfeld gedeutet wird. Die Verallgemeinerung auf beliebig komplexe Aussagen erfolgt durch Verwendung des Begriffs der vollständigen und ausgezeichneten disjunktiven Normalform, deren Komponenten durch geeignete Transformationsregeln in Bilder transformierbar sind.

Thiele, E.J.: Über endlich axiomatisierbare Teilsysteme der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre.

In der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre treten neben gewissen echten Axiomen die Schemata der Aussonderungs- und Ersetzungsaxiome auf. Von Wang, Montague und anderen ist bewiesen worden, daß das System ZF wesentlich nicht endlich axiomatisierbar ist. Beschränkt man die Aussonderungs- und Ersetzungsaxiome auf diejenigen Fälle, deren Präfix nur eine beschränkte Anzahl von (A)-(E)-Wechseln hat, so ist das entstehende System durch Hinzunahme gewisser Ersetzungsaxiome endlich automatisierbar.
Es wurden zwei Beweise skizziert:
Man kann für die genannte Klasse von Ausdrücken eine Erfüllungsdefinition geben. Als zusätzliches Axiom fordert man das der Gültigkeit der Axiome bei dieser Erfüllungsdefinition. -
Bei Hinzunahme des Gödelschen Konstruierbarkeitsaxioms lassen sich, entsprechend der Tripelabzählung Gödels, Terme definieren, die den Ausdrücken der genannten Klasse zugeordnet werden können. Für diese Terme lassen sich dann die Axiomenschemata als eigentliche Axiome formulieren.

Kreisel, G.: Gelöste und ungelöste Probleme der intuitionistischen Mathematik.

Literatur: Das neue Buch von Kleene und Vesley (North-Holland Publ. Comp. 1965), der zweibändige Bericht eines Seminars in Stanford (Sommer 1963), der Bericht: "Mathematical Logic" in "Lectures on Modern Mathematics", Band 3 (Wiley) 1965. Die Hauptresultate des Vortrags sind in diesen Arbeiten zu finden, abgesehen von einem neuen Resultat von Howard: Die Ordinalzahl der neuesten Systeme der intuitionistischen Analysis (die alle beweistheoretisch äquivalent sind) ist $\varphi\varepsilon_{\Omega+1}$ in der Notation von H. Bachmann.

Unter den ungelösten Problemen:
(1) Ist der Heytingsche Aussagenkalkül vollständig mit Bezug auf Aussagen, die im Kleeneschen Buch definierbar sind, also ohne Verwendung der gesetzlosen freien Wahlfolgen ?
(2) Ist der Aussagenkalkül vollständig mit Bezug auf die Interpretation der intuistionistischen Konstanten, die

Gödel in Dialectica 1958 angegeben hat ?
(3) Kann die Unvollständigkeit des Heytingschen Prädikatenkalküls ohne Annahme der Churchschen These bewiesen werden ?
(4) Ist das verallgemeinerte induktive Definitions- und Schlußprinzip in den Formen $\bigwedge x\, [A(P_A, x) \longrightarrow P_A(x)]$, $\bigwedge x[A(Q,x) \rightarrow Q(x)] \longrightarrow \bigwedge x[P_A(x) \longrightarrow Q(x)]$ für
(a) Formeln $A(P,x)$ in denen P positiv vorkommt, (b) P monoton vorkommt, also $P \subsetneq P' \longrightarrow \bigwedge x[A(P,x) \longrightarrow A(P',x)]$ beweistechnisch äquivalent ?
(5) Ist das verallgemeinerte induktive Prinzip für Spezies von Objekten endlicher Stufe zurückzuführen auf (4) ?
Endlich das Hauptproblem: Ein System für die intuitionistische Mathematik, in dem die verschiedenen intuitionistischen Begriffe so definiert werden können, wie die üblichen Begriffe der klassischen Mathematik in der Sprache der Mengenlehre.

<u>Schwabhäuser, W.:</u> Zum Folgerungsbegriff in der schwachen Logik der zweiten Stufe.

