Vortragsbuch

Nr. 28

14.7.74 – 23.11.74

EIN GESCHÄFTSBUCH
EIN GESCHÄFTSBUCH
EIN GESCHÄFTSBUCH
EIN GESCHÄFTSBUCH
EIN GESCHÄFTSBUCH

EIN BRUNNEN GESCHÄFTSBUCH

Zahlentheorie

Diophantische Approximationen

14.7. – 20.7.74

1. Transcendental numbers and functions of several variables.

Let G be a group variety, defined over the field $\overline{\mathbb{Q}}$ of algebraic numbers; let $\varphi: \mathbb{C}^n \to G_{\mathbb{C}}$ be a n parameter subgroup of algebraic dimension. We bound the rank ℓ (over $\mathbb{Z}$) of the subgroups Γ of $\mathbb{C}^n$, for which $\varphi(\Gamma)$ is contained in the group $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ of algebraic points of G. For example, if $n=1$, or if Γ is "well distributed" in $\mathbb{C}^n$, we obtain $\ell d \leq n(\ell+d)$ for linear varieties, and $\ell d \leq n(\ell+2d)$ for abelian varieties. Moreover, in the abelian case, if $\Gamma \subset \overline{\mathbb{Q}}^n$ and $\ell \geq 2n+1$, then $d=n$, and $\varphi(\Gamma)$ is an abelian subvariety of G of dimension n. (Ref.: M. Waldschmidt; Annales de l'Institut Fourier, à paraître).

2. Transcendental numbers and algebraic differential equations (Following Daniel BERTRAND).

Let $f_1, \dots, f_d$ be analytic functions in a disk D of $\mathbb{C}_p$, s.t. two of them are algebraically independent over $\mathbb{Q}$; let K be a number field, and assume that the derivation $\frac{d}{dz}$ maps the ring $K[f_1, \dots, f_d]$ into itself. Let (z_n) be a sequence of distinct points of a disk $D' \subsetneq D$, such that $f_i(z_n) \in K$ for all i, n. Then one has $\limsup \frac{1}{n} \max_{\substack{1\leq m\leq n \\ 1\leq i\leq d}} \operatorname{size}(f_i(z_m)) = +\infty$.

3. Solution of four problems of Mahler on the order function of a transcendental number (following Alain DURAND).

In 1971, Mahler (Acta. Arithm., 23 (1973) 301–305) gave a new classification of complex numbers, and stated five questions. The problems 1, 3, 4, 5 are resolved by A. Durand (Bull. S.M.F., to appear); for $\tau \geq 3$, let $\Theta_\tau = \sum_{n \geq 1} 2^{-b_{n,\tau}}$, where $b_{n,\tau} = [2^{\tau n}]$; for $\tau \neq \tau'$, Θ_τ and $\Theta_{\tau'}$ are not in the same class (Problem 1). If $\tau < \tau'$, and $\eta_{\tau'} = \sum_{n \geq 1} 2^{-c_{n,\tau}}$, where $c_{n,\tau} = [4^{\tau' n}]$, then we have neither $\Theta_\tau \ll \eta_{\tau'}$ nor $\eta_{\tau'} \ll \Theta_\tau$ (Problem 3). There exists a class containing almost all numbers (Problem 5), and each Θ of that class satisfies $\Theta \ll \eta$ for all transcendental number η.

Michel Waldschmidt (Paris).

Approximations to powers of rationals

Mahler proved in 1957 that for any rational a/q, where a, q are relatively prime integers with $a > q \geq 2$, and any $\varepsilon > 0$, there exist only finitely many positive integers n such that $\|(a/q)^n\| < e^{-\varepsilon n}$. In some joint work of Coates and myself, an effective version of Mahler's theorem has been established for values of ε sufficiently near $\log q$. We prove in fact that for any a, q as above there exist effectively computable numbers N and η with $0 < \eta < 1$ such that $\|(a/q)^n\| > q^{-\eta n}$ for all $n \geq N$. It will be observed that if in the case $a = 3$, $q = 2$ the value of η were such that $2^{-\eta} > 3/4$ then this would settle an outstanding question in connexion with Waring's problem. The proof of our theorem depends on the following p-adic analogue of a recent result on linear forms in the logarithms of algebraic numbers [Acta Arith. 24 (1973), 33-36]. For any prime p and any non-zero integer a not divisible by p there is an effectively computable number c, depending only on a, such that, for any δ with $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$, the inequalities $0 < |a^n - b|_p < \delta^{cp \log(2|b|)} e^{-\delta n}$ have no solution in integers b and $n > 0$.

A. Baker (Cambridge)

Approximation to power series of functions satisfying algebraic differential equations

Kolchin in 1959 raised the question of whether a "Roth type" of result could be shown for the approximation of solutions of algebraic differential equations by rational functions. More specifically if $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n z^{-n+m}$, m an integer, the a_n in a field of characteristic zero, is a formal power series solution of $p(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}, z) = 0$, $p(\ldots)$ a nonzero polynomial in $m+2$ variables, can one prove that $\operatorname{ord}_{z=\infty}\left(y_1 - \frac{u(z)}{v(z)}\right) <$

$(2+\varepsilon)\deg(u(z)) + K(y_1,\varepsilon)$ for all polynomials $u(z)$, $v(z) \neq 0$ with coefficients in K — provided of course that y_1 is not the power series expansion of a rational function. [Here $\operatorname{ord}_{z=\infty}(f-g)$ for formal power series f, g meromorphic at $z=\infty$ is defined to be the order of vanishing of $f-g$ at $z=\infty$.] We obtain a weaker result than that desired by Kolchin. Instead of $2+\varepsilon$ we have the number 8, which can be further reduced to $4+\varepsilon$. The method is almost surely "effective" if the coefficients of $p(\cdots)$ are specific polynomials with integral coefficients. Presumably this should allow one to effectively obtain a bound of $4+\varepsilon$ for all irrational algebraic functions over, say, the rational numbers with z adjoined.

Charles Osgood (Washington D.C.)

Algebraic independence of Weierstrass functions and some related numbers.

Utilizing and generalizing some techniques of J. Ax for the algebraic independence of certain functions, K. K. Kubota and I have recently established necessary and sufficient conditions for the algebraic independence of functions of the form z, $\wp_j(\beta_{jk}z)$, $\zeta_j(\beta_{jk}z)$, $e^{\alpha_i z}$, $1\le i\le m, 1\le j\le n, 1\le k\le m_j$. Those conditions are, assuming for the sake of normalization, that for $j\ne l$, $1\le j,l\le n$, there are no integers a,b,c,d such that $\frac{\omega_{1j}}{\omega_{2j}} = \frac{a\omega_{1l}+b\omega_{2l}}{c\omega_{1l}+d\omega_{2l}}$, that

a) $\{\beta_{j1},\dots,\beta_{jm_j}\}$ is linearly independent $/ K_{\wp_j}$, where

$$K_{\wp_j} = \begin{cases} \mathbb{Q}\left(\frac{\omega_{1j}}{\omega_{2j}}\right) & \text{if } \frac{\omega_{1j}}{\omega_{2j}} \text{ is imaginary quadratic} \\ \mathbb{Q} & \text{if not} \end{cases},$$

b) $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ is $\mathbb{Q}$-linearly independent.

Transcendence results for numbers follow. For example, if $\wp(z)$ has complex multiplication, β a cubic irrationality ~~and~~, $\alpha\in\mathbb{C}^*$ such that $\wp(\alpha)$ is algebraic or infinite and g_2, g_3 algebraic then at least one of the two numbers $\wp(\alpha\beta)$ or $\wp(\alpha^2\beta)$ is algebraic over $\mathbb{Q}(\pi)$.

Dale Brownawell (University Park, Pa. / Boulder, Co.)

Diophantine Approximation with primes

Starting with A. Selberg's Theorem (with improvements by H.L. Montgomery and M.N. Huxley) that $\frac{1}{x}\int_x^{2x}(\vartheta(x+h)-\vartheta(x)-h)^2\,dx \ll h^2 e^{-(\log x)^{\frac{1}{10}}}$ valid in $x^{\frac{1}{2}}\ge h\ge x^{\frac{1}{6}+\varepsilon}$ one can easily derive for instance that the inequality $\left|\sqrt{2}-\frac{p_1}{p_2}\right| < p_2^{-1+\frac{1}{6}+\varepsilon}$ has an infinity of solutions in primes p_1, p_2. In view of the remarkable progress (due to R.C. Vaughan and H.L. Montgomery) on the binary Goldbach problem it may appear one day that one will be able to prove $\left|\sqrt{2}-\frac{p_1}{p_2}\right| < p_2^{-1+\varepsilon}$ has an infinity of solutions. Certainly $\left|\sqrt{2}-\frac{p_1}{p_2}\right| < \varepsilon p_2^{-1}$ seems hopeless. One can consider the case where p_1 is replaced by numbers with a large prime factor. Even in this case the situation is unsatisfactory still.

Next we mention the work of ~~A. Baker~~ W. Schwarz, A. Baker and myself in stages of the theorem $\left|\sqrt{2}p_1-\sqrt{3}p_2+\sqrt{5}p_3\right| < e^{-\sqrt{\log(p_1+p_2+p_3)}}$ has infinity of solutions. Here my method bears some resemblance to the proof of Vaughan's published work where he replaces the right hand side by $(p_1+p_2+p_3)^{-\frac{1}{10}}(\log(p_1+p_2+p_3))^{21}$. Of course

$\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{5}$ and such things can be replaced by $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ satisfying obvious conditions and they are nonzero reals, not all of the same sign and such that λ_1/λ_2 is irrational.

K. Ramachandra
(K. RAMACHANDRA, TIFR, Colaba, Bombay-5, India)

Konvexe Körper und Gitterpunkte.

K sei ein konvexer Körper des d-dimensionalen euklidischen Raumes E^d, $\dot{K}$ sein Rand und $G(K) = \mathrm{card}(K \cap \mathbb{Z}^d)$, $G(\dot{K}) = \mathrm{card}(\dot{K} \cap \mathbb{Z}^d)$ die Gitterpunktanzahlen von K und $\dot{K}$.
Vermutungen von Hadwiger und Wills für obere Schranken:

$$G(K) \overset{?}{\leq} \sum_{\nu=0}^{d} \binom{d}{\nu} \frac{W_\nu(K)}{\omega_\nu} \Big(= \int_{E^d} e^{-\pi r^2} dx \Big) = W(K) \quad (1971)$$

$$G(\dot{K}) \overset{?}{\leq} 2 \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \text{ odd}}}^{d} \binom{d}{\nu} \frac{W_\nu(K)}{\omega_\nu} = \dot{W}(K) \quad (1972)$$

W_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, d$ Minkowskis Quermaßintegrale, ω_ν Volumen der ν-dim. Einheitskugel, $r = r(x, K)$ Abstand von x und K.
Teilergebnisse von Bokowski, Hadwiger, McMullen, Betke, Ovahagen u. W. wurden gebracht. Während sonstige Schranken für G bei speziellen K nützlich für zahlentheoretische Anwendungen sind, zeigen diese einige allgemeine Zusammenhänge; z.B. gibt es nach McMullen zwischen dem Volumen V und W eine Möbiusche Umkehrformel; nach Hadwiger sind die Integrale $\int_{E^d} r^\nu e^{-\pi r^2} dx$, $\nu = 0, 1, .., d$ äquivalent zu Minkowskis Quermaßintegralen.

Jörg Wills (GH Siegen)

Transcendence Measures.

M. Waldschmidt and I have obtained the following general result: If $f_1, \ldots, f_d$ are entire functions over $\mathbb{C}$, of finite orders $\rho_1, \ldots, \rho_d$, ~~and~~ if there exists a sequence of subsets $(S_N)_{N \geq 1}$ of $\mathbb{C}$, $\# S_N \sim N^l$, ~~and~~ $l > \frac{\rho_1 + \cdots + \rho_d}{d-1}$ and $|z| \ll N$ if $z \in S_N$, such that, (*) for all $z \in S_N$, there exist $\beta_{iN}(z) \in k$ (a fixed number field) s.t. $|f_i(z) - \beta_{iN}(z)| \leq \exp(-(q_N + 2N^l \log N))$, where

$q_N = \min\left(0, \log\left(\min_{z\in S_N} \prod_{\substack{z'\in S_N\\ z'\neq z}} |z-z'|\right)\right)$ and $s(\beta_{iN}) \ll N^{\rho_i}$, then the functions

$f_1, \dots, f_d$ are alg. dependent. (This will appear in Indag. Math.) For general functions, this result is false if we suppose only that (*) is true for an infinity of values of N. But it is true if it is possible to show that a function $F = P(f_1, \dots, f_d) \neq 0$, $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d]$, cannot be very small on the unit circle. Such a result is well-know if $f_1, \dots, f_d$ are exponential functions and $f_i(z) = e^{az}$ or $f_1(z) = z$. And, we obtain lower bounds for the following quantities $\left|\sum_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le l}} e^{x_i y_j} - \alpha_{ij}\right|$, if $dl \geq 6$, $\sum_{1\le j\le l} |y_j - \beta_j| + \sum_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le l}} |e^{x_i y_j} - \alpha_{ij}|$

where $\alpha_{ij} \in \overline{\mathbb{Q}}$, $x_1, \dots, x_d$ (resp. $y_1, \dots, y_l$) are $\mathbb{Q}$ linearly independent and very certain conditions ($|\sum k_i x_i|$ and $|\sum \lambda_j y_j|$ not too small when $k \in \mathbb{Z}^d - \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{Z}^l - \{0\}$).

M. Mignotte (Saint Denis – France)

Gute Gitterpunkte modulo zusammengesetzte Zahlen

Wenn $\underline{x} = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ ($s \geq 2$, sonst beliebig) ist, setzen wir $R(\underline{x}) = \max(1, |x_1|) \dots \max(1, |x_s|)$. Für einen beliebigen Gitterpunkt $\underline{g} = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ modulo eine beliebige ganze Zahl m bezeichnen wir mit $\rho(\underline{g})$ das Minimum von $R(\underline{h})$ für alle Gitterpunkte $\underline{h} = \langle h_1, \dots, h_s \rangle \neq \langle 0, \dots, 0 \rangle$, welche die Bedingung $g_1 h_1 + \dots + g_s h_s \equiv 0 \pmod{m}$ erfüllen. Ein s-dimensionaler Gitterpunkt g modulo m heisst gut wenn $\rho(g) > \rho_0$, wo ρ_0 durch $\rho_0 (2\log \rho_0)^{s-1} = (s-1)!\, m$ bestimmt ist. Bekanntlich haben solche Gitterpunkte wichtige Anwendungen auf die numerische Berechnung mehrfacher Integrale. Es wird bewiesen, dass in jeder Dimensionszahl $s \geq 2$ für jede in Bezug auf s hinreichend grosse m gute Gitterpunkte g modulo m mit $g_1 = 1$ existieren. Die Bedingung, dass m eine Primzahl sei ist also beseitigt.

S. K. Zaremba

(De Kalb, Illinois, U.S.A.)

Uniform Distribution of Sequences in the Ring of Gaussian Integers.

Analogous to the definition of u.d. sequences in $\mathbb{Z}$ we consider sequences of Gaussian integers and ask the question how they are distributed modulo an arbitrary nontrivial ideal in $\mathbb{Z}[i]$. Let $N(\gamma) = a^2+b^2$ denote the norm of the element $\gamma = a+bi \in \mathbb{Z}[i]$. The nontrivial ideals in $\mathbb{Z}[i]$ are exactly the principal ideals (μ) generated by $\mu \in \mathbb{Z}[i]$ with $N(\mu) \geq 2$.

Definition. Let $\alpha(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ be a sequence of Gaussian integers. Let $\beta, \mu \in \mathbb{Z}[i]$ with $N(\mu) \geq 2$. For a positive integer N, let $A(\beta, \mu, N)$ denote the number of n, $1 \leq n \leq N$, such that $\alpha(n) \equiv \beta \pmod{\mu}$. The sequence $\alpha(n)$ is called u.d. mod μ if

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(\beta,\mu,N)}{N} = \frac{1}{N(\mu)}$$

for all $\beta \in \mathbb{Z}[i]$. (The choice of β may be restricted to all elements of a complete residue system mod μ). The sequence $\alpha(n)$ is said to be u.d. in $\mathbb{Z}[i]$ if it is u.d. mod μ for all $\mu \in \mathbb{Z}[i]$ with $N(\mu) \geq 2$.

The Weyl criterion: The sequence $(x_n + y_n i)$, $n = 1, 2, \ldots$ is u.d. in $\mathbb{Z}[i]$ if and only if

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp(px_n + qy_n) = 0 \qquad \exp t = e^{2\pi i t}$$

for all rationals p and q, not both integers.

Example: The sequence $([nc_1] + [nc_2]i)$, $n = 1, 2, \ldots$, where c_1 and c_2 are real numbers such that $1, c_1, c_2$ are linearly independent over the rationals, is u.d. in $\mathbb{Z}[i]$.

Remark: the above report informs on work done by L. Kuipers, H. Niederreiter and J.S. Shiue.

L. Kuipers

Southern Illinois University

Carbondale, Illinois, U.S.A.

Linear forms in the logarithms of algebraic numbers

Using the methods of A. O. Gelfond and A. Baker, the following result can be obtained. If $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ are rational numbers satisfying i) $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ are multiplicatively independent ii) the sizes of $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$, resp., donot exceed S_1, S_1 and $(\log S_1')^{100}$, then

$$|\beta_1 \log\alpha_1 - \log\alpha_2| > C \exp(-(\log S_1')^{2+\varepsilon})$$

where C is an effectively computable positive constant depending only on ε. This result was proved by Stark and myself independently. Stark's proof for the above inequality depends heavily on algebraic techniques. My proof for the above inequality does not make use of these algebraic techniques. My method does not appear to admit a generalisation for linear forms in an arbitrary number of logarithms. Stark's method goes through for linear forms in an arbitrary number of logarithms. Infact, Stark proved

$$|\beta_1 \log\alpha_1 + \dots + \beta_{n-1}\log\alpha_{n-1} - \log\alpha_n| > C\exp(-(\log S_1')^{n+\varepsilon}).$$

where C is an effectively computable constant depending only on n and ε. Here $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ satisfy assumptions similar to those mentioned earlier.

~~B~~ Linear forms of the type $\beta_1\log\alpha_1 + \dots + \beta_n \log\alpha_n$ with α_i very close to 1 are considered. By using the methods of A. Baker and H. M. Stark, certain positive lower bounds for these forms were proved. The bounds for the absolute value of linear forms of this type have applications ~~is~~ in a problem of Erdös on an upper bound of the difference between consecutive members of the sequence of all positive integers with a large prime factor.

T. N. Shorey

(T. I. F. R., Bombay-5, India)

On Catalan's equation.

In 1842 Catalan conjectured that the only solution in integers of the equation $x^p - y^q = 1$, $x>1, y>1, p>1, q>1$ is given by $p=2, q=3, x=3, y=2$. This question is still open, although it follows from work of several authors that there are only finitely many solutions if two of the four variables are fixed. By a multiple application of a generalisation of a theorem of A. Baker (Acta Arith. 21 (1972)) we can prove that there are only finitely many solutions of the original equation itself. Moreover, there are effective bounds for p, q, x and y.

R. Tijdeman.
(Leiden.)

On the simultaneous approximation of α and e^α.

Using in general Gel'fonds method, a proof of the following was given. Let $\alpha \neq 0$ be ~~any~~ complex number. Let ξ_1, ξ_2 are any algebraic numbers of heights $H_1 \geq 3$, $H_2 \geq 3$ and degrees N_1, N_2 resp. Then there is a number $C = C(|\alpha|, N_1, N_2) > 0$ such that

$$\max\{|\alpha - \xi_1|, |e^\alpha - \xi_2|\} > \exp\{-C \log H_1 \log H_2\}$$

holds for all ξ_1, ξ_2 as above.

A main tool in the proof is a new lemma, essentially proved by Tijdeman (but, as he likes to say, the result of joint work) which connects $\max\limits_{k,m} |C_{km}|$ to $\max\limits_{t,p} \left|\frac{F^{(t)}}{t!}(p)\right|$ if F is the exponential polynomial $F(z) = \sum\limits_k \sum\limits_m \frac{C_{km}}{m!}(z+1)\cdots(z+m)\, e^{\omega_k z}$, provided that the number of pairs (t,p) used here is large enough. The theorem, although of interest in itself, can be considered as an illustration of the usefullness of the mentioned lemma.

P. L. Cijsouw
Technological University
Eindhoven, Netherlands

Transcendence and Abelian functions

We generalize work on transcendental numbers associated with a Weierstrass elliptic function with algebraic invariants. We ~~consider~~ introduce a system of abelian functions $\underline{A}(\underline{z})$ meromorphic on $\mathbb{C}^n$, and we define a suitable ~~a~~ normalization by considering the differential equations that these functions satisfy. Provided also that $\underline{A}(\underline{0}) \in \mathbb{A}^n$ (where $\mathbb{A}$ is the field of algebraic numbers), it makes sense to define the algebraic points $\underline{u}$ of this system; technicalities apart, these are the points $\underline{u}$ such that $\underline{A}(\underline{u}) \in \mathbb{A}^n$. We have to postulate the existence of many complex multiplications in the sense of Shimura. On this assumption we have for each $\varepsilon > 0$ the inequality

$$|D_1 \underline{u}_1 + \dots + D_m \underline{u}_m| > C e^{-H^{\varepsilon}}$$

for algebraic points $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m$ and endomorphisms $D_1, \dots, D_m$ of heights at most H. Here $C = C(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m, \underline{A}, \varepsilon)$ is a positive constant which can be effectively computed, and it is supposed that the left-hand side does not vanish.

A generalization (but for simplicity omitting the measure) shows that $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m$ and $\underline{v} = (1, \dots, 1)$ are linearly independent over the set of matrices with algebraic entries that commute with every endomorphism, provided only that $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m$ are linearly independent over the endomorphism ring.

The proofs involve combinations of Baker's and Bombieri's methods of extrapolation, together with determinant arguments that resemble the latter stages of Roth's Theorem.