Unter Theorien im Rahmen der schwachen Logik der zweiten Stufe (SL_{II}-Theorien) werden Theorien verstanden, die im Sinne des Ansatzes von Tarski, Notices AMS 5 (1958), p.673, neben den Individuenvariablen noch Variablen für endliche Folgen von Individuen enthalten. Der entsprechende (SL_{II}-) Folgerungsbegriff läßt sich (im Gegensatz zum Folgerungsbegriff für die Logik der ersten Stufe) nicht durch einen Ableitungsbegriff mit rekursiven Schlußregeln erfassen. Das ergibt sich schon daraus, daß man für den Bereich der natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation ein kategorisches (SL_{II}-) Axiomensystem angeben kann. Es wird der folgende stärkere Satz bewiesen.
Vor.: (1) T ist (Satzmenge) eine SL_{II}-Theorie.
(2) T besitzt ein Modell mit wenigstens zwei Elementen.
Beh.: T läßt sich nicht als Ableitungsmenge i.b.a. rekursive Schlußregeln aus einem rekursiven Axiomensystem erhalten.
Zusatz 1: Unter denselben Voraussetzungen ist T nicht arithmetisch definierbar.
Zusatz 2: Vor. (2) ist (in beiden Fällen) nicht entbehrlich.
An anderer Stelle zeigte Verf., daß jede SL_{II}-Theorie, die

ein arithmetisch definierbares Axiomensystem und keine einelementigen Modelle besitzt, schon ein im Kalmárschen Sinne elementares (also sicher primitiv-rekursives) Axiomensystem besitzt. Dieses Resultat läßt sich (im Gegensatz zu ähnlichen Resultaten für elementare Theorien) auf Grund der vorigen Sätze sicher nicht durch Verwendung eines zum Folgerungsbegriff adäquaten Ableitungsbegriffes erhalten.

<u>Kutschera, F. von:</u> Zur konstruktiven Begründung der Logik.

Es wurde eine Erweiterung des Begründungsansatzes von H.B. Curry (Foundations of Mathematical Logic, 1963) vorgetragen auf der Basis von Kalkülen, für die Beweis- und Widerlegungsbegriffe definiert sind. In dieser Erweiterung lassen sich verschiedene konstruktiv begründbare Logiksysteme vergleichen nach den Anforderungen an den Herleitungsbegriff der Grundkalküle. Insbesondere läßt sich auch eine Begründung der klassischen Logik angeben, die sich nicht auf vollständige Kalküle beschränkt. Der neue Ansatz ermöglicht in einfacher Weise Vollständigkeitsbeweise für aussagenlogische Funktorensysteme und zeichnet eine symmetrische Minimallogik aus.

<u>Crossley, J. N.:</u> Constructive theory of well-orderings.

We define an effective equivalence relation on reflexive well-orderings of the natural numbers. The equivalence classes are called co-ordinals and we denote these by A,B,.... Addition, multiplication and exponentiation are defined and also a (non-linear) partial ordering which also satisfies $A,B \leq C \longrightarrow A \leq B \vee B \leq A$. A co-ordinal P is a principal number for f if, for infinite A, $A < P \longrightarrow f(A,P) = P$. Analogues of the classical laws of ordinals for $+,\cdot,\exp$ do <u>not</u> break down if co-ordinals are bounded by principal numbers (for $+,\cdot,\exp$). Let W denote co-ordinal of the standard ω-ordering. Then W^A, W^{W^A} are principal numbers for $+,\cdot$ respectively. There are other principal numbers for $+,\cdot$. A function E is defined such that the principal numbers for exponentiation are precisely $E(A)$, for any co-ordinal A, and W; or equivalently, the solutions of $2^X = X$. Let $|A|$ denote the classical ordinal of any well-

ordering in A. A collection $\mathcal{A}$ of co-ordinals is said to be <u>α-unique</u> if $A,B \in \mathcal{A} \wedge |A| = |B| < \alpha \longrightarrow A = B$; <u>strictly α-unique</u> if it is α-unique but not β-unique for any $\beta > \alpha$. The principal numbers for +,·,exp are respectively strictly ω^{ω}, $\omega^{\omega^{\omega}}$, ε_{ω}-unique. There are (well-ordered by $\leq$) sets of co-ordinals of arbitrary large (denumerable) ordinal which are closed under +,·,exp (Crossley and Aczél) (Crossley and Schütte). There exist a,b $\in$ O (i.e. Kleene's class of recursive well-orderings), representing ω^2 such that the well-orderings of

$$O(a) = \left\{ \langle d,c \rangle : d \leq_0 c <_0 a \right\}$$

and O(b) are not effectively equivalent even though these are recursively enumerable.

<u>Schütte, K.:</u> Ein konstruktives System von Ordinalzahlen.

Im Anschluß an Arbeiten von O. Veblen 1908 und W. Ackermann 1951 definierte Schütte 1954 ein konstruktives System S von Ordinalzahlen, dessen Ordnungstyp die erste Veblen-Zahl E_0 ist. Auf andere Weise entwickelte G. Takenti 1957 Systeme O(n) von "ordinal diagrams" für jede natürliche Zahl n. Diese Systeme wurden von ihm für beweistheoretische Untersuchungen von Teilsystemen der einfachen Typenlogik gebraucht. Der Zusammenhang zwischen den Systemen S und O(n) wurde von H. Levitz 1964 geklärt. Er zeigt, daß O(1) einem Abschnitt von S und S einem Abschnitt von O(2) entspricht. Hierbei ergab sich zugleich ein Zusammenhang mit den Normalfunktionen von H. Bachmann 1950. -
Auf der Grundlage von Normalfunktionen für eine allgemeinere Hierarchie kritischer Zahlen wird für jede natürliche Zahl N ein Ordinalzahlensystem $\Sigma(N)$ definiert. Diese Systeme $\Sigma(N)$ enthalten das System S und den konstruktiv definierbaren Ordinalzahlenabschnitt, der sich aus der Untersuchung von H. Bachmann ergibt. $\Sigma(N)$ ist primitiv-rekursiv definiert. Die lineare Ordnungseigenschaft ist finit beweisbar, die Wohlordnungseigenschaft ist jedoch nur mit imprädikativen Mitteln beweisbar (mit einer imprädikativen Verwendung von Prädikaten, die nach dem verallgemeinerten induktiven Definitionsprinzip von G. Kreisel definiert sind). Wahrscheinlich werden in den Systemen $\Sigma(N)$ genau

dieselben Ordinalzahlen wie in den Systemen O(n) repräsentiert.

Hermes, H.: Bernays' Class Theorem.

Statt direkt zu zeigen, daß es zu jedem "Spezialausdruck" α und jeder Subjektsvariablen x eine neue Subjektsvariable y gibt, so daß $\bigvee_y \bigwedge_x (x \in y \longleftrightarrow Mg\, x \wedge \alpha)$ aus endlich vielen Axiomen der Mengenlehre herleitbar ist, kann man zunächst beweisen, daß es zu jedem α und x ein y gibt, so daß $\bigvee_y (\mathit{Ef}\, y \wedge \bigwedge_x (Mg\, x \longrightarrow (\langle x, 0 \rangle \in y \longleftrightarrow \alpha))$ herleitbar ist. ($\mathit{Ef}\, y$ heißt, daß y eine Funktion ist, deren Definitionsbereich die Allklasse ist). So kann man die Verwendung von beliebigen n-tupeln $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ vermeiden. (Überlegung gemeinsam mit D. Rödding).

Péter, R.: Über die Berechenbarkeit von rekursiven Wortfunktionen durch Kellerspeicher.
(Erscheint in "Acta Hungarica")

In den letzten Jahren ist auf verschiedenen Gebieten, insbesondere bei automatischen Übersetzungen, die Forderung in den Vordergrund getreten, daß eine Zeichenreihe "sequentiell" auf eine andere übertragen werden soll; d.h. derart, daß zur Feststellung der aufeinanderfolgenden Zeichen des Ergebnisses, die Zeichen der ursprünglichen Zeichenreihe der Reihe nach herangezogen werden sollen, wobei also zu einem früher betrachteten Zeichen nie mehr zurückzukehren ist. Offenbar gelingt das nicht ohne weiteres für beliebige "Wortfunktionen", die gewisse Zeichenreihen in andere übertragen; aber die Verwendung von "Kellerspeichern" kann uns dazu verhelfen.
Ein Kellerspeicher ist ein Speicher, in welchen Buchstaben der betrachteten Wortmenge, und auch andere "Hilfsbuchstaben" einzeln, immer auf den Gipfel gesetzt werden können, wodurch die im Speicher bereits enthaltenen Buchstaben um einen Platz tiefer gedrückt werden; und die Buchstaben können daraus auch einzeln herausgenommen werden, auch so, daß etwa nur ein Abzug des obersten Buchstabens herausgenommen wird, aber auch so, daß der oberste Buchstabe gestrichen wird, wobei sich die anderen etwa "elastisch" um einen Platz erheben. Was bei einem Schritt der Berechnung