D. W. Masser (Nottingham)

Volumsapproximation beim Jacobialgorithmus

Es seien $\left(\frac{A_1^{(g+j)}}{A_0^{(g+j)}}, \ldots, \frac{A_n^{(g+j)}}{A_0^{(g+j)}}\right)$, $1 \leq j \leq n$,

aufeinanderfolgende Näherungspunkte von $x = (x_1, .., x_n)$ im Jacobischen Algorithmus. Diese $n+1$ Punkte spannen ein konvexes Polyeder mit Volumen $V(x, g)$ auf. Es sei

$$F(x,g) = \frac{1}{n!\, V(x,g) \left(A_0^{(g+1)}\right)^2 A_0^{(g+2)} \cdots A_0^{(g+n)}}$$

Dann wird unter anderen Resultaten folgender Satz bewiesen:

Es sei $\xi > 1$ Nullstelle von $\xi^{n+1} - \xi^n - 1 = 0$ und $\beta = f'(\xi)$. Dann ist für jedes x $^{*)}$ für $2n+1$ aufeinanderfolgende Werte von g mindestens einmal $F(x,g) > \beta$.

Ist $x = (\xi^{-1}, .., \xi^{-n})$, so ist $\lim_{g\to\infty} F(x,g) = \beta$.

($^{*)}$ sofern der Algorithmus nicht abbricht)

F. Schweiger (Salzburg)

A conjecture of Erdös and Gaal on uniform distribution of lacunary sequences.

Let $\langle n_k \rangle$ be a lacunary sequence of integers, i.e a sequence of integers satisfying $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$. Let $D_N(x)$ be the discrepancy of the sequence $\langle n_k x \rangle \bmod 1$, x real.

Theorem 1: For almost all x

$$\frac{1}{4} \le \limsup_{N\to\infty} \frac{N D_N(x)}{\sqrt{N \log\log N}} \le C$$

with

$$C \le 166 + 664\left(q^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{-1}.$$

The right inequality was often referred to as the Erdös-Gaal conjecture; the left inequality, with $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ instead of $\frac{1}{4}$, is wellknown since the publication of the paper by Erdös and Gaal [Proc. Amsterdam 58 (1955)]. The constant $\frac{1}{4}$ is due to H. Niederreiter.

Because of an inequality of Koksma theorem 1 is essentially equivalent to the following theorem.

Theorem 2: Let $\mathcal{F}$ be the class of real functions on $[0,1)$ of variation not exceeding V, having period 1 and meanvalue $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Then for any lacunary sequence (n_k) of integers

$$\frac{1}{4} V \le \limsup_{N\to\infty} \frac{\sup_{f\in\mathcal{F}} \left|\sum_{k\le N} f(n_k x)\right|}{\sqrt{N \log\log N}} \le VC \quad \text{a.e.}$$

where the bound for C is given in theorem 1.

Walter Philipp (Urbana)

A distribution property of a linear recurrence of the second order.

Let A, B, a, b be integers, a and b are not both 0. Let $x^2 - Ax + B = 0$ have two distinct nonzero roots (i.e. $B \ne 0$, $D = A^2 - 4B \ne 0$). Define $\{G_n\}$ by

$$G_0 = a, \quad G_1 = b, \quad G_{n+1} = AG_n - BG_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Let $\{R_n\}$ be the special sequence of $\{G_n\}$ with $a = 0$, $b = 1$. Let P_k and Q_k denote the exact period length of $\{R_n\}$ and $\{G_n\}$ mod p^k.

we show the following theorem.

Theorem Let p be a prime with $p | D$, $p \nmid 2B$, $p \nmid (bA - 2aB)$. Let d be the exact order of B mod. p. If $P_k = 2dp^k$ ($\forall k = 1, 2, \cdots$), then $\{q_n\}$ is u.d. mod p^k $\forall k = 1, 2, \cdots$.

This generalizes the theorem of Niederreiter [Fibonacci. Q. 10, no. 4, 373–374 (1972)] and the theorem of Kuipers and Shiue [Rend. Accad. Naz. Lincei 52, 6–10 (1972)].

This work is jointed with P. Bundschuh

Jau-shyong Shiue
National Chengchi Univ.
Taipei, TAIWAN.

On Simultaneous Diophantine Inequalities.

Let $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ be a system of real numbers. Let us denote by γ the approximation index of the system $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, i.e. the supremum of all real ω for which the system of inequalities $\left|\theta_j - \frac{p_j}{q}\right| < \frac{1}{q^\omega}$, $j = 1, 2, \dots, n$ has infinitely many integral solutions $\{p_1, \dots, p_n, q\}$.

Let us denote by $\|\xi\|$ the distance of ξ from the nearest integer. It is easily shown that the number of solutions of the system of inequalities $1 \le q \le M$, $\|q\theta_j\| < L$, $j = 1, 2, \dots, n$ is at most $c(\varepsilon) L^{\frac{1}{\gamma - 1} - \varepsilon} M$ for each $\varepsilon > 0$.

For most of the applications, this estimate is sharp enough but it is not best possible. An estimate which is nearly best possible was proved for $n = 1$ by Behnke in 1924. In general, such an estimate is given by

$$c(\varepsilon)\Big\{ L^{\frac{1}{\gamma_{12\ldots n}}-\varepsilon} M^{1-\frac{1}{\gamma_{12\ldots n}}+\varepsilon} + \sum_{1\le i_1<\ldots<i_{n-1}\le n} L^{1+\frac{1}{\gamma_{i_1\ldots i_{n-1}}}-\varepsilon} M^{1-\frac{1}{\gamma_{i_1\ldots i_{n-1}}}+\varepsilon} + \ldots + \sum_{1\le i\le n} L^{n-1+\frac{1}{\gamma_i}-\varepsilon} M^{1-\frac{1}{\gamma_i}+\varepsilon} + L^n M \Big\}$$

for every $\varepsilon>0$, where $\gamma_{i_1\ldots i_k}$ denotes the approximation index of the system $\{\theta_{i_1},\ldots,\theta_{i_k}\}$.

As an application, let $\theta_1,\ldots,\theta_n$ be fixed real numbers. Then for almost all real m-tupels $\{\theta_{n+1},\ldots,\theta_{n+m}\}$ holds

$$\gamma_{12\ldots m+n} = \max\left\{ \frac{m+n+1}{m+n}, \max_{1\le i\le n} \frac{(m+n)\gamma_i}{(m+n-1)\gamma_i+1}, \max_{1\le i_1<i_2\le n} \frac{(m+n-1)\gamma_{i_1 i_2}}{(m+n-2)\gamma_{i_1 i_2}+1}, \ldots, \frac{(m+1)\gamma_{12\ldots n}}{m\gamma_{12\ldots n}+1} \right\}.$$

Bohuslav Diviš

(Frankfurt am M.)

Additive basis (Work of Erdős - Sárközy and Deshouillers to appear in AA)

To answer a question of Dress, the following result is shown:

Thm There exists two sequences $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ such that:

- Neither $\mathcal{B}^2$ nor $\mathcal{C}$ is a basis
- $\mathcal{B}$ is a basis of order at most 3
- $\mathcal{C}^2$ is a basis of order at most 6

[If $\mathcal{A}$ is a sequence of integers, $\mathcal{A}^2 = \{a^2 / a \in \mathcal{A}\}$, and we say that $\mathcal{A}$ is a basis of order h if every ~~...~~ integer is the sum of at most h elements of $\mathcal{A}$.]

The thm depends on the following criteria

Criter. 1 Let $\mathcal{A}$ a sequence of integer s.t. for every $\varepsilon>0$ there exist ∞ many of rationals $\frac{p}{q}$ with $(p,q)=1$ ~~...~~ $0<p<q$ ~~...~~ s.t. $\forall a\in\mathcal{A}$ $\quad a\frac{p}{q} - [a\frac{p}{q}] < \varepsilon$

Then $\mathcal{A}$ is not a basis

Criter. 2 Suppose there exists an irrational α s.t. $\lim_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\to\infty}} (\alpha a - [\alpha a]) = 0$.

Then $\mathcal{A}$ is not a basis.

Some conjectures:

Conj 1 Replace 3 by 2 and 6 by 4 in thm (this would be best possible).

Conj 2 If $\mathcal{B}$ is a basis, $\mathcal{B}^2$ is an essential component (cf. Halberstam and Roth Sequences, vol 1, Oxford at the Clarendon Press).

Conj 3 $\forall \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^+$, $\exists \mathcal{A}$ s.t.
$\mathcal{A}^n$ is a basis iff $n \in \mathcal{L}$ (True if $\complement\mathcal{L}$ is finite).

Jean-Marc DESHOUILLERS
U.E.R. de Mathématiques - Université Bordeaux I
33405 TALENCE - France.

On the distribution modulo M of polynomial sequences
(WORK OF DESHOUILLERS & DRESS)

Let P be a polynomial with real coefficients and M a fixed integer > 1. Denote by I_M the set of polynomials which map $\mathbb{Z}$ into $M\mathbb{Z}$. We are looking for all polynomials Q s.t., for each integer n, $[P(n)] \equiv [Q(n)] \pmod{M}$. There are two kinds of results:

1/ if P is irrational (i.e. all its coefficients $\in \mathbb{Q}$), then
$P - Q \in I_M$ $(M > 2)$
$P - Q$ or $P + Q - 1 \in I_M$ $(M = 2$

2/ if P is rational (i.e. $\exists$ coefficient $\notin \mathbb{Q}$), then $D(x) = P(x) - Q(x) - P(0) + Q(0)$ takes only finitely many classes of values modulo the set I_M. We have an explicit bound for denominators of coefficients of the rational polynomial D, so that the finitely many classes are effectively computable. Further, if $M \geq M_0$ (effective also), there is only the trivial class $(D \in I_M)$.

Methods: elementary for the 1st result, trigonometric sums (Weyl, Hua) for the 2d.

Finally, a particular case is numerically treated, where the two methods are complementary: the determination of the finite sets of

rational numbers $\mathcal{E}(k,M) = \{\alpha \mid \forall n\ [\alpha n^k] \equiv 0 \pmod{M}\}$.
For example $\mathcal{E}(6,3) = \{0, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{2}{3}, \frac{17}{24}, \frac{3}{4}, \frac{16}{21}, \frac{45}{56}, \frac{6}{7}\}$.

François DRESS
Université Bordeaux I - UER Math & Informatique
33405 TALENCE - France

Die p-adische Verallgemeinerung des Satzes von Thue-Siegel-Roth-Schmidt

W. M. Schmidt bewies 1970 den
Satz 1: Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ reelle algebraische Zahlen. $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ seien lin. unabhängig über $\mathbb{Q}$. Dann gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ $q > 0$, so daß die Ungleichung $\|q\alpha_1\| \cdots \|q\alpha_n\|\, q^{1+\varepsilon} < 1$ erfüllt ist
durch den der Satz von Roth auf simultane Approximation verallgemeinert wird.
Unter Einbeziehung p-adischer Bewertungen erhält man die folgenden Ergebnisse, durch die der Satz von Ridout (1958) verallgemeinert wird:
Satz 2: Seien $f_1(X), \dots, f_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$. $p_1, \dots, p_t$ seien t verschiedene Primzahlen. Für $1 \le i \le n$ habe das Polynom $f_i(X)$ in $\mathbb{R}$ die Wurzel α_{i0} und in $\mathbb{Q}_{p_\tau}$ die Wurzel $\alpha_{i\tau}$ $(1 \le \tau \le t)$.
Die Zahlen $1, \alpha_{1\tau}, \dots, \alpha_{n\tau}$ seien über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig.
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann hat die Ungleichung
$$\prod_{i=1}^{n} \Big\{ |r\alpha_{i0} - s_i| \cdot \prod_{\tau=1}^{t} |r\alpha_{i\tau} - s_i|_{p_\tau} \Big\}\, |r, s_i|^{1+\varepsilon} \le 1$$
höchstens endlich viele Lösungen $r, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}$ mit $(r, s_1, \dots, s_n) = 1$. Dabei sei $|r, s_i| = \max\{|r|, |s_1|, \dots, |s_n|\}$.
Dual zu diesem Satz erhält man den folgenden

Satz 3: Unter den Voraussetzungen von Satz 2 hat die Ungleichung $|r + s_1\alpha_{10} + \ldots + s_n\alpha_{n0}| \prod_{\tau=1}^{t} |r + s_1\alpha_{1\tau} + \ldots + s_n\alpha_{n\tau}|_{p_\tau} |r, s_i|^{n+\varepsilon} \leq 1$ bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele Lösungen mit den gewünschten Eigenschaften.

Die direkte Verallgemeinerung des Ridout'schen Ergebnisses liefert das folgende

Korollar: Unter den Voraussetzungen von Satz 2 gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele $(n+1)$-Tupel $(r, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ mit relativ primen Koordinaten und $r > 0$, so daß die simultanen Ungleichungen

$$\min\{1, |\alpha_{i0} - \tfrac{s_i}{r}|\} \cdot \prod_{\tau=1}^{t} \min\{1, |r\alpha_{i\tau} - s_i|_{p_\tau}\} \leq |r, s_i|^{-1-\frac{1}{n}-\varepsilon} \quad (1 \leq i \leq n)$$

erfüllt sind.

Hans Peter Schlickewei
Math. Inst. Freiburg

A conjecture of Erdős on continued fractions

Let $[a_1(x), a_2(x), \ldots]$ be the continued fraction expansion of x, $0 < x < 1$. Write $L_N(x) = \max_{1 \leq n \leq N} a_n(x)$

Theorem 1: For almost all x

$$\liminf_{N \to \infty} N^{-1} L_N(x) \log\log N = 1/\log 2$$

Except for the value of the constant this was conjectured by Erdős about 10 years ago. Actually a much stronger theorem holds.

Theorem 2: Let ψ_N be nonincreasing such that $N\psi_N$ is nondecreasing. Then

$$L_N(x) \leq N\psi_N / \log 2$$

holds finitely often or infinitely often for almost all x according as

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-1/4_n)\, n^{-1} \log\log n$$

converges or diverges.

Walter Philipp (Urbana)

A Diophantine inequality for forms of additive type.

Let K be an algebraic number field of degree n over the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers and $\overline{K} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, the tensor product of K with the field $\mathbb{R}$ of real numbers. For a fixed basis $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ of K over $\mathbb{Q}$ and $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \omega_i \otimes 1 \in \overline{K}$, one defines $\|\alpha\| = \underset{1 \le i \le n}{\mathrm{Max}} |a_i|$. Let $f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i^m$ be a form of degree m in s variables $x_1, \ldots, x_s$ with coefficients $a_1, \ldots, a_s$ (which are invertible) in $\overline{K}$; such a form is called a ("non-degenerate") form of additive type over $\overline{K}$.

Theorem. If $f(x_1, \ldots x_s)$ is a "non-degenerate" form of additive type over $\overline{K}$ such that (i) $f \neq \lambda \varphi$ for a $\varphi \in K[x_1, \ldots x_s]$ and $\lambda \in \overline{K}$ and (ii) f represents zero nontrivially over the real (archimedean) completions of K, then there exist, for any $\varepsilon > 0$, algebraic integers $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ not all zero in K such that $\|f(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\| < \varepsilon$, provided that $s \geq 2^m + 1$.

This is an improved version of an earlier theorem due to K.G. Ramanathan and S. Raghavan where one had the condition "$s \geq \mathrm{Max}(2^m+2,\ 2^{m-1}(m-1)n + n^2 + n)$" in place of the condition "$s \geq 2^m + 1$" which is clearly independent of the degree n of K over $\mathbb{Q}$; besides, there was an additional restriction "$mn \geq 4$" in the earlier result. [For $n = 1$, this theorem is due to Davenport - Heilbronn ~~and~~ (in case $m = 2$) and for $m \geq 2$, it is due to Davenport - Roth, with $2^m + 1$ replaced by (const.) $m \log m$ for large m]

The proof of the Theorem above uses an adaptation of the method of Heilbronn - Davenport - Roth and a generalization due to Siegel of the Hardy-Littlewood-Ramanujan circle method to algebraic number fields.

S. Raghavan

(Tata Institute of Fundamental Research)

On additive arithmetic functions.

About 40 years ago, P. Erdös ~~bew~~ proved the following

Theorem: Let $f(n)$ be a real additive arithmetic function. If the following three conditions are satisfied

1) $\sum_p \frac{f^*(p)}{p}$ converges

2) $\sum_p \frac{(f^*(p))^2}{p} < \infty$

3) $\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p} < \infty$,

then the limit (*) $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leq N \\ f(n) < x}} 1 = G(x)$ exists

for any real x; here

$$f^*(n) = \begin{cases} f(n) & \text{if } |f(n)| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Further he showed that if in addition

(**) $\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} = \infty$, then the limit-function

$G(x)$ of $(*)$ is continuous.
In the lecture a new proof was given to the last statement. The proof, which seems to be shorter and simpler than the original proof, is based on ideas of A. Rényi and P. Turán and on a formula by N. Wiener, expressing the ~~valu~~ square-sum of the saltuses of a distribution by an integral containing the characteristic function of the distribution.

P. Szüsz (Stony Brook, U.S.A)

Maximale Entropie bei Ziffernentwicklungen

f-Entwicklungen stellen eine Verallgemeinerung der bekannten Dezimalbruch- und Kettenbruchentwicklung reeller Zahlen dar und wurden bereits von verschiedenen Autoren eingehend untersucht (Kakeya, Everett, Bissinger, Renyi u.a.). Vom informationstheoretischen Standpunkt interessiert die Frage, ob bei diesen Entwicklungen die Menge der "zulässigen Ziffernfolgen" optimal ausgenützt wird. Ist die Menge der zulässigen Ziffern endlich (wie bei der Dezimalbruchentwicklung, nicht aber beim Kettenbruchalgorithmus) so führt dies auf die Frage, ob durch die Entropie der Ziffernentwicklung bezüglich eines zum Lebesgueschen Maß äquivalenten invarianten Maßes das Maximum aller möglichen Entropiewerte erreicht wird. Für gewisse eindimensionale f-Entwicklungen kann diese Frage vollständig beantwortet werden, für mehrdimensionale liegen Teilresultate vor. In jedem Fall sind aber die „linearen" f-Entwicklungen sicher optimal.

R. Fischer (Salzburg, Austria)

Maße für die lineare Unabhängigkeit gewisser Zahlen.

Ist $\varphi(z)$ ganz, sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q} - \{0\}$ paarweise verschieden, so wird die lineare Unabhängigkeit von $1, \varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ über $\mathbb{Q}$ bewiesen mit Hilfe einer Methode, die sofort auch Maße für diese Unabhängigkeit liefert, in zwei Fällen:
(1) φ genügt einer linearen DGl erster Ordnung $P(z)\varphi'(z) = Q(z)\varphi(z) + R(z)$ mit $P, Q, R \in \mathbb{Q}[z]$ bzw. (2) φ genügt einer linearen q-Diff.gleichung erster Ordnung $P(z,q)\varphi(qz) = Q(z,q)\varphi(z) + R(z,q)$, wo $P, Q, R \in \mathbb{Q}[z,q]$; q fest. Im Fall (1) wird z.B. gezeigt der <u>Satz 1.</u> $\lambda \in \mathbb{Q} - \{-1, -2, \dots\}$, $\varphi_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^k \prod_{\nu=1}^{k} (\nu+\lambda)^{-1}$; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ wie oben. Sind $h_0, \dots, h_n \in \mathbb{Z}$, nicht alle 0, und ist $\max_{1\le\nu\le n} |h_\nu| \le H$, so gilt für $H > H_0(\lambda, n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$:

$$|h_0 + h_1\varphi_\lambda(\alpha_1) + \dots + h_n\varphi_\lambda(\alpha_n)| \ge H^{-n-c(\log\log H)^{-1}}, \qquad c = c(\lambda, n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0.$$

Im Fall (2) sei als Beispiel genannt <u>Satz 2.</u> $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$; $\varphi_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k q^{-\frac{1}{2}k(k-1)}$; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ wie oben, aber $\alpha_\nu / \alpha_{\nu'} \ne q^j$ für $j \in \mathbb{Z}$, falls $\nu \ne \nu'$. Sind die h_ν wie in Satz 1, dann ist $|h_0 + h_1\varphi_q(\alpha_1) + \dots + h_n\varphi_q(\alpha_n)| \ge cH^{-(1+\sqrt{1+4n^2})/2 - \varepsilon}$ mit $c = c(\varepsilon, q, n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$.

P. Bundschuh (Köln)

On certain sums in number theory

Let $P_k = \max_j \|\alpha_j k\|$, where $\|t\|$ denote the distance of t from the nearest integer, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ be real numbers. The investigation of two basic problem in the theory of lattice points in many dimensionale rational ellipsoids (problem of centers and weights) leads to the investigation of the following sums

$$F(x) = \sum_{k \le \sqrt{x}} k^\rho \min{}^\beta\left(\frac{\sqrt{x}}{k}, \frac{1}{P_k}\right), \quad H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\rho-1} \min{}^\beta\left(x, \frac{1}{P_k}\right),$$

where x, ρ and β are positive numbers, $x > 1$. Using an estimate for the number of solutions of the inequalities $M < k \le 2M$, $P_k < L$ essentially due to Hardy and Littlewood one can prove the following

Theorem:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\log F(x)}{\log x} = \max\left(\frac{3\beta+\beta}{2(\beta+1)}, \frac{\beta+1}{2}\right), \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{\log H(x)}{\log x} = \max\left(1-\frac{\beta+1}{\beta}, 0\right),$$

where $\beta = \beta(a_1 \ldots a_n)$ is the supremum of all $s > 0$ for which $\liminf p_k k^{s} < +\infty$ (see Commen. Math. Univ. Carolinae 13 (1972), 763–775, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 197 (1974)).

Břetislav Novák (Praha)

Über einige Abschätzungen bei Binomialkoeffizienten

Mit elementaren Methoden werden die folgenden Sätze bewiesen:

Satz 1. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{2} \leqq c_k = \binom{2k}{k}\sqrt{k}\cdot 4^{-k} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} < 0{,}5642$. Die Folge der c_k ist streng monoton wachsend; es ist $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Satz 2. Für $1 \leqq k \leqq n-1$ gilt mit $x = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\frac{n}{2}-k\right)$

$$\binom{n}{k}\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot 2^{-n}\cdot e^{\left(1-\frac{1,5}{n}\right)x^2} \leqq \binom{n}{k}\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot 2^{-n}\left(1+\frac{n^2-n-1}{n^3}\right)^{\frac{(n-2k)^2}{2}} \leqq c_k$$

Satz 3. Für $\frac{n}{3} \leqq k \leqq 2\frac{n}{3}$ gilt $c_k \leqq \binom{n}{k}\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot 2^{-n}\cdot e^{x^2}$.

Satz 4. Für $0 \leqq k \leqq n$ gilt $c_k \leqq \binom{n}{k}\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot 2^{-4k\left(1-\frac{k}{n}\right)}$.