eines Funktionswertes getan werden soll, kann außer von dem eben betrachteten Zeichen des Argumentes auch von den obersten Zeichen der Kellerspeicher abhängen.
In der Literatur wurden zu speziellen Zwecken immer ad hoc Methoden zu sequentiellen Berechnungen mit Hilfe von Kellerspeichern angegeben; und es wurde erwünscht, eine in möglichst großer Allgemeinheit brauchbare Methode zu finden.
Nun habe ich eine solche allgemeine Methode zur sequentiellen Berechnung jeder primitiv- und sogar jeder partiell-rekursiven Wortfunktion (bei endlichem Alphabet) angegeben.
I. Urbán hat bewiesen, daß man dabei immer mit höchstens 3 Speichern auskommt.
Nach Präzisierung des Begriffes einer durch ein Kellerspeichersystem partiell berechenbaren Wortfunktion kann auch die Umkehrung des genannten Ergebnisses (auch bei beliebigem Alphabet) bewiesen werden.
Als Anwendung ergibt sich die sequentielle Durchführbarkeit verschiedener Übersetzungstransformationen.

Specker, E.: Kalküle partieller Funktionen.

Der Begriff der (in Zusammenarbeit mit S. Kochen eingeführten) Kalküle wird erläutert am Beispiel der Struktur $B(E^3)$ der linearen Teilräume des dreidimensionalen orthogonalen Raumes E^3. φ sei eine Formel des Aussagenkalküls (AK) in den Verknüpfungen $\vee$, $\neg$ und den Variablen $x_1,\ldots,x_n$. Die Folge $a_1,\ldots,a_n$ von Elementen von $B(E^3)$ ist zulässig für φ, falls bei der Einsetzung der a_i für die x_i für jede Teilformel $\varphi_1 \vee \varphi_2$ von φ der Teilraum $\varphi_1(a_1,\ldots,a_n)$ auf $\varphi_2(a_1,\ldots,a_n)$ senkrecht steht. φ ist eine Identität von $B(E^3)$ falls $\varphi(a_1,\ldots,a_n) = E^3$ für jede zulässige Folge $a_1,\ldots,a_n$. Die Identitäten von $B(E^3)$ bilden eine echte Teilmenge der Identitäten des klassischen AK. In Verbesserung des bisher bekannten wurde von Herrn Schütte gezeigt, daß es eine klassische Identität in 13 Variablen gibt, die keine Identität von $B(E^3)$ ist.

Schmidt, H.A.: Protologische Analyse logischer Junktoren.

Von einer protologischen Fragestellung her stellt sich unter anderem die Aufgabe, aus einem allgemeinen Begriff der

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Deduktion - ohne Bezug auf semantische Begründungen - eine von begrifflicher Willkür freie Charakterisierung logischer Junktoren zu entwickeln. Das im Vortrag vorgeführte allgemeine Schema für naturgemäße Deduktion, das den protologischen Anforderungen gerecht wird, umfaßt nach Voraussstellung eines Schemas für Begriffsnetze neben einigen Grundregeln einige Paare von Schematen für Elementarschlußregeln, deren jedes in einer kombinatorisch charakteristischen Weise auf noch unspezifierte Junktoren Bezug nimmt und die zusammen induktiv einen schematischen Rahmen für den Begriff der "Beweisziele" festlegen. Es läßt sich nun in getrennten Einzelerklärungen <u>definieren</u>, wann ein Junktor innerhalb eines "naturgemäßen Deduktionssystems" ein Konjuktions- bzw. ein Disjunktions-, ein Negations- oder ein Implikationsjunktor zu heißen hat, und es läßt sich anschließend für jede dieser Junktorarten <u>beweisen</u>, daß es innerhalb eines naturgemäßen Deduktionssystems <u>höchstens einen</u> Junktor dieser Art gibt. Die anschließende Systematik der Logik-Kodifikationen (in die sich die üblichen Kodifikationen in bestimmten Stufen einordnen) und die Systematik verschiedener Implikationsbegriffe wurden angedeutet.

<u>Rödding, D.:</u> MINSKY-Maschinen.

Von M.L. Minsky ist eine Variante des Konzepts der TURING-Maschine eingeführt worden, welche hier als MINSKY-Maschine bezeichnet werden soll. Für solche Maschinen M und zahlentheoretischen Funktionen f läßt sich in naheliegender Weise der Begriff "M berechnet f" einführen. Für die Diagramme von MINSKY-Maschinen läßt sich ein einfaches Kriterium K angeben, für welches gilt:

1. Für jede Maschine M, die K erfüllt und f berechnet, gilt: f ist primitiv-rekursiv.
2. Jede primitiv-rekursive Funktion f ist berechenbar durch eine Maschine M, welche K erfüllt.

Mit Hilfe von K läßt sich in naheliegender Weise ein Rang ϱ ($\varrho = 1,2,\ldots$) für MINSKY-Maschinen (die K erfüllen) definieren, der mit der Rekursionszahl prim.-rek. Funktionen eng zusammenhängt. Schon aus drei Maschinen vom Rang 1 und drei Prüfmaschinen läßt sich eine MINSKY-Maschine mit unentscheidbarem Stop-Problem konstruieren.

Fenstad, J.E.: Model theory and topology: A proof of Craig's interpolation theorem.

In the lecture there was presented a proof of Craig's interpolation theorem based upon elementary topological properties of spaces of models and of maps between such spaces. (In addition properties of ultraproducts was used).

Oberschelp, W.: Klassifizierung endlicher Relationen.

Jeder Funktion $\varphi : A^m \longrightarrow B$ wird eine Zahl von Freiheitsgraden zugeordnet: $\mathcal{G}$ sei die Gruppe derjenigen Permutationen π von A, welche φ fest lassen. $\mathcal{G}$ induziert eine Permutationsgruppe Γ von Permutationen Π über A^m . f_m sei die Zahl der Transitivitätsklassen von Γ . Neben ad-hoc Methoden zur Berechnung von f_m interessiert ein Kalkül, welcher mit den Koeffizienten des Einzykelpolynoms der Invarianzgruppe $\mathcal{G}$ arbeitet. Sei bei endlichem $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$$E(\mathcal{G}) = Z(\mathcal{G})({}^{t}1/_{t}\ ;\ {}^{t}2/_{1}\ ;\ \dots {}^{t}n/_{1}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot t^j \ .$$

Hierbei ist $Z(\mathcal{G})$ der Polyasche Zykelindex von $\mathcal{G}$. Dann ist

$$f_m = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=0}^{n} j^m \cdot a_j \ .$$

Zum Beweis verwendet man die bekannte Formel für die Anzahl der Transitivitätsklassen einer Permutationsgruppe, angewendet auf Γ . Dabei hat Π genau ρ^m Einerzykeln, wenn π gerade ρ Einerzykeln hatte. Die Carnap'sche Theorie der "degrees of order" für "Welten" mit k einstelligen Attributen über endlichem A kann mit einem Spezialfall dieser Theorie verglichen werden. Es können nun aber auch beliebige Mengen von Relationen über unendlichem A nach der Zahl ihrer Freiheitsgrade verglichen werden.

Burton, K.: Mathematical Foundations of Thermodynamics.

The question was raised as to wether certain branches of physics could be formulated in a constructive way. In this connection, a fundamental fragment of Robin Giles' book "Mathematical Foundations of Thermodynamics", Pergamon 1964, was expounded, and it was suggested that this theory could

be formulated in a predicative way, using the constructive analysis presented in Paul Lorenzen's book: "Differential und Integral", Akademische Verlagsgesellschaft 1965. The Giles theory has 3 primitive notions, namely <u>state</u>, <u>union</u> of states, and the relation a <u>goes to</u> b, where a and b are states. Each of these notions is furnished with a rule of interpretation which gives it an interpretation in terms of "direct" experience. An experience is direct with extent that it can be pointed out, rather than explained (in terms of more direct experiences). All other notions are defined in terms of these, and receive their interpretation accordingly. The axioms involve only the primitive notions and logical ones. If they are tune, so are the theorems: in any case the theorems are interpretable in terms of direct experience. the main theorem runs as follows:

"There exists a positive real additive function of state, S, called entropy, and a set of positive real additive functions of state, Q, called components of content, such that given two states a and b then $a \rightarrow b$ (a <u>goes to</u> b) iff $S(a) \leq S(b)$ and $Q(a) = Q(b)$ for all components of content Q."