Folgerungen: Sei $\nu(m)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von m. Nach P. Erdős (1973) gilt $(1-\varepsilon)\frac{2k\log 2}{\log 2k} < \nu\left(\binom{2k}{k}\right) = \nu_k < (1+\varepsilon)\frac{2k\log 2}{\log 2k}$.

Aus Satz 1 ergibt sich

α) Für $k \geqq 2$ gilt $\nu_k > \frac{2k\log 2}{\log 2k} - \frac{1}{2}$; β) Es gibt ∞ viele $k \in \mathbb{N}$ mit $\nu_k > \frac{2k\log 2}{\log 2k}$;

γ) Für $n \geqq 3$ ist $\pi(n) \geqq \frac{n}{\log n}\log 2$.

Aus den Sätzen 2 bis 4 ergibt sich unmittelbar $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$; für $\frac{n}{3} \leqq k \leqq 2\cdot\frac{n}{3}$

$$\nu\left(\binom{n}{k}\right) \geqq \frac{n}{\log n}\log 2 - \frac{1}{2} - \frac{\log 2}{2n} - \frac{(n-2k)^2}{2n\log n}.$$

Da nach Erdős auch $\nu\left(\binom{n}{k}\right) < (1+\varepsilon)\frac{n}{\log n}\log 2$ gilt, haben wir

Satz 5. Aus $|n-2k| = o(n)$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \nu\left(\binom{n}{k}\right)\frac{\log n}{n\log 2} = 1$.

H.-J. Kanold (Braunschweig)

On a cyclotomic diophantine equation

Let $K_m = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$. Problem: Given a unit $\varepsilon \in K_m$, does there exist another unit $\eta \in K_m$ such that $\varepsilon = \eta^q$ for some $q > 1$? Three different methods were discussed, which give an answere in some particular cases.

Th. 1 (Loxton): Let p be an odd prime. Then there are no solutions of $\sum_{j=0}^{p-2} a_j \zeta_p^j = \eta^q$, where $q \geq 2$, $a_j = 0$ or 1, and at least two of the a_j's are $= 1$.

Th. 2 If ξ is a unit in K_m, $q \geq 3$, and $\xi + 1 = \eta^q$ for some $\eta \in K_m$, then either $\eta = 0$ or η is a root of unity.

Th. 3 If $m \geq 4$, $2 \leq g \leq m-2$, $q \geq 2$, then the only solution $\eta \in K_m$ of the equation $1 + \zeta_m + \zeta_m^2 + \dots + \zeta_m^{g-1} = \eta^q$ is given by $q = 2$, $m = 12$, $g = 7$, $\eta = \pm \zeta_{12}^5 (1 - \zeta_{12})^{-1}$.

Veikko Ennola (Turku)

Über die Lösbarkeit von Gleichungssystemen durch Liouville-Zahlen

Nach Erdős (1962) ist jede reelle Zahl die Summe zweier L(iouville)-Zahlen und jede reelle Zahl $\neq 0$ das Produkt zweier L-Zahlen. Satz. Es sei r eine natürliche Zahl; die Funktion $F_j : (0,1) \to \mathbb{R}$ sei strengmonoton und stetig ($1 \leq j \leq r$); dann gibt es ü(berabzählbar)-viele L-Zahlen $\alpha \in (0,1)$ derart, dass $F_1(\alpha), \dots, F_r(\alpha)$ auch L-Zahlen sind. Der Beweis ist konstruktiv. Anwendungen auf parametrisierte Kurven, Flächen etc. liegen auf der Hand. So lässt sich das System $x + y = \alpha \wedge yz = \beta$ für gegebene Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$ durch ü-viele L-Zahlen x, y, z lösen; so lässt sich die Gleichung $x^y = \eta$ für gegebenes $1 < \eta \in \mathbb{R}$ durch ü-viele L-Zahlen x, y lösen. — In der Diskussion wurde auf andere Mengen transzendenter Zahlen und auf Gewinnmengen hingewiesen.

G. J. Rieger

Noncontinuable power series and diophantine approximation

Starting from the work of Hecke on the power series $\sum_{n=0}^{\infty} \{n\alpha\} z^n$, α irrational, we improve and complement results of Hlawka concerning the so-called Abel discrepancy. Analogues of inequalities of Koksma-Hlawka, the author, Erdős-Turán, and LeVeque for the Abel discrepancy are established. Special attention is given to sequences of the form $\omega = (n\underline{\alpha})$, $n = 0, 1, \ldots$, with $\underline{\alpha} = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(s)}) \in \mathbb{R}^s$ and $1, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(s)}$ linearly independent over the rationals. The Abel discrepancy of these sequences is estimated in terms of the type of $\underline{\alpha}$. The proof techniques can be extended to general classes of summation methods.

H. Niederreiter (Princeton)

Über Potenzreihen deren Koeffizienten arithmetisch charakterisiert sind.

Es würde über die folgende Verallgemeinerung des oben genannten Resultats von Hecke gesprochen:

Satz: $g \in \mathbb{C}[x]$, $\phi \in \mathbb{R}[x]$, Grad von $g \geq 1$,
$\phi(x) = \phi_0 + \phi_1 x + \cdots \phi_k x^k$, $\phi_k \neq 0$, $k \geq 1$. Dann sind die Reihen

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(\{\phi(n)\}) \cdot z^n \quad \text{und} \quad \hat{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g([\phi(n)]) \cdot z^n$$

über $|z| = 1$ nichtfortsetzbar.

Der Beweis würde geführt mit Hilfe eines Satzes über Nichtfortsetzbarkeit von Wiener. Es zeigt sich, daß man das Resultat stark erweitern kann, z. B kann man für G eine langsam wachsende ganze Funktion nehmen und die Folge $\phi(n)$ kann ersetzt werden durch Folgen die gewissen Wachstumsbedingungen genügen.

R. Wallisser (Freiburg)

Calculus of Variations

21.7. – 27.7. 74

Ein neuer Eindeutigkeitsatz für Minimalflächen.

Der Fragenkreis der Ein- und Mehrdeutigkeit beim Plateauschen Problem bietet heute noch viele offene Probleme. Man muß hier einen (i) lokalen Aspekt und ~~(ii)~~ einen (ii) globalen Aspekt unterscheiden:

(i) Es ist nicht bekannt, ob jede (stabile oder instabile) Lösung des Plateauschen Problems isoliert liegt.

(ii) Es ist bisher nicht gelungen, die Anzahl der Lösungen durch die geometrischen Eigenschaften der Randkurve abzuschätzen.

Nach geschichtlichen Bemerkungen werden Beispiele diskutiert und Resultate von Boehme, Courant, Lévy, Nitsche, Radó, Tomi beschrieben. Am Ende wird eine Beweisskizze des folgenden Eindeutigkeitssatzes gegeben (Arch. Rat. Mech. Anal. 52 (1973), 319–329):

„Eine reguläre analytische Jordankurve der Totalkrümmung $\leq 4\pi$ berandet genau eine Lösung des Plateauschen Problems."

Johannes C.C. Nitsche
(Minneapolis)

The Stability of Menisci

We consider drops of liquid in three commonly occurring situations: (i) hanging from the lower surface of a horizontal plane; (ii) hanging from the horizontal circular mouth of a tube, under the action of a constant pressure in the tube; (iii) hanging from the horizontal mouth of a tube, which is filled with liquid and closed at the other end.

These configurations are stable if the second variation of the total energy of the system ($\delta^2 E$) is never negative or zero; in examples (i) and (iii) there is the constraint that the volume of the drop is constant.

We assume that the equilibrium surfaces are axially symmetrical, and take a simplistic view of the problem of evaluating $\delta^2 E$. In examples (i) and (ii) we further assume that the perturbations are axially symmetrical. In all cases, the end points are allowed to vary, subject only to the geometrical conditions.

It is found that in (i) the drop is stable as long as its volume and its height increase together; the maximum possible theoretical equilibrium volume V_m marks the onset of instability. In (ii) the drop is stable, as long as its volume and the applied pressure increase together. In this case, the onset of instability is reached before V_m.

In example (iii) we consider general perturbations, in a similar elementary way. It is found that the perturbation which gives the least value of $\delta^2 E$ is in fact axially symmetrical, and that the drop is stable as long as its volume and height increase together; V_m marks the onset of instability. (This result has been fully confirmed by experiment.)

The simplicity of these results may encourage others to supply their rigorous proof.

Eric Pitts

Research Division,
Kodak Limited, Harrow, England

A singular solution of the capillary equation

It is known that if $\kappa \geq 0$ then the capillary eqn

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+u_{x_i}^2}}\right) = \kappa u \quad , \quad i = 1, \ldots, n \, ,$$

admits only removable isolated singularities. In the present work it is shown that if $\kappa < 0$ there exists a solution $U(r)$ with a (non-removable) isolated singularity at $r = 0$, and that asymptotically

$$(2) \qquad U(r) \sim -\frac{n-1}{\kappa r}$$

The solution is apparently related to an asymptotic property of pendant water drops.

The estimate (2) is characteristic in the sense that if $V(r)$ is a soln of (1) and singular at the origin, then

$$\frac{n-1}{|\kappa|} \lambda_0 r < |V(r)| - U(r) < \lambda_1 r \cdot \frac{n-1}{|\kappa|}$$

for any constants $\lambda_0 > \frac{\pi + \sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$, $\lambda_1 > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$.

These results derive from joint work with P. Concus. R Finn

Le problème paramétrique des capillaires

On étudie le problème de l'existence des solutions paramétriques de la capillarité.
Le problème, en forme variationelle, a la formulation suivante:

$E \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \lambda$, minimiser la fonctionelle:

$$\mathcal{E}(F) = (1-\lambda)\, |D\varphi_F|(E) + \lambda\, |D\varphi_F|(\mathbb{R}^n) + \int_F \rho(x)\, dx$$

dans la classe:

$$\mathcal{F} = \{ F \subset E,\ \varphi_F \in BV(E),\ \int_F q(x)\, dx = V \}$$

On prove l'existence du minimum si $0 \leq \lambda \leq 1$.
Si $\lambda > 1$, la fonctionelle $\mathcal{E}$ n'est pas sémicontinue, mais, pour un minimum éventuel, on a:

$$|D\varphi_F|(\mathbb{R}^n) = |D\varphi_F|(E)$$

c'est à dire:

$$|D\varphi_F|(\mathbb{R}^n - E) = 0$$

On emploit pour ça un théoreme d'approximation des ouverts lipschitziens par des variétées C^∞
On obtient aussi des resultats rélatifs au problème des capillaires avec gravité nulle.

Luigi Pepe
(FERRARA)

Limites des surfaces de courbure générali~~sée~~ lisée.

On étudie certains problèmes sur les limites des ensemble de Caccioppoli en $\mathbb{R}^n$. Le théorème, le plus fort, conduit à un resultat de régularité pour les solutiones de l'equation:

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\frac{D_i f(x)}{\sqrt{1+|Df|^2}} \right) = A(x, f(x))$$

si $|f(x)| \leq L$ et $\|A(x,t)\|_{L^p(\Omega \times [-L,L])} < \varepsilon_0 \qquad p > n+1$

On emploie aussi les resultats de convergence pour généraliser une estimation integrale de la somme des carrés des courbures principales d'une surface. Un cas particulier de cette estimation implique une Jolutation de la courbure de Gauss de la solution du problème des capillaires, en dimensions deux.

Umberto Massari
(FERRARA)

On limit boundaries of generalized surfaces, in L.C. Young's sense.

Let F be the space of real valued continuous functions $f(x,j)$ ~~from~~ in $R^m \times S^m$ ~~to the reals~~, where S^m is the set of all $m \times m$ matrices of rank 0 or 2, and such that $f(x,kj) = k f(x,j)$, $k \geq 0$. A generalized surface L is a nonnegative linear functional on F. Let $L(\tau, \Gamma)$ be the set of all generalized surfaces $L = \text{weak} \lim L_n$, where L_n admit representation of the type $L_n(f) = \int_{B_n} f(x_n(w), j_n(w))\, dw$ all $f \in F$, $x_n(w)$ a Dirichlet function on B_n, which we assume to be the domain of topological type τ and with boundary having Γ_n as the set of its components. Call $\lim \Gamma_n = \Gamma$ and say that L is of type (τ, Γ). Under quite general conditions on Γ we study representations of L and the problem of minimum of such L.

Ubiratan D'Ambrosio
(Universidade Estadual de Campinas, Brasil)

Le problème de Dirichlet pour les surfaces à courbure moyenne donnée

Problème : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne existe-t-il une surface $x_{n+1} = u(x)$ ayant en chaque point x de Ω une courbure moyenne $H(x)$ donnée et prenant une valeur fixée. On peut donner plusieurs formulations de ce problème :

$$(1)\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega, \ \varphi \in C^0(\partial\Omega) \\ \sum_{i=1}^{n} D_i \dfrac{D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}} = n H(x) \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} u \in H^{1,1}(\Omega) \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega, \ \varphi \in L^1(\partial\Omega) \\ \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \dfrac{D_i u D_i v}{\sqrt{1+|Du|^2}} + n \int_\Omega H(x) v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^{1,1}(\Omega) \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \text{minimiser la fonctionelle} \\ F(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} + n \int_\Omega H(x) u(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} |u-\varphi|\, dH_{n-1} \\ \text{dans } BV(\Omega) \quad (\varphi \in L^1(\partial\Omega)) \end{cases}$$

On a : u solution de (1) $\Rightarrow$ u solution de (2) $\Rightarrow$ u solution de (3).

Le problème (3) a toujours une solution au moins sous des conditions 'naturelles' sur $H(x)$ (M. Giaquinta - On the Dirichlet problem for surfaces of prescribed mean curvature, Manuscripta Math. 12 (1974)). Au contraire les problèmes (1) et (2) n'ont pas toujours de solution (contre-exemples de Radò et de Bernstein). On demontre que la seul obstruction à l'existence de solutions pour (1) et (2) est l'existence de 'fonction de Bernstein'. Plus précisement le problème de Dirichlet (2) (ou (1)) admet des solutions si et seulement si le problème de Neumann avec la donnée

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \nu_i D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}} = 1 \qquad \text{sur } \Gamma \subset \partial\Omega$$

n'a pas de solution (M. Giaquinta - J. Souček - Esistenza per il problema dell'area e controesempio di Bernstein, à paraître au B.U.M.I.)

Mariano Giaquinta (Università di Pisa)

Regularitätsfragen bei Variationsproblemen

Von C. B. Morrey stammt der Satz, daß die Minima $\in H^{1,p}$ von Variationsintegralen vom Typ $\int_\Omega F(x,u,\nabla u)\,dx$ hölderstetig sind, falls $\Omega \subset R^n$ und $c|\nabla u|^p - K \leq F(x,u,\nabla u) \leq$ $\leq C|\nabla u|^p + K$ mit $p = n$ gilt.
Für skalare Variationsprobleme wird dieser Satz auf den Fall $1 < p < n$ verallgemeinert, wobei zusätzlich $F(x,u,\eta)$ konvex in η und Lipschitzstet. in u vorausgesetzt wird. Ein Gegenbeispiel zeigt, daß nichtminimale Lösungen der zugehörigen Eulerschen Gleichungen unbeschränkt sein können (auch für $n = p = 2$).

Jens Frehse (Bonn)

Boundary value problems for surfaces of prescribed mean curvature.

The problem of the existence of non-parametric surfaces of prescribed mean curvature is discussed under general boundary conditions, which include the Dirichlet problem, as well as capillarity-type conditions and free and partially free boundary problems.
This problem is treated in an unified setting, giving sharp (and in many cases necessary and sufficient) conditions for the existence of generalized solutions.

Enrico Giusti

Some regularity results for a class of quasilinear elliptic systems of second order

Consider the system

$$(*) \qquad Lu := -D_\beta\left(A^{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha u\right) = f(x,u,\nabla u)$$

in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, where u and f are vectorvalued functions. We assume that

$$\lambda|\xi|^2 \leq A^{\alpha\beta}(x)\,\xi_\alpha\xi_\beta \leq \mu|\xi|^2 \qquad x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n$$

and $\qquad |f(x,u,p)| \leq a|p|^2.$

A weak solution of $(*)$ is an element of $H_2^1 \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ that satisfies

$$\int_\Omega A^{\alpha\beta} D_\alpha u\cdot D_\beta\varphi\, dx = \int_\Omega \varphi\cdot f(x,u,\nabla u)\,dx \qquad \forall\ \varphi\in \mathring{H}_2^1 \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$$

Easy examples show that ~~t~~ solutions can be discontinuous unless $\sup|u|\,a < \lambda$. In the case $n=2$ this condition is also sufficient to ensure Hölder continuity for solutions. For $n>2$ the stronger condition $2\sup|u|\cdot a<\lambda$ is sufficient. The methods of proof used are the Courant – Lesbegue lemma, the maximum principle, and the hole-filling technique. The maximum principle

$$\max_\Omega |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u|$$

can be proved under the unilateral condition $u\cdot f(x,u,p) \leq \lambda|p|^2$. These results have ~~obi~~ applications in the theory of ~~calculus~~ calculus of variations, and in differential geometry (see H. Karl below)

Kjell-Ove Widman

Joint work with S. Hildebrandt.

Harmonische Abbildungen von riemannschen Mannigfaltigkeiten

Ist $u \in H^1_2 \cap L_\infty(M, \tilde{M})$ eine schwach harmonische Abbildung von riemannschen Mannigfaltigkeiten (harmonisch im Sinne von Eells-Sampson, Amer. J. Math. 1964), so lassen sich mit Hilfe des Rauchschen Vergleichssatzes ein Maximumprinzip und ein Regularitätssatz für elliptische Systeme (siehe vorstehenden Bericht von Widman) anwenden.

Man erhält unter der Voraussetzung $u(x) \overset{\text{f.ü.}}{\in} B_\rho(y) = \rho$-Ball um $y \in \tilde{M}$ in $\tilde{M}$:

Maximumprinzip: Ist $\varkappa$ obere Schranke der Schnittkrümmung von $\tilde{M}$ und $\varkappa\rho^2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, so gilt $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in M} \operatorname{dist}(y, u(x)) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \partial M} \operatorname{dist}(y, u(x))$.

Regularität: Ist $\tilde{M}$ der Modellraum konstanter Schnittkrümmung $\varkappa$ (Sphäre, euklid. oder hyperbolischer Raum), so ist u Hölderstetig, wenn $\sqrt{|\varkappa|}\,\rho \leq 0{,}835$.

Helmut Kaul (Bonn)

Dualité en Calcul des Variations.

Un cadre abstrait permettant d'appliquer les techniques de dualité selon Fenchel et Rockafellar à des problèmes de minimisation du type :

Trouver $u \in V$ réalisant l'infimum du problème $\operatorname{Inf}\{F(u) + G(Lu)\}$ est tout d'abord présenté. (V et Y sont deux espaces de Banach, F et G deux fonctionnelles convexes, semicontinues inférieurement et propres de V (resp. Y) dans $]-\infty, +\infty]$ et L est un opérateur linéaire continu de V dans Y)
Nous introduisons le problème dual de ce problème de minimisation et explicitons les relations primal-dual.

Dans une deuxième partie nous utilisons, sur le cas particulier du problème des surfaces minima non paramétriques, un résultat de Bronsted et Rockafellar concernant les sous différentiels à ε-près pour étudier les suites minimisantes. On obtient ainsi l'existence d'une solution "généralisée" vers laquelle convergent toutes les suites minimisantes, en un sens faible. Ce dernier résultat est obtenu pour un ouvert borné de bord "régulier" quelconque, la donnée au bord étant supposée intégrable

A. LICHNEWSKY (Orsay)

Ein Störungssatz für Minimalflächen.

Mit Methoden der Verzweigungstheorie wird folgender Satz bewiesen: Ist f eine reguläre Minimalfläche, welche dem Flächeninhalt in der Klasse derjenigen Flächen, welche denselben Rand wie f haben, ein (bezüglich der $C^{2+\alpha}$-Topologie) lokales, striktes Minimum erteilt, so ist f stabil gegen Störungen des Randes in der $C^{3+\alpha}$-Topologie. Ein ähnliches Resultat wurde – mit ganz verschiedenen Methoden – bereits früher von Hildebrandt bewiesen. Im Unterschied zu den Methoden Hildebrandts lassen sich jedoch die Methoden des Autors ebenso auf allgemeinere Flächenklassen anwenden.

F. Tomi (Münster)

Stabilität von Minimalflächen gegen Störung der Randkurve

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und hinreichend groß. Es sei $\mathcal{M}^m$ die Menge der Minimalflächen in $\mathbb{R}^3$ vom Typ der Kreisscheibe in der Sobolevklasse H^m. $\mathcal{M}^m_0 \subset \mathcal{M}^m$ sei die Menge der Minimalflächen ohne Verzweigungspunkte auf dem Rand. $\mathcal{M}^m_0$ ist abzählbare Vereinigung reellanalytischer Hilbert-Untermannigfaltigkeiten von $H^m(B, \mathbb{R}^3)$.
Dann gilt:
Eine H^m offene und H^m-dichte Teilmenge N der Minimalflächen ohne Verzweigungspunkte in $\mathcal{M}^m_0$ ist stabil gegen Störung der Randkurve. Es gibt eine H^m offene Umgebung $U(x)$ in $\mathcal{M}^m$ für jede solche Minimalfläche aus N, so daß die Projektion von $U(x)$ auf den Raum der Randkurven nahe dem Rand von x – topologisiert durch $H^{m-1/2}$-Norm – ein Homöomorphismus ist.
Umgekehrt gilt:
Jede Minimalfläche ohne Verzweigungspunkte gerader Ordnung ~~auf dem Rand~~ und mit $k \geq 1$ Verzweigungspunkten der Ordnung 1 ist nicht stabil gegen Störung der Randkurve, wenn man wie oben die H^m-Topologie zugrunde legt.

R. Böhme

Variationsansätze von der Art des vollständigen Dirichletintegrals bei den harmonischen Feldern (Elastische Schalen)

Die Anwendungen der harmonischen Felder (in einer mehrfach zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit ev. mit Rand) benützen Morreys Variationsmethode mittels des vollständigen Dirichletintegrals.

Die Volterraschen Distorsionen (Selbstspannungen) einer Schale eines bestimmten Cosseratschen Schalenmodells, das auch in der Schalentheorie von Trefftz und Grammel benutzt wird, liefert für die Schnittkraftdynamen Identität unmittelbar ~~aus~~ Differentialgleichungen mit denselben Hauptteilen wie die harmonischen Felder.

E. Hölder (Mainz).

Kapillaritätsprobleme mit vorgeschriebenem Volumen in einem nicht-negativen Gravitationsfeld

Es wurde gezeigt, daß das Funktional

$$J(v) = \int_\Omega \sqrt{1+|Dv|^2}\,dx + \frac{\kappa}{2}\int_\Omega |v|^2\,dx - \int_{\partial\Omega} \beta\, v\, dH_{n-1}$$

in der Klasse $v \in BV(\Omega) \cap \{v \geq \psi\} \cap \{\int_\Omega (v-\psi)\,dx = V\}$

ein Minimum $u \in H^{1,1}(\Omega) \cap C^{0,1}(\Omega)$ besitzt, das auch das Variationsproblem

$$J(v) + \lambda \int_\Omega v\,dx \to \min \quad \text{in } v \in BV(\Omega) \cap \{v \geq \psi\}$$

mit einem geeigneten Lagrangeschen Parameter λ löst. Über Ω, κ und β wurde dabei vorausgesetzt, daß κ eine nicht-negative Konstante, β eine Funktion aus $L^\infty(\partial\Omega)$ mit $|\beta| \leq 1-a$, $a>0$, und Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit hinreichend glattem Rand ist.

Claus Gerhardt (Mainz)

Regularität für schwache Lösungen der Gleichung $\Delta x = 2H(x)(x_u \wedge x_v)$.

Es sei $x = x(u,v) \in H^1(G, \mathbb{R}^3)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung $\Delta x = 2H(x)(x_u \wedge x_v)$ mit $H(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und $h_0 = \sup_{\mathbb{R}^3} |H(x)| < +\infty$ sowie $h_1 = \sup_{\mathbb{R}^3} (1+|x|)|\nabla H(x)| < +\infty$. Zur Abkürzung setzen wir $D_{B_R}(x) = \iint_{B_R} (x_u^2 + x_v^2)\,du\,dv$ und $M_{B_R}(x) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{B_R} (x_u^2 + x_v^2)\,du\,dv$. Dabei ist $B_R = \{|w-w_0|\leq R\}$.

Dann wird gezeigt: Wenn für ein $B_R \subset G$ die Ungleichungen

$$(1+h_0^4)\, D_{B_R}(x) < A_0$$

und

$$h_1^2\, D_{B_R}(x)\left(D_{B_R}(x) + M_{B_R}(x)\right) < A_1$$

gelten, wobei A_0, A_1 absolute Konstante sind, so ist $x(u,v)$ in $B_{\frac{1}{2}R}$ regulär. Dies stellt eine Verallgemeinerung früherer Resultate von H. C. Wente (J. math. Anal. Appl. 26, 318–344 (1969)) sowie von

F. Tomi (Math. Z. 132, 323–325 (1973)) dur

E. Heinz (Göttingen)

Spectral and Scattering Theory

28.7. – 3.8.1974

The essential self-adjointness of differential operators with oscillatory coefficients

The following inequality involving the Sturm–Liouville operator $\tau = -d^2/dx^2 + q$ $(0 \le x < \infty)$ and its bilinear form $[f,g] = f\bar{g}' - f'g$ is given

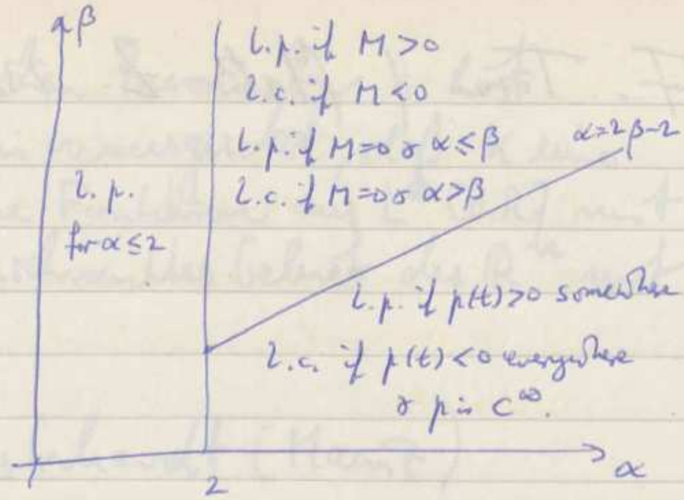
$$\int_A \phi |[f,g]| \, dx \le \int_A \left(|f|^2 + |g|^2 + |\tau f|^2 + |\tau g|^2\right)(1 + \phi^2 + \phi'^2) + \int q \left(|f|^2 + |g|^2\right) \qquad (*)$$

where $\phi \geq 0$ and $A = \operatorname{supp} \phi$ is compact and $f, g \in \mathcal{D}$, the domain of the associated maximal operator in $L^2(0,\infty)$. It is pointed out that most known limit-point criteria on q can be obtained as corollaries by choice of ϕ or by further manipulation of the inequality. In particular, we have (ISMAGILOV 1962)

Let there be a sequence of non-overlapping intervals (a_n, b_n) in which $q(x) \geq -k(b_n - a_n)^{-2}$. Then τ is limit-point if $\Sigma (b_n - a_n)^2 = \infty$.

$q(x)$ can be arbitrary outside these intervals. It is shown that a similar situation obtains for the Schrödinger operator $\tau = -\Delta + q$ in R^N. The argument rests on the paper of KATO (Israel J. Math 1972) but with part of Kato's work replaced by the analogue of $(*)$ in R^N. Consequently conditions for essential self-adjointness of τ are obtained which involve the behaviour of q only in a sequence of annuli surrounding the origin. (This is joint work by J. B. McLEOD, W. D. EVANS & myself)

Also considered is the Sturm–Liouville τ when q has the form



$q(x) = x^\alpha p(x^\beta)$, where $p(t)$ is periodic in t. The l.p./l.c. nature is shown in the diagram, where $M = \int_0^a p(t)\,dt$ & a is the period of p. The methods involve (a) some existing l.p. & l.c. criteria (b) asymptotic analysis of solutions (c) differential inequality theory (This is joint work of F.V. ATKINSON, J.B. McLEOD & myself)

M.S.P. Eastham
Chelsea College
University of London.

Approximation Methods for Schrödinger Operators

Joint work with E. Lieb is described proving existence of solutions of the Thomas-Fermi, Hartree and Hartree-Fock equations. These solutions are related to the ground states of atomic Schrödinger Hamiltonians in the $Z \to \infty$ limit.

B. Simon
Princeton University

Time estimates in scattering theory

Estimates on the expected length of time that a particle can be trapped (by a barrier, for example) follow from estimates on the resolvent $(H-z)^{-1}$ of a Schrödinger operator $H = -\Delta + V(x)$. Such estimates are known, but they are not constructive — their dependence on the potential is not explicit. Thus one knows that this trapping time is finite, but not how long it can be for a given potential.

We present a proof of resolvent estimates which does give this information. This proof unites steps which have been separate in previous arguments: 1) existence of estimates on the unperturbed operator, 2) either similar estimates on the perturbed operator or positive eigenvalues for this operator 3) the corresponding eigenfunctions vanish outside a compact set, 4) unique continuation.

R Lavine, University of Rochester

Multi-channel scattering in quantum mechanics

The quantum mechanics of n particles interacting through analytic two-body interactions can be formulated as a problem of functional analysis on a Hilbert space G consisting of analytic functions. On G, there is a Hamiltonian H with resolvent $R(\lambda)$. These quantities are associated with families of operators $H(\varphi)$ and $R(\lambda,\varphi)$ on L^2, the case $\varphi=0$ corresponding to standard quantum mechanics. The spectrum of $H(\varphi)$ consists of possible isolated points, plus a number of half-lines starting at the thresholds of scattering channels and making an angle 2φ with the real axis.

If the two-body interactions are in the Schmidt class on the two-particle space G, and $\varphi\neq 0$, a well-known Fredholm equation for $R(\lambda,\varphi)$ can be solved by the Neumann series whenever $|\lambda|$ is sufficiently large and λ is not on a branch cut. To show this, it is helpful to consider the Fourier transform of the Fredholm equation, integrating with respect to λ along straight lines between the branch cuts. The kernel of the Fredholm equation belongs to the Schmidt class. Its Schmidt norm and the Schmidt norm of its Fourier transform are square-integrable functions. Owing to this, there are results on $R(\lambda,\varphi)$ and its Fourier transform that are sufficient to integrate $R(\lambda,\varphi)$ around a branch cut. This yields a bounded idempotent operator $P(\varphi)$ on L^2. The range of $P(\varphi)$ is an invariant subspace of $H(\varphi)$. As φ varies, the family of operators

$P(\varphi)$ generates a bounded idempotent operator P on a space G. The range of this is an invariant subspace of H. The above results will be published in J. Math. Anal. Appl. The operators $P(\varphi)H(\varphi)$ and PH generate semigroups, the properties of which are currently under investigation.

Clasine van Winter
University of Kentucky.

Eigenfunction expansions and scattering for ~~elliptic~~ operators with simple null bicharacteristics (in odd dimensional space).

This work deals with constructive symmetric hyperbolic systems, $\partial u/\partial t = Lu$, where L is equal to the homogeneous, constant coefficient operator L_0 for $|x| > R$. Under the hypothesis that L has simple null bicharacteristics and these propagate to infinity, local decay of solutions and completeness of the wave operators relating solutions of $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$ and solutions of $\frac{\partial u}{\partial t} = L_0 u$ can be established. Results of this type for elliptic L are due to Lax and Phillips. The proof here is based, in part, on a new estimate of the regularity of the L^2-solutions of the equation $Lu + (i\lambda + \varepsilon)u = g$ for smooth g with support in $|x| \leq R$. This estimate can fail to hold for operators L with diagonal top order part where the hypothesis of simplicity on the null bicharacteristics is removed. This presents an obstacle to the extension of these results to more general equations.

J V Ralston
UCLA

Upper and Lower Bounds for Critical Energies of the Hartree Operator

R. Seydel and the author consider Reeken's pointwise positive eigenfunction $\bar{u}(\vec{r})$ for the radial Hartree equation of the helium atom. The potential energy of this problem is given by

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\operatorname{grad} u|^2 d\vec{r} - 2\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(\vec{r})}{|\vec{r}|} d\vec{r} + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(\vec{r})\,u^2(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}\,d\vec{r}'$$

and the minimal critical energy E_1 is determined by $E_1 = \min_{\|u\|=1} \Phi(u)$. In order to prove the existence of the minimum, as well as upper and lower bounds to it, they introduce the scalar product $[v,w] = \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{v(\vec{r})\,w(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}\,d\vec{r}'$ and substitute $[u^2,u^2] \geq 2[u^2,z^2] - [z^2,z^2]$ for the last term in Φ, where $z(\vec{r})$ is a trial vector. The choice $z=\bar{u}$ yields $\min_{\|u\|=1} \Phi(u) = \Phi(\bar{u})$. Further results in this direction have been obtained by J. Weyer and H. Melzer of Cologne University, as well as works of Stuart, Wolkowisky, and Lieb and Simon.

N. W. Bazley
Univ. of Cologne

SCATTERING THEORY OF THE LINEAR BOLTZMANN OPERATOR

The linear Boltzmann equation is a linear integro differential equation:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \underbrace{-v\operatorname{grad}_x n}_{-T} + \underbrace{\int_{R^3} k(x,v',v)\,n(x,v',t)\,dv' - \sigma(x,v)\cdot n}_{-A}$$

$n(x,v,0) = f(x,v)$

The collision free linear Boltzmann operator $-T$ is defined in $L^1(R^6)$ and $L^2(R^6)$. The linear collision operator $-A$ is bounded and in $B(L^1)$, $B(L^2)$ resp. under very general sufficient condition. The groups e^{-Tt} and $e^{-(T+A)t}$ exist. The Mølleroperator $W_\pm(T+A,T)$ exists, if a generalized version of the Cook-theorem in the case of a Banach space is used.

J. Hejtmanek / University of VIENNA, AUSTRIA

Hilbert space approach to the quantum mechanical three body problem.

One studies the spectral properties of the Hamiltonian H and the problem of asymptotic completeness for the quantum mechanical three body problem in n-dimensional space (with $n \geq 3$) with pair potentials that decrease at infinity like $|x|^{-(2+\varepsilon)}$. The basic tool consists of the Faddeev equations, in a suitably modified form. In contrast with Faddeev, however, one works in configuration space and uses only Hilbert space methods, in particular Kato's theory of smooth operators, and Agmon's a priori estimates in weighted Hilbert spaces. Most of Faddeev's results are recovered. In particular, the negative spectrum of H besides the expected absolutely continuous part, consists of isolated eigenvalues of finite multiplicities which can accumulate at most at zero and at the twobody thresholds from below. The positive singular spectrum is contained in a closed set of measure zero, and the wave operators are asymptotically complete. (The talk is based on joint work with M. Moulin).

Jean Ginibre
Université de Paris Sud (Orsay).

Asymptotic Wave Functions. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open connected set whose complement is bounded. Let $A = -\Delta$, the negative Laplacian, acting on the domain $D(A) = L_2(\Omega) \cap \{u : \nabla u \text{ and } \Delta u \text{ are in } L_2(\Omega) \text{ and } u \text{ satisfies the Dirichlet or Neumann boundary condition}\}$ where $\nabla u = (D_1 u, \dots, D_n u)$. Then A is selfadjoint and $A \geq 0$. Let $A^{1/2} \geq 0$ be the positive square root of A. The wave functions

$$v(t,\cdot) = e^{-itA^{1/2}} h, \quad h \in L_2(\Omega)$$

are considered. They are solutions in $L_2(\Omega)$ of the d'Alembert wave equation

$$D_t^2 v + A v = 0.$$

It is shown that there is a unique asymptotic wave function

$$v^\infty(t,x) = \frac{F(|x|-t, x/|x|)}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}$$

such ~~that~~

$$\lim_{t\to\infty} \| v(t,\cdot) - v^\infty(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} = 0.$$

The wave profile is given by

$$F(r,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty e^{ir\rho}\, \hat{h}_-(\rho\eta)(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} d\rho, \quad r \in \mathbb{R}, \ \eta \in S^{n-1}$$

where $\hat{h}_-(p)$ is the generalized Fourier transform of h, defined by

$$\hat{h}_-(p) = \underset{M\to\infty}{L_2(\mathbb{R}^n)\text{-}\lim} \int_{\Omega\cap\{x:\,|x|\le M\}} \overline{w_-(x,p)}\, h(x)\, dx$$

where $w_-(x,p)$ is the "incoming" distorted plane wave for A and Ω, defined by

$$(\Delta + |p|^2)\, w_-(x,p) = 0 \quad \text{for all } x \in \Omega,\ p \in \mathbb{R}^n$$

$w_-(x,p)$ satisfies the boundary condition

$w_-(x,p) - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ix\cdot p}$ satisfies the incoming Radiation condition of Sommerfed.

Calvin H. Wilcox
University of Utah

Connectivity and Spectral Theory

For Schrödinger operators one expects the ground state wave function to be strictly positive and hence the lowest eigenvalue to be of multiplicity one. However one can imagine that a positive singularity on a surface could form a barrier which would decouple regions and allow higher multiplicity. The main theorem gives conditions which rule out the possibility of decoupling.

The proper formulation of the theorem was given by Professor Barry Simon at the conference. For convenience we state it for the case when the potential energy function V is positive. There is a closed set K such that V is L^1 locally on the complement of K. The first condition is that K is of measure zero. This assures that the form sum $-\Delta + V$ is a self-adjoint operator acting in L^2. The second condition is that the complement of K is connected. The conclusion is that the ground state eigenfunction of $-\Delta + V$ is strictly positive.

The technique is to show that $(-\Delta + V + c)^{-1}$ satisfies the hypotheses of the Perron-Frobenius theorem. A perturbation lemma reduces this to showing that $(-\Delta_1 + c)^{-1}$ satisfies the hypotheses, where Δ_1 is the Laplace operator with boundary conditions on K.

William Faris
Battelle Geneva

The exterior problem in scattering theory for Schrödinger operators with coulomb like potential.

I deal with the Schrödinger operator $H = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x)$ where α a real number (arbitrary) and p is a real function which a short range, and satisfies the assumptions in P. Alsholm and G. Schmidt's paper, essentially that is $\int |p(x)| \{|x-y|^{\frac{n-1}{2}} + |x-y|^{n-2}\} dx$ is bounded and goes to 0 when $y \to \infty$. This operator H is acting in the Hilbert space $L^2(\Omega)$, with domain $D(H) = \{u \in H^2(\Omega) : \sigma u = 0 \text{ on } \Gamma\}$ where Ω is the complement of some compact subset with boundary Γ, and σ is a boundary operator such Robin or Dirichlet – H is a self adjoint operator when p satisfies standard conditions.
First, we obtain a slight generalization of KATO's Uniqueness Theorem – This generalization insures that every out going solution of $(H - k^2) u(x) = 0$, with $k>0$, is $\equiv 0$.
We construct two familes of generalized eigenfunction $\varphi_\pm(x,\xi)$ of H, which are in $H^2_{loc}(\bar\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$
We obtain, then, a spectral representation of H i.e. if we define

$$(\mathcal{F}_\pm f)(\xi) = \lim_{N\to\infty} \int_{x\in\Omega, |x|\le N} \overline{\varphi_\pm(x,\xi)}\, f(x)\, dx \qquad f \in L^2(\Omega)$$

we have

$$\mathcal{F}_\pm H_{ac} \mathcal{F}_\pm^* = |\cdot|^2 \quad \text{where } H_{ac} = E(0,+\infty) L^2(\Omega)$$

E is the spectral measure of H.
We prove also that the wave operators $W_\pm = \lim R J e^{itH} e^{-itH_\alpha} E_\alpha$ exist if $(1+|x|)^{-(n/2-1)+\varepsilon} p \in L^2(R^n)$ for some $\varepsilon > 0$ and we get that

$$W_\pm = \mathcal{F}_\pm^* \mathcal{F}_\alpha$$

so the wave operators are complete – Here $H_\alpha = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$ on $D(H_\alpha) = H^2(R^n)$ and E_α is its spectral measure.

H. Zizi (Université PARIS NORD – S^t DENIS)

Some existence results for wave operators

The existence of wave operators is proved for the case where the unperturbed operator is the operator of multiplication by a smooth function in momentum space and the perturbation is an arbitrary operator satisfying a fall-off condition near infinity or a weighted L_p-estimate in configuration space. Finally a theorem

(to be continued →)

The Scattering Operator of the Linear Boltzmann Operator.

Let T be the collision free linear Boltzmann operator in the Banach lattice $L^1(R^6)$ and let H be a pertubation of T which describes a pure scattering process.
The main properties of the Møller-operators are described and the existence of the scattering operator is proved.

Wilhelm Schappacher
University of GRAZ / Austria.

Continuation:

is proved on continuous dependence of wave operators considered as functions of both perturbed and unperturbed operators, provided a uniform control of Cook's estimate is available. As an application the existence of the non-relativistic limit for the wave operator for the Dirac equation is proved

K. Veselić, Univ. of Zagreb & J. Weidmann, Univ of Frankfurt

Asymptotic Completeness in Two- and Three-Particle Quantum Mechanical Scattering

Asymptotic Completeness is established in three-particle non-relativistic quantum mechanical potential scattering for a large class of two-body potentials $V_{ij}(\underline{x}_{ij})$. The class of potentials is characterized essentially by the $V_{ij}(\underline{x}_{ij})$'s vanishing faster than $|\underline{x}_{ij}|^{-2-\varepsilon}$, $|\underline{x}_{ij}| \to \infty$ and being less singular than $|\underline{x}_{ij}|^{-2+\varepsilon}$ locally, for some $\varepsilon > 0$. Inelastic processes are permissable.

Laurence Thomas
Université de Genève / University of Virginia

Scattering for the Wave Equation in Domains with Cylinders

Let $\Omega \subset R^n$, $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_m$ where Ω_0 is a bounded set, $\Omega_j \cong G_j \times R^+$ are semi-infinite uniform cylinders. Assume that the boundary of the domain Ω is smooth enough for Rellich's compactness theorem to hold. The two-Hilbert space scattering theory is used to study the wave equation in Ω with a homogeneous Dirichlet boundary condition via a study of the corresponding selfadjoint extension H of the Laplacian in Ω. The absolutely continuous part of H is shown to be unitarily equivalent to the direct sum of the selfadjoint Laplace operator with Dirichlet b.c. in each of the cylinders $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$. The point spectrum of H is nowhere dense in the positive real line with a discrete set of (possible) accumulation points. A complete orthonormal set of generalized eigenfunctions for H can be constructed using the limiting absorption principle. William C. Lyford / Uni Stuttgart / U of Utah

Spectral representation for Schrödinger operators with long-range potentials

Let $\mathcal{H} = -\Delta + V(x)$ be the Schrödinger operator in $\mathbb{R}^3$ with a real-valued potential function $V(x)$ which is assumed to satisfy the following conditions: (1) $V(x)$ is smooth, (2) $V(x) = O(r^{-1/2-\delta})$ $(\delta > 0,\ r = |x|)$, (3) $\operatorname{grad} V(x) = O(r^{-3/2-\delta})$, (4) $\Delta_{S_r} V(x) = O(r^{-2-\delta})$, where Δ_{S_r} denotes the Laplace-Beltrami operator acting on the sphere of radius r. Let H be the (unique) self-adjoint realization of $\mathcal{H}$ in the Hilbert space $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$, P the orthogonal projection onto the absolutely continuous subspace $\mathcal{H}_{ac}$ relative to H ($\mathcal{H}_{ac} = P\mathcal{H}$), and H_{ac} the part of H in $\mathcal{H}_{ac}$. Then the following theorem holds.

Theorem There exists a unitary operator $\mathcal{F}$ from $\mathfrak{h}_{ac}$ onto the Hilbert space $L_2((0,\infty); L_2(S))$ ($S = \{x \mid |x|=1\}$) such that for any bounded Borel measurable function φ on $(0,\infty)$ and for any $f \in \mathfrak{h}_{ac}$ one has

$$(\mathcal{F}\varphi(H_{ac})f)(\lambda) = \varphi(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda) \quad \text{for a.e. } \lambda \in (0,\infty).$$

Teruo Ikebe
Department of Mathematics
Kyoto University
Kyoto, JAPAN

Spectral theory for one-parameter groups.

Let X be a Banach space, τ an „appropriate" weak topology on X and $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ a bounded τ-continuous one-parameter group of τ-continuous linear operators on X. There exists a τ-closed linear operator B in X such that $U_t = B^{it}$ in the „Balakrishnan sense." The spectrum of B is either $\mathbb{C}$ or it is included in $\mathbb{R}_+$. (x,y) belongs to the graph of B if $it \longmapsto U_t x$ has a τ-regular extension on $0 \le \operatorname{Re}\alpha \le 1$, whose value in 1 is y.

Let $0<\lambda<+\infty$. For $x\in X$ are equivalent:

1. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{B^n}$ and $\overline{\lim} \|B^n x\|^{\frac{1}{n}} \le \lambda$;
2. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{B^n}$ and $\|B^n x\| \le \lambda^n \|x\|$ for all n;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U_t(x)\,dt = 0$ for $f\in L^1(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\hat{f} \subset (\ln\lambda, +\infty)$, where $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{its}\,dt$;
4. $it \longmapsto \lambda^{-it}\langle U_t(x), \varphi\rangle$ has a bounded regular extension on $\operatorname{Re}\alpha \ge 0$ for all τ-continuous linear form φ on X.

Denote the set of all x with the above properties by $X(0,\lambda]$. Analogously define $X[\lambda,+\infty)$. For $0<\lambda_1\le\lambda_2<+\infty$ denote $X[\lambda_1,\lambda_2] = X(0,\lambda_2]\cap X[\lambda_1,+\infty)$. These spectral subspaces determine uniquely (U_t). B is the τ-closure of $B|_{\bigcup_{0<\lambda_1\le\lambda_2<+\infty} X[\lambda_1,\lambda_2]}$.

For $x\in X(0,1]$ and $x_0 \in X$ are equivalent:

1. $\tau\text{-}\lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} U_t(x)\,dt = x_0$;
2. $\tau\text{-}\lim_{\varepsilon\to\infty} B^{\varepsilon}(x) = x_0$.

If X is a Banach algebra with separately τ-continuous product, U_t are multiplicative and $\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} U_t\, dt\right)_{\varepsilon>0}$ converges to a τ-continuous operator B^∞, then $X(0,1]$ is a τ-closed subalgebra of X and B^∞ is multiplicative on $X(0,1]$. Analogously, $X[1,+\infty)$ is a τ-closed subalgebra on which B^∞ is multiplicative and the τ-closure of $X(0,1]+X[1,+\infty)$ is X.

(Part of the talk is based on a joint work with I. Cioranescu.)

Zsidó László, Inst. de Mat., Calea Griviţei 21, Bucureşti, Romania

An example in potential scattering illustrating the breakdown of asymptotic completeness.

An example was constructed of a local spherically symmetric short-range potential, such that the wave operators for scattering of a single particle by the potential are not complete. Incompleteness is due to the existence of states which at $t=-\infty$ are free particle states and far from the scattering centre, but which have non-zero probability of absorption into the centre at $t=+\infty$.

The absolutely continuous spectrum of the total Hamiltonian is doubly degenerate on a finite interval of the real line, and the total Hamiltonian is semi-bounded. The potential also provides an example of a differential operator $-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$ in a finite interval $[a,b)$, having non-empty absolutely continuous spectrum.

David Pearson, dept de Physique Théorique
Université de Genève.

Scattering for Schrödinger operators with time-dependent potential

The work to be reported here was done in cooperation with Mr. H. Morita. We consider the following Schrödinger equation with a potential term depending on t:

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = -\Delta u(x,t) + q\left(\frac{x}{t^{\alpha}}\right)u(x,t),$$
$$x \in R^n,\ t > 1,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

We are interested in the asymptotic behavior of $u(x,t)$ as $t \to \infty$. The situation would be different for $\alpha > 1$ and $\alpha < 1$. Indeed, ~~the~~ a classical free particle travels as $x = tp$, so that if $\alpha < 1$ it has a good chance to escape from the slowly expanding potential, while if $\alpha > 1$ its energy may be pushed up by the amount $q(0)$ due to the effect of quickly expanding potential. Thus, the asymptotic motion may be described by $-\Delta$ or $-\Delta + q(0)$ according as $\alpha < 1$ or $\alpha > 1$.

We consider this problem from the viewpoint of wave operators and try to find out some sufficient conditions in order that wave operators exist and possibly are complete. It would be interesting to deal with the case $\alpha = 1$, but we have not done anything in this case. Incidentally, I would like to record an attractive name, proposed by Barry Simon, for the case $\alpha = 1$. It is "surfboard problem".

S. T. Kuroda
Univ. of Tokyo

Kategorien

4.8. – 10.8.74

Low dimensional cohomology of topoi.

There is a well known interpretation of one dimensional cohomology, $H^1(\mathcal{E}, G)$, of a topos $\mathcal{E}$ with coefficients in a group G of $\mathcal{E}$, in terms of G-torsors. An attempt to rewrite some of the work of Giraud in 'Cohomologie non-abélienne' in elementary terms leads one to search for an interpretation of $H^2(\mathcal{E}, A)$, for A an abelian group in $\mathcal{E}$, in terms of "A-extensions" of $\mathcal{E}$.

Diaconescu's theorem tells us that the functor $\mathrm{cat}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}\text{-top} : \underline{A} \mapsto \mathcal{E}^{\underline{A}}$ from category objects in $\mathcal{E}$ to $\mathcal{E}$-topoi, preserves products. If A is an abelian group, thought of as a category with one object, then A is an abelian group object in $\mathrm{cat}(\mathcal{E})$. So $\mathcal{E}^A$ is an abelian group object in $\mathcal{E}$-top. We may consider $\mathcal{E}$-topoi with $\mathcal{E}^A$-action, $\mathcal{E}^A$-equivariant maps of $\mathcal{E}$-topoi with $\mathcal{E}^A$-action etc. Let $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ be two $\mathcal{E}$-topoi with $\mathcal{E}^A$-action; we say they are locally equivariantly isomorphic if there exists $K \twoheadrightarrow 1$ in $\mathcal{E}$ and an equivariant isomorphism $\mathcal{F}_1/K \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_2/K$ of $\mathcal{E}/K$-Topoi. Multiplication in A makes $\mathcal{E}^A$ into an $\mathcal{E}$-Topos with $\mathcal{E}^A$-action in a canonical way. An A-extension of $\mathcal{E}$ is an $\mathcal{E}$-topos $\mathcal{F}$ with $\mathcal{E}^A$-action which is locally equivariantly isomorphic to $\mathcal{E}^A$. Let $\mathrm{EXT}_{\mathcal{E}}(A)$ denote category of A-extensions of $\mathcal{E}$ and $\mathcal{E}^A$-equivariant maps of $\mathcal{E}$-topoi, and let $\pi_0 \mathrm{EXT}_{\mathcal{E}}(A)$ denote its class of connected components.

A-extensions of $\mathcal{E}$ have many formal similarities with torsors. For example, $\mathrm{EXT}_{\mathcal{E}}(A)$ is a groupoid, $\pi_0 \mathrm{EXT}_{\mathcal{E}}(A)$ is an abelian group, and is functorial in both A and $\mathcal{E}$. It is conjectured that $H^2(\mathcal{E}, A)$ and $\pi_0 \mathrm{EXT}_{\mathcal{E}}(A)$ are isomorphic; it only remains to prove that $\pi_0 \mathrm{EXT}_{\mathcal{E}}(A)$ is an effaceable functor. Assuming the conjecture, we get the following result, generalizing a well known result in the cohomology of groups: let $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ be an A-extension representing $\alpha \in H^2(\mathcal{E}, A)$; then a geometric morphism $\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ factors through p

if and only if α is taken to zero in the homomorphism

$$H^2(\mathcal{E},A) \longrightarrow H^2(\mathcal{E}', f^*A) .$$

Problem: is the functor $EXT_{\mathcal{E}}(A)$ representable? i.e does there exist an $\mathcal{E}$-topos $\mathbb{K}(A,2)$ with a universal A-extension, so that

$$EXT_{\mathcal{E}}(A) \simeq \mathcal{E}\text{-top}(\mathcal{E}, \mathbb{K}(A,2)) \;?$$

G. C. Wraith

University of Sussex.

Ultrafilters, ultrapowers and finiteness in a topos

An internal ultrafilter on an object X in a topos $\underline{E}$ is a Heyting algebra morphism $u: \Omega^X \to \Omega$ with $u\,\Omega^{!X} = \Omega$. The ultrapower $A^X /\!/ u$ of A with respect to the filter u is the quotient of $\tilde{A}^X_{|u}$, the object of partial morphisms from X to A with domain in u, obtained by identifying two morphisms if they agree on a subobject in the filter u. $A^X/\!/u$ can also be regarded as the internal colimit of the partial powers A^K with K in u. If the internal axiom of choice holds in $\underline{E}$ then $(-)^X/\!/u$ is a first order functor (left exact, preserves propositional operations and quantification). The class of objects on which every ultrafilter is principal contains Ω and is closed under finite limits. Similarly, the subclass of objects which are isomorphic to all their ultrapowers contains Ω and is closed under finite limits and coproducts.

Jengo Volger

Double categories as a 2-topos

Our aim is to find some axioms for the elementary theory of the 2-category of all categories strong enough for the natural development of category theory and yet weak enough to be closed under the process of taking internal category objects. If we call such a structure a 2-topos, the category objects in a 2-topos should be a 2-topos. The main concept we wish to axiomatize is that of internally cocomplete object which classifies a class of arrows in the 2-category.

An object Ω of a finitely 2-complete 2-category $\mathcal{K}$ is called an ideal classifier when there is an internal functor $\Omega \to \mathcal{K}$ such that: IC1. the 2-functor "join": $\mathcal{K}/\ulcorner\Omega\urcorner \to \mathcal{K}$ has a right 2-adjoint; IC2. for each object B, "composition" with $\Omega \to \mathcal{K}$ gives a fully faithful functor $\mathcal{K}(B,\Omega) \to [B,\mathcal{K}]$ (the latter denotes the category of internal functors from B to $\mathcal{K}$). A great deal of category theory can be developed in a $\mathcal{K}$ with such an Ω. Call $\mathcal{K}$ with such an Ω a 2-topos when each identity arrow is an ideal, ideals are closed under composition and cotensoring with $\mathbf{2}$ in $[B,\mathcal{K}]$ (ideals being internal functors in the image of $\mathcal{K}(B,\Omega) \to [B,\mathcal{K}]$).

The basic example is $\mathcal{K} = \mathcal{CAT}$, $\Omega = \mathcal{C}at$ (large letters for large categories, small for small). If our ~~ded~~ aim to have $\mathcal{C}at(\mathcal{K})$ also ~~viato~~ to be a 2-topos is to be realized, it should be true for this example. In fact, $\mathcal{DBL} = \mathcal{C}at(\mathcal{CAT})$ is the 2-category of double categories, and in my lecture I exposed the way in which double categories form a 2-topos. //

Ross H. Street

CATEGORIES OF GAMES

Two-person games of the sort considered in mathematical logic (e.g. in the axiom of determinacy) are the objects of a category $\underline{G}$ whose morphisms from A to B are, roughly speaking, strategies enabling player 1 to win B if he is shown how to win A. This category has arbitrary products but not coproducts; a natural modification allowing coproducts leads to the free category, with ~~of~~ arbitrary products and coproducts, on no generators. $\underline{G}$ is (symmetric monoidal) closed, but the tensor product differs from the cartesian product (a difference related to the difference between classical and intuitionistic disjunction). The Kleisli category $\underline{W}$ of a certain cotriple in $\underline{G}$ is cartesian closed and may be described in terms of games, just like $\underline{G}$ except that there is a different (and perhaps more natural) interpretation of what it means that player 1 is "shown how to win A."

Andreas Blass

FROM TYPES TO SETS

Dogmas are related to Lawvere's hyperdoctrines and Volger's logical categories, as well as to the languages of Bénabou, Coste and Fourman. They are categories with finite products with a specified object Ω which admits arbitrary exponents. Moreover, Ω is a Heyting algebra object and the canonical morphism $\Omega \to \Omega^A$ has a right adjoint $\forall_A$ and a left adjoint $\exists_A$. Finally, one postulates extensionality. The point of a dogma is that it permits set abstraction (as a special case of λ-conversion): given any "propositional function" $\varphi(x): 1 \to \Omega$ in the indeterminate $x: 1 \to A$, there exists a unique morphism $f: A \to \Omega$ (not depending on x) such that $fx = \varphi(x)$, its "name" $1 \to \Omega^A$ is written $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$. Moreover, all sentences of set theory involving constants from the dogma $\mathcal{A}$ appear as "propositions" $1 \to \Omega$ in $\mathcal{A}$. Each dogma canonically generates a topos of "sets" and "functions". This result is due to Volger; in fact, dogmas are his closed logical categories. It allows one to regard toposes as forming a reflective subcategory of dogmas.

Jim Lambek.

Algebraic Obstruction Theory and Non-Abelian Cohomology

(Proc. Nat. Acad. Sci USA June 1974)

Using a recently developed simplicial interpretation (in all dimensions) of "triple" cohomology it is possible to define an "algebraic obstruction theory" which in dimension 2 allows one to recover the traditional method of "obstructions to the existence of 'non-abelian' extensions". It has been this latter method which has provided, up until now, the only generally known means for the interpretation of the 3-dimensional groups of the classical theories. An interesting application of this new theory is the "obstruction reduction" of Dedecker's 2-dimensional non-abelian theory for groups to the 3-dimensional abelian theory of ~~[illegible]~~ Eilenberg-MacLane.

J. Duskin Jr. (Aug 1974)

Linear algebra and projective geometry in the Zariski topos.

We consider a topos $\underline{E}$ with a commutative ring object which is a field object in the sense that it satisfies (in the internal sense) that for each n

$$\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = 0\right) \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \text{ is invertible})$$

and

$$\neg(1=0).$$

The universal local ring in the Zariski topos $\mathcal{Z}$ satisfies this. These axioms permit standard linear algebra to be developped in $\underline{E}$ w.r.to R:

Thm For any matrix $\underline{\underline{A}}$, row-rank $(\underline{\underline{A}})$ = column-rank $(\underline{\underline{A}})$ = determinant rank $(\underline{\underline{A}})$. and therefore the projective plane (say) constructed as in sets. It satisfies some of the synthetic (combinatorial) properties of projective geometry (again 'satisfaction' in the internal sense), for instance Pappos Thm. By using the universality of the Zariski-topos for local rings, the theorems transfer to sets to the usual theorems by considering the ring $\mathbb{R}$ (the reals) and to theorems of line geometry by considering $\mathbb{R}[\varepsilon]$ ($\varepsilon^2=0$). This is a sort of explanation of Study's Transfer Principle (Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903).

Anders Kock

A simple definition of a shape category S_K for any functor K was given plus some elementary properties of such shape categories. A chain of arguments was used to show that Borsuk's shape category is equivalent to S_K for a particular functor K. Most of the work involved in making this talk possible was due to others, in particular to Borsuk, Mardešić, Segal, Levin, Milnor, Lee, Raymond and Hilton. More details will appear in proceedings of this meeting.

John MacDonald

Cohomologie non-abélienne et homotopie

On donne une interprétation homotopique de la cohomologie non-abélienne de Giraud. Le concept de champ est étendu au cas simplicial et donne le concept de complexe de Kan saturé. La cohomologie de Grothendieck peut alors se définir par

$$H^n(X,\pi) = \pi_0(\mathrm{Hom}_S(X, \widetilde{K(\pi,n)}))$$

où $\widetilde{K(\pi,n)}$ désigne le complexe saturé associé au complexe ordinaire $K(\pi,n)$. La cohomologie non abélienne en dimension 2 peut s'obtenir par la la considération du complexe $\widetilde{K[\pi,2]}$ associé à un 2-groupoïde π.

André Joyal

Report on the work of Isbell and Semadeni, and other folklore.

1. How to make $1 \cong 2$, hence $n = n+1$ in a Kleisli extension of $\mathcal{S}$ ($n \in \mathbb{N}$); and how also to make $n \cong k$ for arbitrary sets n and k, in the same way.

2. $[(a \leftrightarrow b) \wedge c] \vee [(b \leftrightarrow c) \wedge a] \vee [(c \leftrightarrow a) \wedge b]$ is a Malcev op'n for Heyting Algebras

3. Isbell shows nullary 1, unary $(-1)\cdot -$ and conditional doubling $\tilde{2}\cdot = (-1) \vee (2\cdot - \wedge 1)$, multiplication (binary) and infinitary $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\,)_i}{2^i}$ generate the operations on $C(X)$'s.

4. Deflating a pet balloon of Semadeni, the following is an algebra over the $\mathcal{D}\ell_1$ triple resulting from $\mathrm{Ban} \underset{\ell_1}{\overset{\mathrm{Disc}}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}ns$: $\boxed{\underset{-1}{:}\quad \underset{0}{:}\quad \underset{+1}{:}}$.

F.E.J. Linton

A Categorical Problem in Group Duality

In the course of investigations into the superselection structure of elementary particle physics symmetric monoidal categories $\mathcal{J}$ arise which apparently have the same abstract structure as the category $\mathcal{U}(G)$ of finite-dimensional continuous unitary representations of a compact group G. To show that $\mathcal{J}$ does correspond to some compact group it would suffice to show that $\mathcal{J}$ admits a monoidal embedding into the category of Hilbert spaces. This amounts to showing that a certain 3-cocycle in a non-Abelian cohomology theory is a 3-coboundary. In the language of physicists one must find a set of 3-j symbols from which the 6-j symbols of $\mathcal{J}$ can be computed. G would be the gauge group

John Roberts

TRADUCTION EQUATIONNELLE DE NOTIONS ENSEMBLISTES.

On rappelle d'abord le concept de monade involutive dont le prototype est la monade $\Omega^{(-)}$ dans Ens ou un topos. Puis on indique ce que l'on entend par équations de structures dans un tel contexte, et on montre que les structures usuelles (ordres, congruences, ens. pointés, filtres, compacts topologiques, etc...) admettent des définitions sous forme de telles équations; la recherche des modèles d'une théorie internes à une catégorie devient alors une résolution d'équations. Ceci s'applique en particulier aux logiques multivalentes et au changement de logique de base dans la formulation d'une théorie.

René Guitart

Full embeddings of categories.

~~the~~ A full embedding of Set^{op} (or compact spaces, or compact abelian groups) into any category of algebras with rank implies a weakened form of the axiom of non-existence of measurable cardinals. (Kučera, Pultr J. of Pure and Appl. Alg 1971). Conversely, under that axiom (M), any concrete category is fully embeddable into ~~any~~ any binding category, (Kučera, Hedrlín), e.g. into semigroups (Hedrlín, Lambek), rings (Sichler) etc.

Using locally compact semigroups instead of discrete ones, the above mentioned set-theoretical assumption is not necessary for the construction of a full embedding of any concrete category into l.c. semigroups.

Finaly, under (M) any (not necessarily concrete) category is fully embeddable into a category which is a factorization of ~~any~~ some binding category (e.g. semigroups ~~under the axiom (M)~~) by simultaneous use of two equivalentions on underlying sets of objects. (As above, ~~(?)~~ it can be used a topology on semigroups instead of the assumption (M)).

Luděk Kučera

Model-theoretic methods in the theory of topoi

We develop the connections between topos and certain first-order theories which we call coherent. Every coherent topos is the classifying topos for some coherent theory. Model theoretic methods are used to ~~show~~ reduce the classification problem from all topos to ~~that~~ ~~of~~ Sets. Some applications are given (Zariski, étale topos)

A completeness theorem for these theories, together with ~~t~~ the method of diagrams of Robinson-Tarski allows us to obtain ~~-~~ some new and old results in a uniform manner (Deligne's thm, Robinson's enlargements, completeness thms for intuitionistic pretopos, etc).

An infinitary generalization of this completeness theorem is given. As a corollary we obtain Barr's thm (on existence of Boolean points for topoi) and some new completeness theorem for infinitary intuitionistic logic(!).

Gonzalo E. Reyes (in collaboration with Michael Makkai)

An Application of Category to Model Theory

If $\mathcal{T}$ is an elementary one-sorted finitary theory and $\mathfrak{C}_{\mathcal{T}}$ is the category whose objects are the models of $\mathcal{T}$ and whose morphisms are the maps which preserve the atomic formulas of the language for $\mathcal{T}$, then we say that $\mathfrak{C}_{\mathcal{T}}$ admits the standard construction for products and equalizers if $\mathfrak{C}_{\mathcal{T}}$ is complete and:

$$(1)\quad \widehat{A}\Big(\prod_{\alpha<\beta} M_\alpha\Big) = \prod_{\alpha<\beta}\big(\widehat{A}(M_\alpha)\big)$$

$$(2)\quad \widehat{A}(Eq(x,y)) = Eq(\widehat{A}(x,y))$$

for every atomic formula $A(\vec{x})$ in the language for $\mathcal{T}$. Such theories can be characterized syntactically and such categories of models can be characterized categorically.

O. Keane

Extension of full embeddings and binding categories

Given categories M, A and C and full and faithful functors $K: M \to C$ and $T: M \to A$ there is a question whether it can be found a full and faithful functor $S: C \to A$ such that $SK = T$. Under some restrictive suppositions it can be constructed a functor $L^{*}_{K}(T): C \to A$ which is full and faithful whenever a full and faithful extension S of T exists. Further, this functor has, under some restrictions again, the left Kan extension property among full and faithful functors. Conditions making $L^{*}_{K}(T)$ to be full and faithful can be given.

A category is binding if any monadic category with rank can be fully embedded into into. Under a set assumption of non-existence of too many measurable cardinals any concrete category can be fully embedded into a binding category (Trnková, Hedrlín) using the functor $L^*_\alpha(T)$ it can be proved the following result: For any regular infinite cardinal α there is a three-object category Γ_α full embeddability of which into a monadic category A with rank smaller than α make A to be binding.

Jiří Rosický

Monadic functors and convexity.

The strengthened version of the well-known Theorem of Linton is used to the proof that the forgetful functor U: Compconv $\longrightarrow$ Comp is monadic. The above result gives a simple axiomatic characterization of the centroid of a probability measure on a compact space. On the other hand the forgetful functor U: Conv $\longrightarrow$ Ens is not monadic. The convex structure on a set is determined by an infinite family of binary operations satisfying 4 simple axioms. 3 axioms are of an equational type, 1 is not.

Tadeusz Świrszcz

Automata and Systems in a Hyperdoctrine

The hyperdoctrine of set-valued functors over small categories provides a logical formalism with applications in automata and system theory. A simple formulation of minimal realization theory for sequential machines, linear systems and algebra automata is possible using the quantification of this hyperdoctrine. The comprehension schema provides the connection between actions and their state graphs. Profunctors can be assigned to systems in such a way that arbitrary system interconnections including feedback can be represented by existential quantification (coends) of component profunctors. Automata, appropriately construed, have an interconnection theory dual to that of systems. This can also be expressed by profunctors. This provides a deductive calculus for automaton and system homomorphism.

Stewart Bainbridge

(E, M)-universally topological functors

Let E be a class of epimorphisms in a category $\underline{D}$, and let M be a class of (projective) cones ("sources") indexed by a $\underline{\mathcal{U}}$-small set ($\emptyset$ is admitted!) : (E, M) is said to be a factorization of cones (H. Herrlich) in $\underline{D}$, iff 1. every (projective) cone factors over an E-morphism and an M-cone, 2. (E, M) fulfills the "diagonal condition", 3. $\underline{D}$ is E-cowellpowered. Weakening the concept of topological functor $T : \underline{A} \to D$ H. Herrlich has introduced (E, M)-topological functors (cf. author's talk at the 1972 meeting and Herrlich's talk in 1973).

The "canonical" extension of an (E, M)-top. functor to a top. functor has a universal property (whereby it is "uniquely" determined"). An inner characterization of these extensions (called "(E, M)-universally top. functors") is given, in particular the inducing (E, M)-top functor is "reconstructed from its "extension" (i.e. "extension" is – in a sense – "injective") : these procedure nicely reflects categorically the known properties of the T_0-quotient of a given topological space. Furthermore every set-valued top.-functor (which is represented by a terminal object has a "best approximation" by an (E, M)-universally top. functor (as an example

consider Wyler's "saturation" for convergence spaces).
Some interesting examples are obtained

Rudolf-E. Hoffmann
9.8.74

An informal diskussion about different logical tools in topoi

The internal language of a topos was explained and two interpretations were given. The main result was that both interpretations coincide. Applications and further results were briefly mentioned and lively discussed with the audience.

Gerhard Osius

Cohomologie non abélienne à coefficients dans une 2-catégorie

Soit $\mathcal{X}$ une catégorie et $\underline{\underline{A}}$ une 2-catégorie. La catégorie des 1-cocycles est $\mathrm{Cat}(\mathcal{X}, \underline{\underline{A}}_{02})$. Un 2-cocycle est un triple (f, a, c) : $f : \mathcal{X}_0 \to \underline{\underline{A}}_0$, $a : \mathcal{X}_1 \to \underline{\underline{A}}_1$, $c : \mathcal{X}_1 \times_{\mathcal{X}_0} \mathcal{X}_1 \to \underline{\underline{A}}_2$, c mesurant l'écart à la ~~bi...~~ fonctorialité de a ; outre la condition de normalisation, la condition de 2-cocycle exprime l'associativité de c. On définit les morphismes de 2-cocycles.

Si $\underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{A}} \to \underline{\underline{B}}$ est une s.e. de 2-catégories (avec $\underline{\underline{C}}_0 = \underline{\underline{A}}_0 = \underline{\underline{B}}_0$ et $\underline{\underline{C}}_{01} = \underline{\underline{A}}_{01}$) $\underline{\underline{A}}$ op fibrée par les 2-flèches, on obtient une suite 6-exacte d'éléments de 1 et 2-cohomologie pour chaque foncteur $G : \mathcal{X} \to \underline{\underline{A}}_{01}$.

Ceci, outre le cas des coefficients groupes abéliens [illegible], contient le cas particulier de la théorie de Dedecker à coefficients dans un groupe croisé.

René Lavendhomme

Doctrines on 2-Categories

Doctrines $\mathbb{D}$ are 2-triples "up to isomorphism".
A quasi-idempotent doctrine has multiplication right-adjoint to unit. These special doctrines, their algebras and homomorphisms can be presented in

an almost coherence-free manner by a "base" (i.e. 16 of 19 coherence-conditions can be eliminated). Examples are product- or the more complicated limit-doctrines on the 2-category of categories. Its algebras are the categories with products or limits. To get limit doctrines one has to use calculus of fractions applied to final (= cofinal) functors between indexcategories over a category $\underline{X}$. Then $D\underline{X}$ is the category of fractions and $D\underline{X}$ is equivalent to the Gabriel-Ulmer completion of $\underline{X}$.

Volker Zöberlein

Operations Research 11.8.–17.8.74

Optimierungsaufgaben zur Reinerhaltung der Luft.

In diesem Vortrag beschäftigen wir uns mit denen Optimierungsproblemen, die mit der Bestimmung und Durchführung eines Programms für Aufrechthaltung von guter Luftqualität verbunden sind. Verschiedene Preferenzfunktionen, wie die totale Immissionsbelastung, die maximale Konzentration im schlimmsten Punkt, die totalen Kosten für Emissionsbeschränkungen usw. können angegeben werden. Mathematische Modelle, die die Relationen zwischen Emissionen und Luftqualität angeben, sind aufgestellt worden. Deshalb kann man diejenige Regelungsstrategie ausrechnen, die eine gegebene Preferenzfunktion optimiert, was doch eine nicht-triviale Aufgabe ist. Die berechneten Werte müssen mit gemessenen Daten verglichen werden, um die Gültigkeit des Modells und des Verfahrens zu bestätigen. Die Wahl von Messpunkten kann natürlich auch in irgendwelchen Sinne optimal gemacht werden.

Sven-Ake Gustafson

Maximale Netzwerkflüsse mit Kantengewinnen

Es werden eine graphentheoretische Charakterisierung maximaler Flüsse in Netzwerken mit Kantengewinnen und Kapazitätsbeschränkungen angegeben und ein endlicher Algorithmus entwickelt, der im Wesentlichen wiederholt lediglich Lösung zweier Grundaufgaben, nämlich Bestimmung "negativer" Zyklen und "kürzester" Wege, erfordert

Reiner Horst

Invariante Kegel homogener Abbildungen

Für homogene Abbildungen H des $\mathbb{R}^n_+$ in sich werden Kegel K(x) betrachtet, die achsialsymmetrisch mit kleiner Öffnung um den Vektor x gelegt werden, x Eigenvektor von H. Für semipositive Matrizen werden hinreichende Bedingungen für $H[K(x)] \subseteq K(x)$ angegeben. Für homogene Abbildungen werden hinreichende ~~Aussagen~~ Bedingungen angegeben für: Für jeden Kegel K(x) existiert ein $K^*(x)$, sodaß $H^m[K^*(x)] \subseteq K(x)$, $m \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe der Kegel lassen sich Stabilitätsaussagen über den ~~des~~ Eigenvektor geometrisch interpretieren.

Richard Vahrenkamp

Eine dynamische Version der Formel von ROBINSON-AMOROSO

Ausgehend vom statischen Problem der Optimierung von Gewinn $pS - c(S)$ bei einer gegebenen Nachfragefunktion $S = N(p)$ als Nebenbedingung wird man auf die bekannten dynamischen Nachfragerelationen unter Einbeziehung preispolitischer Aktionsparameter geführt, die alle eine ähnliche Struktur zeigen. Die optimale Preisstrategie als Lösung eines Kontrollproblems führt auf eine dynamische Verallgemeinerung der Formel von Robinson-Amoroso. Nach der ökonomischen Interpretation der Dualvariablen als diskontierter Goodwill wird die optimale Preispolitik nach Eigenschaften der Nachfragerelation qualitativ charakterisiert.

Klaus Spremann
Universität Karlsruhe

Generalität und Lösungskonzepte kooperativer Spiele

Im OR spielen Methoden der konvexen Analysis eine zentrale Rolle, in der Gleichgewichtstheorie u.a. nicht.

Für die kooperative Spieltheorie, die als zwischen beiden angesiedelt betrachtet werden kann, ist die Frage zu prüfen, ob die Untersuchung extremaler Spiele sinnvoll ist und bzgl. der Existenz und Struktur gewisser Lösungskonzepte Ergebnisse liefert. Benutzt werden Resultate einer Art „Darstellungstheorie": jedes konvexe Spiel ist „max" über affine Spiele („verallgemeinerte Produktion"), jedes superadditive Spiel ist „max" über Abstimmungsspiele („verallgemeinerte Abstimmung"). Gestützt auf diese Darstellungen kann man Extremalpunktstheorie betreiben. Es stellt sich heraus, daß Extremalität sogar „sozial" interpretiert werden kann in dem Sinne, daß extremal konvexe Spiele Core-Auszahlungen zulassen, die „Klasseneinteilungen" der Spieler definieren. Extremale superadditive Spiele lassen entsprechend stabile Mengen (v-Neumann-Morgenstern-Lösungen) zu, die von ähnlicher Gestalt sind und also „Klassengesellschaften" ergeben, also „sozial extrem" sind. Kennzeichen für Extremalität ist in beiden Fällen „Nichtdegeneration" der vermöge der Darstellungstheorie durch das Spiel charakterisierten „darstellenden Maße". Nichtdegeneration wiederum kann zurückgeführt werden auf Probleme der elementaren Zahlentheorie und des ganzzahligen Programmierens — hierfür können Lösungen zumindest teilweise angegeben werden.

J. Rosenmüller, Karlsruhe

Spiele mit abzählbarem Baum

Bei extensiven Zweipersonennullsummenspielen mit abzählbarem Baum X läßt sich die Menge der Partien S auf kanonische Weise metrisieren. Verfügt der Spieler 2 in jeder Position $x \in X$ nur über endlich viele Alternativen (für Spieler 1 und Spieler 0, den „Zufall", sind abzählbar viele Alternativen zugelassen), und ist die Auszahlungsfunktion fast sicher nach unten halbstetig und beschränkt auf S, so ist die gemischte Erweiterung der Normalform dieses Spiels definit. Im Falle vollständiger Erinnerung gilt auch hier der Satz von Kuhn über die Äquivalenz von gemischten und Verhaltensstrategien. Anwendungen auf Stopspiele, Gewinn-Verlust-Spiele und Spiele mit Zwischenzahlungen wurden aufgezeigt und die Möglichkeit einer Verallgemeinerung auf n-Personenspiele angedeutet. Jürgen Kindler

Existenz eines Gleichgewichts in einem Ökonomie-Modell mit nichtstetigen Präferenzen. – Im Debreu'schen Beweis für die Existenz eines Gleichgewichts in einer Privat-Eigentum-Ökonomie mit endlich vielen Konsumenten, Produzenten und Waren spielt die Annahme stetiger Präferenzen, die letztlich die Existenz stetiger Nutzenfktn impliziert, eine wichtige beweistechnische Rolle. Da die Stetigkeit für die Gleichgewichtsexistenz nicht notwendig ist, kann man fragen, ob bei nichtstetigen Präferenzen Gleichgewichtsaussagen noch möglich sind. Ersetzt man die Stetigkeitsforderung durch eine als Nutzen-Trennungs-Eigenschaft zu ~~ersetzende~~ bezeichnende Bedingung ($x_1 \prec x_2 \Rightarrow \exists \tilde{x} \gg x_1 \wedge \tilde{x} \precsim x_2$ und $x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \notin \mathrm{Rd}\, X_i \Rightarrow \exists \hat{\tilde{x}} \ll x_2 \wedge x_1 \precsim \hat{\tilde{x}}$), dann können bei ansonsten strikt monotonen, schwach-konvexen Präferenzen "Unstetigkeitspkte" der Präferenz auftreten. Die Oben-Halbstetigkeit der Nachfrage-Korrespondenzen ist i.a. nicht mehr erfüllt. Sie gilt aber unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß Stetigkeitspkte der Präferenz die individuellen Resourcen der Konsumenten nicht überschreiten. Eine ökonomisch plausible

Zusatzbedingung für die totale Produktionsmenge sichert die Existenz einer geeigneten kompakten und konvexen ~~Zusatzbedingung~~ Teilmenge Q der (aufgrund der strikt monotonen Präferenz) offenen zulässigen Preismenge, so daß mit Hilfe des Debreu'schen Lemmas für die Nachfrage-Überschuß-Korrespondenz in der auf Q beschränkten Ökonomie ein Gleichgewicht bewiesen werden kann, das auch Gleichgewicht der Ökonomie selbst ist.

Manfred Schäl

Ein Ansatz zur axiomatischen Behandlung von Tausch-Prozessen.
Durch ihre charakteristische Funktion gegebene Spiele werden unter der Annahme betrachtet, daß die Spieler gewisse Gewinnvorstellungen haben, die sie während des Tausch-prozesses entwickeln, wobei sie eine Koalition nur dann eingehen, wenn diese ihre Gewinnvorstellungen erfüllt. Zwei Lösungskonzepte für diese Art von Tauschspielen werden vorgestellt und untersucht. Für eine Reihe von Spielen ergeben sich Zusammenhänge mit dem von Horowitz [1973] unter anderem Ansatz definierten "Competitive Bargaining Set". – Wulf Albers

Meßbarkeit stochastischer Optimalwerte.

Es werden nichtlineare stochastische Optimierungsaufgaben im $\mathbb{R}^n$ betrachtet. Unter verschiedenen hinreichenden Bedingungen wird mit elementaren Mitteln jeweils die Meßbarkeit des Optimalwertes (bzgl. des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes) bewiesen – insbesondere für den Fall konvexer Zielfunktion und linearer Restriktionen sowie für konvexe Programme mit nach unten halbstetigen Ziel- und Restriktionsfunktionen.

P. Kall (Zürich) und W. Oettli (Mannheim)

Bayessche Inspektionsplanung bei fernliegendem Planungshorizont.

Der unmittelbare Ansatz zur Lösung eines optimalen Inspektionsproblems bei anfänglich unbekanntem Prozessverhalten beruht bei der Bayesschen Vorgehensweise auf Rückwärtsprogrammieren. Die Struktur des Problems, bei dem Inspektion sowohl der Kontrolle als auch der Beobachtung dient, ermöglicht es ein Verfahren zu entwickeln, das, vom Ansatz gemäß der dynamischen Programmierung ausgehend, ein tatsächliches Rückwärtsprogrammieren vermeidet und dadurch vor allem bei fernliegendem Planungshorizont sich als sehr vorteilhaft erweist.

Während man auf der einen Seite ein bloßes Vorwärtsprogrammieren ermöglicht, büßt man auf der anderen Seite die Optimalität im Sinne der sequentiellen Bayesschen Verfahren ein. Diese wird jedoch im nichtsequentiellen Sinne beibehalten mit dem zusätzlichen Vorteil, daß man dann möglichst schnell zu einer für die dabei verbundenen Kosten möglichst guten Kenntnis über den Prozess gelangt.

Wolfgang Runggaldier, Padova

Einige Bemerkungen zum Satz von CLARK

Möglichkeiten zur Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von CLARK (Amer. Math. Monthly 68, 351-352 (1961)) wurden untersucht.

Ulrich Eckhardt

KFA Jülich

Poissonprozesse als Grenzprozesse in zwei Straßenverkehrsmodellen

Zwei stochastische Modelle für den Ablauf des Fahrzeugverkehrs auf Landstraßen und Autobahnen werden durch analytische Mittel des erzeugenden Funktionals von Punktprozessen beschrieben. Es werden Grenzwertsätze für Cluster-Punktprozesse formuliert und mit deren Hilfe Verkehrsbedingungen charakterisiert, unter denen sich Fahrzeugströme gemäß Poissonprozessen formieren.

Hans D. Unkelbach
(Darmstadt)

Gleichgewicht auf einem Markt mit Geld und Spekulationsgütern

Ein Tauschmarkt mit Geld und Spekulationsgütern (Aktien, Anleihen, Rohstoffe, etc.) wird untersucht. Die Preiserwartungen der Marktteilnehmer hängen von den gegenwärtigen Preisen ab, und die Portefeuilles werden mit Neumannschen Nutzenfunktionen bewertet. Die Existenz eines Gleichgewichts wird nachgewiesen. Anschliessend führt man einen Preismechanismus ein. Für den Fall eines einzigen Spekulationsgutes ergibt sich Systemstabilität, während bei mehreren Spekulationsgütern Gegenbeispiele existieren.

Heinz Müller (Zürich)

Verallgemeinert quasi-lineare Produktionsfunktionen

Zwei der am häufigsten verwendeten Klassen von makroökonomischen Produktionsfunktionen sind die CD-Funktionen

(1) $F(x_1, \ldots, x_n) = c\, x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$. $\quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, c \in \mathbb{R}_{++}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = r)$

und die ACMS-Funktionen

(2) $F(x_1, \ldots, x_n) = (\beta_1 x_1^{-\rho} + \ldots + \beta_n x_n^{-\rho})^{-r/\rho}$ $\quad (\beta_1, \ldots, \beta_n, r \in \mathbb{R}_{++}, \rho \neq 0)$.

Diese beiden Klassen lassen sich charakterisieren durch den

Satz: Die CD-Funktionen (1) und die ACMS-Funktionen (2) sind die einzigen Klassen von verallgemeinert quasi-linearen, vom Grad $r > 0$ homogenen und in jedem Argument streng monoton wachsenden Produktionsfunktionen $F: \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_+$.

Dabei heißt eine Funktion $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verallgemeinert quasi-linear, wenn stetige, streng monotone Funktionen $f, g_1, \dots, g_n$ existieren mit

$$G(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1) + \dots + g_n(x_n)) \qquad (x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{++}).$$

Franz Stehling (Karlsruhe)

Fastperiodische Funktionen in der top. Dynamik

Mit Hilfe des Satzes von Fürstenberg läßt sich zeigen, daß jede stetige Funktion einer minimalen, distalen Transformationsgruppe fastperiodisch auf jeder Faser einer geeigneten Untertransformationsgruppe ist.

Peter Urschka (Karlsruhe)

On necessary min-max conditions

Let $f(x,y)$ be a real valued function of x and y, where $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ and y belongs to some compact set of a topological space. Assume that $f(x,y)$ and its partial derivatives with respect to x are continuous in x and y taken together.

Necessary optimality conditions for the min-max problem

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x,y)$$

which are generalizations of the results due to Kapur (Naval Res. Logist. Quart. V. 20, no 4, 1973) and Demyanov-Malozjemov (Vvedenie v Minimax, Nauka, Moskva 1972) are given.

Stefan Gruceanu (Bucharest)

Stabilität eines Marktgleichgewichtes

Für ein einfaches Marktmodell mit zufälligen Störungen auf der Angebotsseite, wird die Stabilität eines Preisgleichgewichtes untersucht. Dabei wird ein sehr starker Begriff der stochastischen Stabilität benutzt, nämlich asymptotische Stabilität mit Wahrscheinlichkeit eins. Für verschiedene Verhaltensannahmen bezüglich der Preiserwartungsstruktur der Anbieter, werden hinreichende Bedingungen angegeben, die asymptotische Stabilität m. W. 1 eines Gleichgewichtes sichern.

Harry Hauptmann (Hamburg)

Verallgemeinerte Theorie d. Flüsse u. Potentiale

Ein gewöhnliches Flussproblem ist gegeben durch $\min\{c'y \mid Sy = 0,\ a \leq y \leq b\}$, wobei S die sog. Inzidenzmatrix ist, die in jeder Spalte eine $+1$, eine -1 und sonst Nullen enthält. Treten an die Stelle der von 0 verschiedenen Koeffizienten bel. reelle Zahlen, so lässt sich mit dieser Matrix ein verallg. Fluss und eine verallg. Potentialdifferenz definieren, wobei ein Fluss durch y mit $Sy = 0$ und eine Pot. diff. durch $\theta := S't$ gegeben ist, wenn die Komponenten von t die Potentiale der Knoten sind. Entsprechend der Theorie konservativer Flüsse können verallg. Zyklen und Kozyklen definiert und auf einfache Weise fundamentale Basen konstruiert werden. Die Anzahl der Elemente dieser Basen entspricht der zyklomatischen bzw. kozyklomatischen Zahl.

Kurt Hässig (Zürich)

Bewertete regenerative Prozesse mit Blick auf Bedienungsprobleme

Regenerative Prozesse werden als natürliche Verallgemeinerung der Semi-Markoff-Prozesse eingeführt und mit Hilfe Çinlar's (Adv. Appl. Prob. 1 (1969), 123-187) Theorie der Markoff'schen Erneuerungsgleichungen untersucht. Neben Aussagen über die Zustandswahrscheinlichkeiten des regenerativen Prozesses liefert dieser Zugang auch explizite Ergebnisse für den Erwartungswert der Kosten bei Verknüpfung des regenerativen Prozesses mit einer Kostenstruktur. Regenerative Entscheidungsprozesse können analog zu den Semi-Markoffschen Entscheidungsprozessen behandelt werden. Anwendungen bei Bedienungs- und Lagerhaltungsmodellen werden aufgezeigt.

Helmut Schellhaas (Darmstadt)

Über die Stetigkeit der Gesamtnachfragemengen in Abhängigkeit vom Preisniveau

Beim Beweis der Existenz eines Walrasschen Gleichgewichts für Ökonomien mit einem Maßraum von Wirtschaftssubjekten und mit einem unendlichdimensionalen Güterraum - vgl. die Konzepte von R. J. Aumann, 1964, und T. F. Bewley 1971/72 - ist u.a. das Problem zu bewältigen, aus der Stetigkeit der individuellen Nachfragekorrespondenzen in Abhängigkeit vom Preis-

system auf die Stetigkeit der Gesamtnachfragekorrespondenz zu schließen.
Zu diesem Zweck muß zunächst Integrierbarkeit für Funktionen mit Werten in einem beliebigen linearen Raum studiert werden.
Man benutzt dann die Beschreibung konvexer Mengen durch ihre Stützfunktionen, um mit Hilfe des Lemmas von Fatou für reellwertige Funktionen ein Analogon zum Lebesgue'schen Satz von der majorisierten Konvergenz für Korrespondenzen zu zeigen.
Dieses Resultat ermöglicht sodann den gewünschten Schluß.

Hans-Jürgen Siefert (Regensburg)

Motivierung von Nicht-OR-Fachleuten für den Einsatz von OR

Anhand zweier Fallstudien aus dem Rechnungswesen (Bestimmung akzeptierbarer Höchstpreise der Unterlieferanten bei Auswärtsvergebung von Operationen und zu fordernder Mindestpreise bei Vermietung eigener Kapazitäten nach aussen) bzw. aus dem Finanzwesen (Bestimmung des optimalen Produktionsprogramms und Investitionsprogramms in Abhängigkeit verschiedener Kreditrestriktionen wie Quick-Ratio oder Current-Ratio sowie Darlehensaufnahmen, wobei die Liquidität sichergestellt bleiben muss) erfolgt eine Motivierung des Praktikers über den Vergleich seiner empirisch angestellten Lösungsversuche mit dem Vorgehen der Modellformulierung und der Herleitung von Lösungen mittels OR-Algorithmen.

P. Stähly (St. Gallen)

Stochastische Lineare Optimierung über halbgeordneten Ereignisräumen

Es wird ein stochastisches lineares Optimierungsproblem betrachtet, wobei die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Koeffizienten nicht genau bekannt ist. Vielmehr ist die Informationsstruktur des Entscheidenden charakterisiert durch eine Halbordnung über eine Menge spezieller Ereignisse s_i, $i \in I \subseteq \mathbb{N}$.
Dieses Entscheidungsproblem unter "partieller Information" wird als Nullsummenspiel interpretiert. Die Menge der Strategien des Entscheidenden wird definiert durch die deterministischen Restriktionen des stoch. L.P. Die Strategien der Natur sind alle mit der gegebenen Halbordnung verträglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die Ecken dieser Menge werden eindeutig charakterisiert.
Für den Fall $I = \mathbb{N}$ wird das Nullsummenspiel auf ein infinites lineares Optimierungsproblem zurückgeführt. Hierzu werden Dualitätsaussagen für infinite L.P. über gerichteten Graphen entwickelt. Ferner läßt sich zeigen, daß die Lösungen des infiniten L.P. max-inf Strategien des betrachteten Nullsummenspiels sind. Für ihre Berechnung wird ein Lösungsverfahren einschließlich oberer und unterer Fehlerschranken angegeben.

W. Bühler (Aachen)

Die singuläre Funktion v. F. Riesz in Rot und Schwarz

Vermöge einer speziellen Charakterisierung der Funktion $U(x)$ in "Rot und Schwarz" wird gezeigt, daß $U(x)$ mit der von F. Riesz und Nagy konstruierten Funktion $F(x)$, die auf $[0,1]$ strengmonoton steigend und stetig ist, aber $F'(x)=0$ f. ü. Darüber hinaus kann vom Standpunkt des dynamischen Programmierens eine neuartige Approximations-methode zur Gewinnung der Funktion $F(x)$ entwickelt.

K. Daniel (Bern)

Dualität bei nichtlinearen Optimierungsaufgaben und exakte Penalty-Funktionen

Wir betrachten als primales Problem ein Minimierungsproblem mit Nebenbedingungen in Form von Gleichungen wie Ungleichungen. Um auch Anwendungen in Optimal-Control Theorie zu ermöglichen, behandeln wir das Problem in allgemeinen normierten Räumen. Mit Hilfe des zugeordneten Lagrange-Funktion formulieren wir ein duales Problem (D).
Für numerische Verfahren sind zwei Fragestellungen wichtig:
a) Liegt Dualität vor, d.h. ist Wert (P) = Wert (D)?
b) Gibt es ein optimales Lagrangefunktional?
Wir geben eine notwendige u. hinreichende Bedingung dafür an, daß (a) und (b) zutreffen. Dieses Kriterium besagt im Falle eines konvexen Optimierungsproblems, daß eine Klasse von Penalty-Funktionen global exakt ist.

Hans Czap (Göttingen)

Charakterisierung der Minimallösungen bei Optimierungsaufgaben mit vektorwertigen Funktionen

Ziel dieser Arbeit ist es, die in einer früheren Arbeit [vgl. BRECKNER W.W., Mathematica (Cluj) 12 (35), 25-38 (1970)] für konvexe Optimierungsaufgaben angegebene Verallgemeinerung des aus der Approximationstheorie bekannten Kriteriums von Markov-Kolmogorov auf eine nichtkonvexe Optimierungsaufgabe mit vektorwertiger Zielfunktion zu übertragen. Die betrachtete Optimierungsaufgabe lautet:

Gegeben seien

1) ein lokalkonvexer topologischer linearer Raum Y über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen,
2) n stetige sublineare Funktionale $p_1, \dots, p_n$ die auf Y erklärt sind,
3) n stetige Abbildungen $T_1, \dots, T_n$ von Y in Y,
4) eine nichtleere Teilmenge V von Y und ein Element $y_0 \in Y$;

gesucht ist ein $v_0 \in V$, das eine Umgebung U besitzt, so daß für jedes $v \in V \cap U$ ein $i \in N \cap [1,n]$ mit

$$p_i(T_i(v_0 - y_0)) \leqq p_i(T_i(v - y_0))$$

existiert.

Wolfgang W. Breckner (Cluj - Rumänien)

Ein kontrolltheoretisches Anwendungsbeispiel für die Theorie der Vektormaße.

Für das spezielle Kontrollproblem der Aufheizung eines Metallstabes in vorgegebener Zeit durch beschränkte Randkontrollen, wobei der maximale Abstand (Sup-Norm) zwischen einer gewünschten Wärmeverteilung und der "Antworten" auf die Kontrollen zu minimieren ist, hat Herr Weck, aus Darmstadt, Eindeutigkeit, Existenz und "Bang-Bang" Eigenschaft der optimalen Kontrolle bewiesen. Es läßt sich nun zeigen, daß sich diese Ergebnisse in kanonischer Weise als Folgerungen eines von Kingman, Robertson (1968) verallgemeinerten Satzes von Liapunov über den Wertebereich von Vektormaßen ergeben. Die entscheidende Schwierigkeit besteht im Nachprüfen der Voraussetzung, die für dieses Bsp. lautet:
Die Funktionenmenge $\mathrm{span}\{e^{\lambda_n t}\}_{n=1,2,\dots}$, wobei $\lambda_n > 0$, $\sum \frac{1}{\lambda_n} < \infty$,
ist "dünn" in $L^1([0,T], dt)$. Dieses gelingt mittels der von L. Schwartz

verallgemeinerter Sätze von Rinke.

K. Helmes (Bonn)

Über sequentielle Methoden bei Extremalaufgaben

Es wurde gezeigt, wie man die Penalty Methoden regularisieren kann, um Kompaktheitsbedingungen abzuschwächen und die Konvergenz der sequentiellen Methoden zu sichern. Außerdem wurden entsprechende Bedingungen zum Anwenden dieser Methoden beim Bestimmen von Sattelpunkten angegeben.

J. Hartung (Bonn)

Der Minimax-Wert der Stichprobeninformation.

Während die auf Fisher, Shannon, Lindley u.a. zurückgehenden Informationsmaße zu messen versuchen, wieviel Information in einer Nachricht (etwa einer Stichprobenrealisation) enthalten ist, versucht ein auf J. Marschak (1954) zurückgehendes Informationsmaß zu bewerten, welchen Wert eine Nachricht für einen Entscheidungsträger besitzt. Der Marschak'sche Informationswert beruht auf dem Bayes-Kriterium. Es zeigt sich, daß verschiedene Definitionsmöglichkeiten für einen entscheidungstheoretischen Informationswert, die bei Zugrundelegung des Bayes-Kriteriums äquivalent sind, bei Zugrundelegung des Minimax-Kriteriums nicht mehr äquivalent sind. Die Zusammenhänge zwischen den aus den verschiedenen Definitionen resultierenden Minimax-Informationswerte wurden untersucht.

G. Bamberg (Augsburg)

Triangulationspolyeder

Sei $C = (c_{ik})$ eine reellwertige (n,n)-Matrix und Π die Menge aller $n!$ Permutationen von $\{1, \dots, n\}$. Dann lautet das Triangulationsproblem

$$\min_{\pi \in \Pi} \sum_{i<k} c_{\pi(i),\pi(k)}$$

Die äquivalente Formulierung als math. Programm lautet

$$\min \operatorname{sp}(C P D P')$$

$$\text{s.t.} \quad Pe = e, \quad e'P = e', \quad p_{ik} = p_{ik}^2$$

wobei

$$D = (d_{ik}) \quad \text{mit} \quad d_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i < k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$P :=$ Permutationsmatrix

Wir können zeigen:

$$X = PDP' \quad \text{mit} \quad X = (x_{ik}) \quad \text{und}$$

$$x_{ii} = 0$$

$$x_{ik} + x_{ki} = 1 \quad \forall\, i \neq k$$

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 2 \quad \forall\, i \neq j \neq k \neq i, \quad x_{ik} = x_{ik}^2$$

Wegen dieser linearen Charakterisierung des Triangulationspolyeders, ist es möglich, das Problem als LP über den Ecken von conv $\{X\}$ auch für groß-dimensionierte praktische OR-Probleme zu lösen

Bernhard Korte (Bonn)

Stetigkeit von Produktionskorrespondenzen und Existenz von Produktionsfunktionen

Unter Annahme von freier Verfügbarkeit wird gezeigt, daß die Stetigkeit der Produktions=korrespondenz und der zugeh. Inversen bzgl. der Hausdorff-Topologie oder der Topologie durch abgeschl. Konvergenz auf der Menge der nichtleeren, abgeschl. Teilmengen des $\mathbb{R}^n_+$ eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Produktionsfunktion ist. Im Falle der schwach gekuppelten Produk=tion gilt auch die Umkehrung.

G. Bol (Karlsruhe)

Endliche Gruppen und Permutationsgruppen
18.8 – 24.8.1974

Groups containing standard components with centralizer of 2-rank >1.

Let G be a finite group and $A \leq G$ quasisimple (i.e. $A/Z(A)$ simple and $Z(A) \leq A'$). Then A is called a <u>standard component</u> of G if $[A, A^g] \neq 1$ $\forall g \in G$, $N_G(A) = N_G(K)$ for $K = C_G(A)$, and $|K \cap K^g|$ is odd for $g \notin N(K)$.

Aschbacher has shown that under very general conditions standard components exist as subgroups of $C_G(t)$ for involutions t in G (assuming that $C_G(t)$ is not 2-constrained for all t).

Assume that A is a standard component of G and set $G_0 = \langle A^G \rangle$. Aschbacher and I have

<u>Theorem</u> (almost) If A is any "known" group and if K contains a Klein group, then G_0 is one of the following: A_n $n \geq 9$, J_2, Sz, M_{12}, He, R, C_1.

(The word "almost" indicates that we have not yet completed the identification in the case of C_1.)

G. Seitz (Eugene, Oregon)

A question of Mathieu about permutation groups

The question posed in 1873 (and Liouville's Journal) is this.
What permutation groups X are there such that
$PSL(2,p) < X \leq A_{p+1}$, where p is a prime number?
Other than alternating groups A_{p+1} the only examples known are $AGL(3,2)$ of degree 8, and the Mathieu groups M_{12} and M_{24}. It does not seem likely that there are any more, but I cannot prove this.
All I can show is that

such a group as X must be 4-fold transitive, unless $p=7$,

and, as a corollary, if $p = q+2 > 7$, where q is also prime, then $X = A_{p+1}$. The proof of the theorem depends mainly on a study of the group of degree p which is the stabiliser of one point, and on a theorem of Wielandt to the effect that a primitive group containing a regular dihedral subgroup is doubly transitive.

Peter M. Neumann

19th August 1974.

Frobeniuscharaktere mehrfach transitiver Gruppen

Es wird gezeigt:

Satz. Es sei $\mathcal{G}$ eine Permutationsgruppe vom Grad n mit $n \geq 3k$ für eine Zahl $k \geq 2$. Der Frobeniuscharakter zur Partition $(n-k, k, 0, \dots, 0)$ von n, eingeschränkt auf $\mathcal{G}$, sei irreduzibel. Dann ist $\mathcal{G}$ $2k$-fach transitiv oder es ist $k=2, n=9$ und $\mathcal{G} = P\Gamma L(2,8)$.

Michael Klemm

On products of 2 nilpotent subgroups of a finite group and generalizations of theorems of Burnside Fitting Sylow and Glauberman

Although we shall deal with groups of odd order, some of the following results are true also for groups of even order, if extra conditions are imposed.

Theorem 1

Let G be a group of odd order. Let A be a nilpotent subgroup of G of maximal order satisfying $\text{class}(A) \leq k$, where k is a fixed integer larger then 1. Suppose A normalizes a nilpotent subgroup B of G, then AB is nilpotent.

Corollaries

Let G be a group of odd order.

a) The Fitting subgroup of G is contained in the nilpotent subgroup of G of maximal order

b) Let $\pi(G) = \{\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_n\}$ be any partition of $\pi(G)$. Let H_i denote a π_i-Hall subgroup of G, and A_i a nilpotent subgroup of H_i of maximal order, then:

$$F(G) = \bigcap_{x \in G} A_1^x \times \bigcap_{x \in G} A_2^x \times \ldots \times \bigcap_{x \in G} A_n^x$$

c) All nilpotent π-subgroups of G of maximal order are conjugate.

d) Let A be a nilpotent π-subgroup of G of maximal order satisfying $\mathrm{class}(A) \le k$, where $k \ge 2$, then $|A|$ and $|F(G)|$ have the same prime devisors.

e) Let $G = HK$, where H is a π-Hall subgroup and K is a π'-Hall subgroup. If the order of ~~the~~ a nilpotent subgroup of H is greater then the ~~maximal~~ order of a nilpotent subgroup of K of maximal order whose class ~~does~~ ~~not~~ is less or equal 2, then $O_\pi(G) \ne 1$.

Bialostocki Arie

19th August 1974.

Die Blockstruktur der monomialen Gruppe

Auf der Menge der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere der monomialen Gruppe $G \wr S_n$ wird eine Abbildung B angegeben und folgendes bewiesen:

Satz Die irreduziblen Charaktere χ_1 und χ_2 von $G \wr S_n$ gehören genau dann zu demselben p-Block, wenn $B(\chi_1) = B(\chi_2)$ gilt.

Zum Beweis werden die Defektgruppen von $G \wr S_n$ berechnet und ein Abzählargument anhand des ersten Hauptsatzes von Brauer benutzt.

Jürgen Jappe (Aachen)

19. August 1974

Über die Blöcke der klassischen Gruppen

Sei $\mathfrak{G}$ eine der klassischen Gruppen, p die charakteristische Primzahl von $\mathfrak{G}$. Es wird bewiesen:
Für jedes $x \in \mathfrak{G}$ mit $o(x) = p$ ist $C_{\mathfrak{G}}(x)$ p-constrained, $O_{p'}(C_{\mathfrak{G}}(x)) = \mathfrak{E}$, indem eine Basis des Raumes, auf dem $\mathfrak{G}$ in natürlicher Weise operiert, angegeben wird, bezüglich der die Matrix zu x und die Gramsche Matrix eine möglichst einfache Form annehmen.
Sei nun $\mathfrak{D}$ Defektgruppe eines p-Blockes B von $\mathfrak{G}$, $z \in Z(\mathfrak{D})$, $o(z) = p$. Folgender Satz von Wales liefert, mit $\mathfrak{H} = C_{\mathfrak{G}}(z)$, daß B der 1-Block ist oder Defekt 0 hat:
Satz: Sei B Block von $\mathfrak{G}$ zur Primzahl p, B nicht der 1-Block, sei $\mathfrak{D}$ Defektgruppe von B. Es gebe $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{D}C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D}) \leq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$ p-constrained. Dann ist $O_{p'}(\mathfrak{H}) > \mathfrak{E}$.

Michael Klemm (Mainz)

Einige auflösbare Automorphismengruppen auflösbarer, endlicher Gruppen.

E. C. Dade definierte: ein äußerer Automorphismus ω "zentralisiert" eine Teilmenge S von G, wenn ω natürliches homomorphes Bild eines Automorphismus α ist, der S zentralisiert. Ähnlich definiert man wann ein äußerer Automorphismus S "normalisiert" und das Konzept läßt sich auch auf Faktorgruppen ausdehnen. Die äußeren Automorphismengruppen die alle Normalteiler von Sylowgruppen oder alle zyklischen Untergruppen von Sylowgruppen oder alle primitiven Faktorgruppen "normalisieren", sind für auflösbare Gruppen wieder auflösbar. Die nilpotente Länge ist beschränkt durch die doppelte nilpotente Länge der Gruppe und es existieren Schranken für die Ordnungen dieser Automorphismengruppen. Diese Gruppen enthalten die äußeren klassenerhaltenden Automorphismen, insbesondere gelten auch die angegebenen Schranken für diese.

Reinhard Laue (Aachen)

Automorphism groups of groups with trivial centre

Lemma. Let G be a group with a characteristic subgroup H such that $C_G(H) = 1$. Then G is naturally embedded in $\mathrm{Aut}\, H$ and there is a natural isomorphism $\mathrm{Aut}\, G \cong N_{\mathrm{Aut} H}(G)$.

This lemma can be used to facilitate the calculation of $\mathrm{Aut}\, G$ for various groups G with $Z(G) = 1$. In particular, it shows that if G is a finite semi-simple group (in the sense of Fitting) then $\mathrm{Aut}\, G$ is embedded in $\mathrm{Aut}\, S(G)$ where $S(G)$ is the socle of G; it provides information about $\mathrm{Aut}\, G$ when G is a 'regular' wreath product $A \wr B$ with $A \neq 1$, $Z(A) = 1$; and it is used to show that if A is a finite abelian group, $V \leq \mathrm{Aut}\, A$, $C_A(V) = 1$ and G is the natural semi-direct product VA (a 'relative holomorph' of A) then in various circumstances (though not always) $\mathrm{Aut}\, G \cong N_{\mathrm{Aut} A}(V)\, A$. In particular, one can prove that if p is prime, n a positive integer and G is the extended affine group of the field $GF(p^n)$ then (providing $p^n \neq 2$) G is complete. Furthermore, for any positive integer m and any sequence $(q_1, \ldots, q_m)$ of odd primes, not necessarily distinct, $\exists\, p$ such that (with $n = 2$) G has a chain of subgroups $G = G_0 > G_1 > \ldots > G_m$ such that $|G_{i-1} : G_i| = q_i$ and every G_i is complete ($i = 1, \ldots, m$).

John Rose (Newcastle upon Tyne)

On primitive permutation groups with a primitive solvable subconstituent.

Let Ω be a finite set and (G,Ω) be a primitive permutation group with a subconstituent $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ of degree $d > 1$.
Let ~~be~~ $\beta \in \Delta(\alpha)$, $K_\alpha := (G_\beta)_{G_\alpha}$, $K_\beta' := (G_\alpha)_{G_\beta}$.
Using the following theorem of KNAPP

(1) $O_p(G_{\alpha\beta}) \trianglelefteq G_\alpha \implies O_p(G_{\alpha\beta}) = 1$

one can ~~yield~~ obtain

(2) If $(G_\alpha^{\Delta(\alpha)}, \Delta(\alpha))$ is primitive solvable, then $E := K_\alpha \cap K_\beta'$ is a p-group for a suitable prime p.
If $E \neq 1$, then the following holds:
(i) Every local prime of G_α is a local prime of $G_{\alpha\beta}$.
(ii) $F(G_{\alpha\beta}) = O_p(G_{\alpha\beta})$, especially $G_{\alpha\beta}$, G_α, G_β are p-constrained.
(iii) p is a local prime of $G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}$.

Using GLAUBERMAN's ZJ-theorem we can ~~yield~~ obtain:

(3) If $(G_\alpha^{\Delta(\alpha)}, \Delta(\alpha))$ is primitive solvable,
$SL(2,3)$ is not involved in G_α,
$O_2(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}) = 1$,
then $E := K_\alpha \cap K_\beta' = 1$ and $|G_\alpha|$ divides $d!(d-1)!$

Because of the theorem of FEIT and THOMPSON we get as a corollary:

(4) Corollary
If $(G_\alpha^{\Delta(\alpha)}, \Delta(\alpha))$ is primitive and $|G_\alpha^{\Delta(\alpha)}|$ odd then $E = 1$ and $|G_\alpha|$ divides $d!(d-1)!$

Michael Bürker
(Tübingen)

On primitive groups having a 2-primitive subconstituent

Let (G,Ω) be a finite primitive permutation group with a subconstituent $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ of degree $d>1$. Then the following holds:

(1) If $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ is 2-transitive and $F(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}) = 1$ for $\beta\in\Delta(\alpha)$, then $G_{\Delta(\alpha)} \cap G_{\Delta'(\beta)} = 1$ and $|G_\alpha|$ divides $d!\,(d-1)!$.

(2) If $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ is 2-primitive and $F(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}) \neq 1$ for $\beta\in\Delta(\alpha)$, then $|G_\alpha| \leq d(d-1)^6(d-2)^2({}^2\log(d-1))^2$. (More detailed information about G_α can be given.)

(3) If $d=4$, then $|G_\alpha|$ divides 2^5 or $2^4 3^6$.

(4) If $d=5$, then $|G_\alpha|$ divides $5\cdot 3^2\cdot 2^{14}$.

(5) If d is a prime number such that every permutation group of degree d is either solvable or 2-primitive, then $|G_\alpha|$ divides $d\,(d-1)!^2$.

The proof involves ideas of Wielandt, Tutte, Sims, Gardiner and Weiss, and theorems of Hering-Kantor-Seitz and O'Nan.

Wolfgang Knapp (Tübingen)

On 2-transitive permutation groups.

*

Theorem Let (G,Ω) be 2-transitive, such that for $\alpha\in\Omega$ there exists $N \trianglelefteq G_\alpha$ with $|N|$ odd, and N transitive on $\Omega-\{\alpha\}$. Then either G has an elementary abelian regular normal subgroup, or G has a normal 2-transitive subgroup G^*, such that $G^*\cong PSL(2,q)$ or $PSU(3,q)$, ~~or of Ree type $R(q)$~~ for q any odd prime power, or G^* is of Ree type $R(q)$, where $q=3^{2n+1}$.

The proof depends heavily on a similar classification theorem of Hering, Kantor and Seitz, in which N is assumed to act regularly on $\Omega-\{\alpha\}$ (again with $|N|$ odd, and $N\trianglelefteq G_\alpha$). A classification theorem of O'Nan, which deals with groups with $1 \neq N \trianglelefteq G_\alpha$, N abelian and <u>not</u> semi-regular on $\Omega - \{\alpha\}$, is also used. ~~It is proved that~~

I prove that for any 2-group $T \leq G$ which fixes more than 2 points, the centralizer of T acts 2-transitively on the fixed point set of T, and satisfies the hypothesis of the theorem. Inductive methods can then be used, and I seek to reduce the possible rank of such a group T. If no such T exists, and $|G_{\alpha\beta}|$ is odd, then a classification theorem of Bender is applied.

Derek Holt (Tübingen).

Der Primzahlgraph einer Gruppe

Ist G eine endliche Gruppe, so wird ihr orientierter Primzahlgraph ΓG folgendemaßen definiert: die Eckenmenge ist die Menge aller Primzahlen; und für ein Primzahlpaar $p \neq q$ gehört die gerichtete Kante $\overline{pq}$ dann und nur dann zu ΓG, wenn es eine p-Untergruppe $P \subseteq G$ derart gibt, daß q ein Teiler von $[n_G P : c_G P]$ ist. Jeder derartige Graph ist auch der Graph einer Gruppe A mit elementar abelschen A' und A/A'. Die Gruppe G ist auflösbar, wenn G frei von Kantenpaaren der Form $\overline{2p}$, $\overline{p2}$ ist; und G ist dann und nur dann eine Sylowturmgruppe, wenn ΓG frei von geschlossenen [orientierten] Kantenzügen ist.

Reinhold Baer [Zürich].

Greensche Korrespondenz zwischen Blöcken mit zyklischer Defektgruppe

<u>Satz</u> Sei F ein beliebiger Körper der Charakteristik $p > 0$, die die Ordnung der endlichen Gruppe G teilt. Ist ~~B≠0~~ B ein Block der Gruppenalgebra FG mit zyklischer Defektgruppe D und Trägheitsindex t, dann gilt:

a) B besitzt t (nicht isomorphe) einfache FG-Moduln.

b) t teilt $p-1$.

c) D ist ein Vertex für jeden einfachen FG-Modul von B.

d) B besitzt $t|D|$ (nicht isomorphe) unzerlegbare FG-Moduln.

Dieser Satz verallgemeinert Ergebnisse von E. C. Dade, H. Kupisch und G. Janusz; sein Beweis ist unabhängig von deren Arbeiten.

G. O. Michler (Gießen)

Über einen Satz von Gaschütz

1.) Sei a der von einem Element der Ordnung 4 aus $H = SL_2(3)$ induzierte Automorphismus der Ordnung 2 von H. Dann zerfällt die 2-Sylowgruppe in $G = H\langle a\rangle$, ist die 2-Sylowgruppe P von H (die isomorph zur Quaternionengr. der Ordnung 8 ist), aber G zerfällt nicht über P (kleinst mögliches Beispiel zu einem Satz von Gaschütz)

2) Mit Hilfe eines Zerfällungssatzes von Seitz und Wright kann folgender Satz bewiesen werden:
Sei G eine endliche Gruppe mit einem Autom. a von Primzahlordnung p, so daß
$x \cdot x^a \cdot x^{a^2} \cdots x^{a^{p-1}}$ ein p-Element ist, für alle x aus G.
Dann ist die p-Sylowgr. P von G normal in G, G/P ist nilpotent und a normalisiert ein Komplement von P in G.

U. Kurzweil (Erlangen)

M-Groups

The purpose of this talk was to give a survey of results, achieved in the academic year 1973–1974. M-groups = finite monomial groups.

1) If $SL_2(\mathbb{F}_3) \trianglelefteq \mathcal{G}$, then $\mathcal{G}$ is not monomial.

2) Let $\mathcal{G}$ be a finite group such that $\mathcal{G}'/Z(\mathcal{G}') \neq 1$ is a chief factor of $\mathcal{G}$ and such that $\mathcal{G}'' \subseteq Z(\mathcal{G})$. Then $\mathcal{G}$ is not monomial (BLOCH, 1974). Neither of the two conditions can be omitted.

3) Results of the paper „On Embedding of minimal non-M-groups", Indagationes Mathematicae, Vol 36 (1974)

In this paper we constructed monomial groups having non-monomial normal subgroups.

4) Definition (P. Hall, 1939). Two finite groups $\mathcal{G}$ and H are said to be isoclinic, if the following two conditions hold:

(1) $\mathcal{G}/Z(\mathcal{G}) \overset{\beta}{\cong} H/Z(H)$

$\{g_i Z(\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta} h_i Z(H)\}$

(2) $\mathcal{G}' \overset{\alpha}{\cong} H'$

$\{[g_i, g_j] \xrightarrow{\alpha} [h_i, h_j]\}$.

Theorem. (BIOCH & VAN DER WAALL, 1974). The groups in an isoclinism class are either all monomial or are all not monomial.

R. W. VAN DER WAALL (Nijmegen, Niederlande).

Eine Kennzeichnung von Fischer's einfacher Gruppe BM von der Ordnung $2^{41}\cdot 3^{13}\cdot 5^6\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 31\cdot 47$

Die Gruppe BM wird von einer Konjugiertenklasse von $\{3,4\}$-Transpositionen erzeugt. Bezeichne mit H den Zentralisator einer solchen Transposition in BM. Es wird der folgende Satz bewiesen:
Sei $\mathcal{G}$ eine einfache Gruppe und D eine Konjugiertenklasse von Involutionen in $\mathcal{G}$. Für $d \in D$ sei $C_{\mathcal{G}}(d)$ zu H isomorph. Dann gilt:

(i) $|\mathcal{G}| = 2^{41}\cdot 3^{13}\cdot 5^6\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 31\cdot 47$

(ii) D ist eine Klasse von $\{3,4\}$-Transpositionen

(iii) $C_{\mathcal{G}}(d)$ hat 5 Bahnen auf D

Bem. Eine Gruppe, die (i)-(iii) erfüllt ist zu BM isomorph

G. Stroth (Mainz)

Über Standarduntergruppen endlicher Gruppen

Satz. Sei G eine endliche einfache Gruppe, die eine Standard-untergruppe A enthält, so daß $A/Z(A)$ eine einfache Gruppe mit abelscher Sylow-2-Untergruppe ist, dann ist G vom sektionalen 2-Rang höchstens vier.

Bem. Zur Def einer Standarduntergruppe siehe S. 85 in diesem Buch (Gary Seitz: Groups containing standard components with centralizer of 2-Rank >1)
Unter dem sektionalen 2-Rang ~~eines~~ $r(G)$ einer endlichen Gruppe G verstehen wir das Maximum der Menge $\{d(X/\Phi(X)) \mid X$ 2-Untergruppe von $G\}$, wobei $d(X/\Phi(X))$ die minimale Erzeugendenzahl der elementar-abelschen Gruppe $X/\Phi(X)$ ist.

Volker Feige (?) (Mainz)

Extensions of groups with Operators and Automorphisms of Extension Groups.

Let (Π, G, ψ) be an abstract kernel, i.e. Π and G are groups and ψ is a homomorphism of Π into the group $\mathrm{Out}\, G$ of outer automorphisms of G. Suppose that the group A acts on Π and G by automorphisms. Then there is a induction homomorphism $A \to \mathrm{Aut}\,\Pi \times \mathrm{Aut}\, G$. An extension $\Gamma: 1 \to G \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\rho} \Pi \to 1$ of (Π, G, ψ) is called an A^*-extension if there is a group of automorphisms of E normalizing G and having the same image in $\mathrm{Aut}\,\Pi \times \mathrm{Aut}\, G$ as A.
It turns out that we may assume in the study of these A^*-extensions that ψ itself is an A-homomorphism, the action of A on $\mathrm{Out}\, G$ being induced by conjugation. In this case, we prove that A acts in a natural manner as a permutation group on the set $\mathrm{Opext}\,(\Pi, G, \psi)$ of all congruence classes of extensions of (Π, G, ψ) such that the fixed classes are exactly those consisting of A^*-extensions. Moreover, if G is abelian, this action carries over to one on $H^2(\Pi, G)$ and then A acts by auto-

morphisms

Example: Suppose that Γ is an extension of (Π, G, Ψ) and assume that $H^2(\Pi, ZG) = 0$, where the centre ZG is regarded as a Π-module with respect to Ψ. Let A_Π and A_G be any groups of automorphisms of Π and G, respectively. Then there is a group A of automorphisms of E normalizing G $(= \iota G)$ and inducing A_Π and A_G if and only if A_Π centralizes $\Pi/\ker\Psi$ and A_G centralizes $\Psi(\Pi)$.

P. Schmid (Tübingen)

Centralisers of elements of order 3, and a characterisation of $PSp(4,3)$.

Theorem. Let G be a finite simple group containing an element of order 3 whose centraliser is isomorphic to the centraliser in $PSp(4,3)$ of an element of order 3 in the centre of a S_3-subgroup. Suppose in addition that $N_G(M, 3') = 1$ where M is an elementary abelian subgroup of order 27. Then $G \cong PSp(4,3)$.

Pf. It is shown that G has 4 classes of elements of order 3 and the centralisers are determined. This enables the centraliser of a central involution to be determined.

A R Prince
(Edinburgh)

A Characterisation of Sz by the Sylow 2-subgroup

Theorem: Let G be a simple group with a Sylow 2-subgroup T which is isomorphic to those in Sz, the sporadic simple group of Suzuki. Then G itself is isomorphic with Sz.

Remark: ~~During~~ In the proof one shows that the centralizers of the involutions are isomorphic to those of Sz and then one uses a characterisation of S. K. Wong.

Arthur Reifart (Mainz)

Ein metrischer Satz von Maschke.

Sei G eine Gruppe von Isometrien des K-Vektorraumes V mit regulärem symmetrischem oder symplektischem Skalarprodukt. Ist W ein G-invarianter isotroper Teilraum von V mit $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$, so gibt es einen G-invarianten isotropen Teilraum W' von V mit $V = W \oplus W'$ falls

a) V ein vollständig reduzibler G-Modul ist und $\operatorname{char} K \neq 2$ gilt

oder

b) $|G|$ und $\operatorname{char} K$ teilerfremd sind.

(Für den symmetrischen Fall sei dabei stets $\operatorname{char} K \neq 2$).

B. Huppert

maximal subgroups of $PSL_4(q)$, $q=2^m$.

Let $G = PSL_4(q)$, $q=2^m$ and let $q'=2^\nu$, ν/m. The maximal subgroups of G are the following:

(i) $G_{(P)}$ and $G_{(\Pi)}$, the affine and dual affine subgroups of order $q^6(q^3-1)(q^2-1)(q-1)$.

(ii) $G_{(\ell)}$, the stabilizer of a line. $|G_{(\ell)}| = q^6(q-1)^3(q+1)^2$

(iii) If $q>4$, $G_{(\Delta)}$, the stabilizer of a tetrahedron.
$|G_{(\Delta)}| = 24(q-1)^3$

(iv) If $q>2$, $G_{(\ell_1,\ell_2)}$ of order $2q^2(q-1)^3(q+1)^2$

(v) $G_{(\bar{\ell}_1,\bar{\ell}_2)}$ of order $2q^2(q^2-1)(q^2+1)(q+1)$.

(vi) $PSL_4(q')$, $\frac{m}{\nu}$ prime

(vii) $SP_4(q)$

(viii) $U_4(q)$ if $q=q'^2$

(ix) A_7.

Ben Mwene (Birmingham)

Nichtauflösbare normale Fittingklassen.

Eine Fittingklasse $\mathfrak{X}\neq\{1\}$ (im Bereich aller endlichen Gruppen) heißt f-normal, wenn für jede Gruppe G das $\mathfrak{X}$-Radikal $G_{\mathfrak{X}}$ maximale zu $\mathfrak{X}$ gehörige Untergruppe ist. Es wurden f-normale Fittingklassen angegeben, für die alle Radikalfaktorgruppen abelsch sind, als auch solche, bei denen auch nichtabelsche Radikalfaktorgruppen existieren. Bewiesen wurde:

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine $\mathfrak{F}$-normale Fittingklasse. Dann sind entweder alle Radikalfaktorgruppen $G/G_{\mathfrak{K}}$ abelsch (– dann heißt $\mathfrak{K}$ "vom Typ I"–), oder zu jeder Gruppe H gibt es eine Gruppe G mit $G/G_{\mathfrak{K}} \cong H$ (– dann heißt $\mathfrak{K}$ "vom Typ II").

Ferner gilt:

Satz. Ist $\mathfrak{X}$ eine im Bereich der auflösbaren Gruppen normale Fittingklasse, so ist $\mathfrak{X}\mathfrak{E} = \{G : G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{E}\}$ eine $\mathfrak{F}$-normale Fittingklasse [wobei $\mathfrak{E}$ die (Fitting)-Klasse der Gruppen ist, die direktes Produkt von einfachen nicht-zyklischen Gruppen sind]. Bezeichnet $\mathfrak{S}_0$ die kleinste auflösbare normale Fittingklasse, so ist $\mathfrak{S}_0\mathfrak{E}$ die kleinste $\mathfrak{F}$-normale Fittingklasse.

Satz. Sind $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ Fittingklassen und ist $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{F}$-normal, so auch $\mathfrak{K}\mathfrak{L} = \{G : G/G_{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{L}\}$.

Zur weiteren Behandlung der $\mathfrak{F}$-normalen Fittingklassen wurden einige Ergebnisse von Lockett zitiert: Ist $\mathfrak{K}$ eine Fittingklasse, so auch $\mathfrak{K}^* = \{G : (G \times G)_{\mathfrak{K}}$ ist subdirekt in $G \times G\}$, sowie $\mathfrak{K}_* = \bigcap_{\mathfrak{K}^* = \mathfrak{L}^*} \mathfrak{L}$. Für $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L}$ sind äquivalent: 1) $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{L}^*$,
2) Aut G zentralisiert $G_{\mathfrak{L}}/G_{\mathfrak{K}}$ f. alle Gruppen G,
3) $G_{\mathfrak{L}}/G_{\mathfrak{K}} \leq Z(G/G_{\mathfrak{K}})$ f. alle Gruppen G.
$\mathfrak{W}(\mathfrak{K}_*, \mathfrak{K}^*) := \{\mathfrak{L} \mid \mathfrak{K}_* \subseteq \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}^*\}$ heiße "Lockett-Abschnitt zu $\mathfrak{K}$".

Satz Ist in einem Lockett-Abschnitt eine Fittingklasse $\mathfrak{F}$-normal, so jede. Die Typ I-Fittingklassen bilden einen Lockett-Abschnitt.

In Verallgemeinerung eines Satzes von Lausch gilt:

Satz Zu jedem Lockett-Abschnitt $\mathfrak{W}$ gibt es eine (evtl. unendliche) abelsche Gruppe, deren Untergruppen-Verband isomorph zu $(\mathfrak{W}, \subseteq)$ ist.

Folgerung: Eine Fittingklasse $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{F}$ ist genau dann maximal in $\mathfrak{F}$, wenn es eine Primzahl p gibt, so daß für alle Gruppen G gilt: $|G/G_{\mathfrak{K}}| \in \{1, p\}$.

H. Laue (Kiel)

Cycles and bicycles: being an account of the best endeavours of sundry mathematicians to solve a problem in number theory, which, having been transformed by one Michael Fried into a problem concerning permutation groups, and having received the expert attentions of Professor Leonard Scott, has, through the modest efforts of the present investigator, given rise to speculations concerning automorphism groups of certain Steiner systems.

The group theoretic problem, which arises via the use of Riemann surfaces to study sets of values of certain integer polynomials, is as follows. We postulate a group G and two faithful, primitive G-spaces Γ, Δ, the one of degree n, the other of degree $2n$; further, G should contain an element g such that g^Γ is an n-cycle and g^Δ is a product of two disjoint n-cycles; finally G should be intransitive in its action on $\Gamma \times \Delta$. ~~For~~ the number theory one may assume also a rather technical condition concerning generators of G but as this seems difficult to exploit I have omitted it: the problem, to find all examples of such groups G as described above, is already interesting enough. There is a strong presumption that n must be 5 and G must be A_5 or S_5. So far all we have proved is:

(i) the rather superficial fact that if G^Γ is 3-transitive then $n = 5$ and G is A_5 or S_5;

(ii) the deeper facts that G^Γ is in any case 2-transitive (which follows from theorems of Schur and Burnside) and that G^Δ is a rank-3 group analogous to Wielandt's groups of degree $2p$, (this latter fact was proved recently by L.L. Scott);

(iii) that G is a group of automorphisms of a block design whose ~~numerical~~ parameters satisfy certain interesting and suggestive numerical relations.

Peter M. Neumann (Oxford)

A Sylow 2-subgroup

A Sylow 2-subgroup T of the Mathieu group M_{24} has order 2^{10} and a center $Z(T)$ of order 2. The factor group $T/Z(T)$ is a split extension of its unique elementary abelian subgroup of order 2^6 by a dihedral group of order 2^3. We reported the following result.

THEOREM. Let G be a finite group with a Sylow 2-subgroup S isomorphic to $T/Z(T)$. Assume $O(G) = 1$. Then the unique elementary abelian subgroup of order 2^6 in S is a normal subgroup of G.

This result is interesting in comparison with the situation for a Sylow 2-subgroup T_1 of Conway's simple group Co_3. Here again $|T_1| = 2^{10}$, $|Z(T_1)| = 2$, and $T_1/Z(T_1)$ is a split extension of an elementary abelian normal subgroup of order 2^6 by a dihedral group of order 2^3. However, the infinitely many simple groups A_{12}, A_{13}, $Sp(6,2)$, $\Omega(7,q)$ with $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ have Sylow 2-subgroups isomorphic to $T_1/Z(T_1)$.

U. Schoenwaelder

Komplexe Analysis
1.9. – 7.9. 1974

Projektive Mannigfaltigkeiten von festem Grad

Sei $A \subset \mathbb{P}_n$ eine zusammenhängende abgeschlossene algebraische Untermannigfaltigkeit von Dimension a und Grad g.

Satz: Falls $a \geq \frac{5}{2} g(g-1)$, dann ist A vollständiger Durchschnitt.

Für diesen Satz wurde ein Beweis angedeutet, der in Zusammenarbeit mit T. Van de Ven entstanden ist.

Wolf Barth.

Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe.

Soit E un espace de Banach complexe, et soit $D \subset E$ un domaine borné. On considère le groupe G(D) des automorphismes analytiques de D, muni de la topologie de la convergence uniforme locale. G(D) est un groupe topologique, et l'on a:

Théorème. G(D), muni de sa structure uniforme gauche (resp. droite) est complet.

On peut alors se demander si G(D) est un groupe de Lie. Pour cela, nous construisons un ouvert D d'un espace de Hilbert H, tel que G(D) soit totalement discontinu non discret. En particulier, ce n'est pas un groupe de Lie.

Jean-Pierre VIGUÉ.

Weierstraß-Punkte höherer Ordnung und die Automorphismengruppe einer kompakten Riemannschen Fläche.

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Eine Basis $\omega_1, \dots, \omega_{d(k)}$ von $H^0(X, \Omega^k)$ heißt normalisiert in $P \in X$, falls die Ordnungen im Punkte P eine steigende Folge bilden, d.h. $v_P(\omega_1) < v_P(\omega_2) < \dots < v_P(\omega_{d(k)})$.
Dabei gilt $d(k) := \begin{cases} g ; & k=1 \\ (2k-1)(g-1); & k \geq 2 \end{cases}$. Diese Folge hängt nur vom P ab; sie wird mit $\rho_1^{(k)}(P) < \dots < \rho_{d(k)}^{(k)}(P)$ bezeichnet. Ein Punkt $P \in X$ heißt k-Weierstraß Punkt, falls

$$\mathrm{gew}_k(P) := \sum_{i=1}^{d(k)} \left(\rho_i^{(k)}(P) + 1 - i \right) > 0$$ gilt.

Sei $(k\text{-}WP) := \{ P \in X ; \mathrm{gew}_k(P) \geq 1 \}$; $N_k = \mathrm{Card}\,(k\text{-}WP)$.
Es gelten:

→ $\mathrm{gew}_k(P) \leq \mathrm{gew}_{k+1}(P) \quad \forall P \in X, \forall k \in \mathbb{N}_+$

→ $(1\text{-}WP) \subset (2\text{-}WP) \subset (3\text{-}WP) \subset \dots$

→ $\bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} (k\text{-}WP)$ ist eine abzählbare Menge

Jeder Automorphismus von X induziert eine Permutation von $(k\text{-}WP)$. Man kann eine Reihe von Anwendungen zur Theorie der Automorphismengruppe bringen. Ein Beispiel davon:
„Ist $h \in \mathrm{Aut}(X)$ von Ordnung N, so ist die Menge der Fixpunkte von h in $((N+1)\text{-}WP)$ enthalten".

Ist T_g der Teichmüller Raum der Riemannschen Flächen vom Geschlecht g, $V_g \to T_g$ die universelle Familie, $V_{g,t}$ die Faser über $t \in T_g$ und $(k\text{-}WP)_t$ die Menge der k-Weierstraß-Punkte von $V_{g,t}$

so ist $\bigcup_{t \in T_g} (k\text{-}WP)_t$ analytisch.

A. Duma

Holomorphe Vektorraumbündel über $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

Sei E hol. VB vom Rang 2, $l \subset \mathbb{P}_2$ proj. Gerade, dann gilt: $E|l \approx H^{k_1(l)} \oplus H^{k_2(l)}$, die l, auf denen $k_i(l)$ nicht konstant ist, bilden analytische Mengen in $\mathbb{P}_2^*$, es sind keine Einschränkungen für diese Ausnahmemengen bekannt.

(1) Es wurden Beispiele gegeben für verschiedene Ausnahmemengen, die zeigen, daß es „große" Klassen von Bündeln mit gleichem Spaltungsverhalten gibt, die nicht isomorph sind.

(2) Sei T das Tangentialbündel von $\mathbb{P}_2$; $\varphi: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ sei gegeben durch $\varphi(x_0, x_1, x_2) = (x_0^2, x_1^2, x_2^2)$. $E = \varphi^* T$ ist ein Bündel, dessen Ausnahmemenge in $\mathbb{P}_2^*$ aus 3 Geraden besteht, E ist nicht 'almost decomposable'. Das widerlegt eine Vermutung von Schwarzenberger.

(3) Man erhält alle 2-Bündel über $\mathbb{P}_2$ als 2-Bündel über dem in einem Punkt aufgeblasenen $\mathbb{P}_2$, deren Einschränkung auf die eingesetzte 6-Fläche trivial ist.
Nach einem Vorschlag von Grauert zerlege man $\tilde{\mathbb{P}}_2$ in $U_1 \times \mathbb{P}_1$, $U_2 \times \mathbb{P}_1$, U_i Polyzylinder, bestimme alle Bündel auf $U_i \times \mathbb{P}_1$, alle möglichen Verheftungen der Bündel, s.d. die Einschränkung $6 \subset \Sigma_1$ trivial ist, und löse das entstandene Isomorphieproblem.
In diesem Zusammenhang sind folgende Sätze von Interesse:

Satz E, F hol. VB über $U \times \mathbb{P}'$, $U = U(0) \subset \mathbb{C}^m$ Polyzylinder, $E|0^\infty \times \mathbb{P}_1 \approx F|0^\infty \times \mathbb{