An indication was given of how notions like temperature are defined.

<u>Felscher, W.:</u> Kongruenzrelationen auf Algebren und klassische Aussagenlogik.

Sei A eine Algebra, frei erzeugt von einer Teilmenge für die Klasse aller Booleschen Algebren (BAs), B eine BA mit mehr als einem Element. Sei G die Menge aller Booleschen Gleichungen, C eine beliebige Menge von Gleichungen in $A \times A$, sei R_C der Durchschnitt aller Kerne R_f von Homomorphismen $f \in H(A,B)$, welche die Gleichungen aus C identifizieren (d.h. $C \subseteq R_f$; weiter $\langle t,u \rangle \in R_f$ genau dann, wenn $f(t) = f(u)$). Aus dem Primidealtheorem folgt, daß R_C gleich ist $R[C \cup G]$, der kleinsten, $C \cup G$ enthaltenden Booleschen Kongruenzrelation auf A; für $C = \emptyset$ ist dies auch ohne Primidealtheorem zu beweisen. Sei $e \in A$ fest; wenn $N \subseteq A$, so definiere man $a \in Cn(N)$ genau dann, wenn für alle $f \in H(A,B)$ aus $f(N) = 1$ folgt $f(a) = 1$, 1 die Eins von B.

Mit $C = \{\langle n, e \vee - e\rangle \mid n \in N\}$, $g = \langle a, e \vee - e\rangle$ ist $a \in Cn(N)$ äquivalent zu $g \in R_C = R[C \smile G]$. Der Operator Cn ist daher unabhängig von B, und da sich $R[C \smile G]$ durch finitäre algebraische Operationen aus $C \smile G$ gewinnen läßt, gilt für Cn der Kompaktheitssatz. Es wird weiter angedeutet, wie sich in diesem Zusammenhang Axiomatisierungen der BAs in Axiomatisierungen des Operators Cn übersetzen lassen.

Lorenz, K.: Dialog und semantischer Halbformalismus.

Legt man das strenge Dialogspiel zugrunde mit der Rahmenregel D1 - D6 (D1: Dialoge um Aussagen bestehen aus abwechselnd vom Opponenten O und Proponenten P vorgebrachten Argumenten, die bestimmten zur Dialogführung gehörigen Regeln folgen, und enden mit Gewinn und Verlust für je einen der beiden Spieler; D2: Die Argumente, das uneigentliche Anfangsargument ausgenommen, greifen vorhergehende des Gegners an oder verteidigen eigene auf solche Angriffe; D3: Angriffe dürfen jederzeit im Dialog wahrgenommen werden; D4: Verteidigungen müssen in der umgekehrten Reihenfolge der zugehörigen Angriffe spätestens dann ausgelöst werden, wenn kein Angriffsrecht mehr zur Verfügung steht; D5: Wer kein Argument mehr vorbringen kann, hat verloren, der andere gewonnen; $D6_{1,1}$: Argumente dürfen im Verlauf eines Dialoges höchstens einmal angegriffen werden) - , so lassen sich die Gewinnstellungen als Figuren eines fast intuitionistischen Halbformalismus (Verschmelzung für die Vorderformeln der Sequenzen fehlt) herleiten. Läßt man hingegen nur aus $\wedge, \vee, \neg, \bigwedge, \bigvee$ zusammengesetzte Aussagen zu (streicht also $\rightarrow$), so ergeben sich die Gewinnstellungen als herleitbare Figuren des semantischen Halbformalismus (klass. Wahrheitswertzuordnung). Statt jetzt wie üblich zur Definition der Allgemeingültigkeit beliebige Belegungen der Primformeln zu betrachten, genügt es, die Subjunktion $A \rightarrow B$ einzuführen; es gibt dann formale Gewinnstrategien, eben für die im intuitionistischen Logikalkül ohne Verschmelzung der Vorderformeln ableitbaren Aussagen, die sich zur Definition der Allgemeingültigkeit anbieten.

<u>Müller, G.H.:</u> Hauptzüge zur Cohenschen Beweismethode.

<u>Solovay, R.:</u> Independence results in set theory oblained by Cohen's method.

Siehe Tagungsbericht der Tagung über Cohens Unabhängigkeitsbeweise in der Mengenlehre.

A. Oberschelp (Hannover)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft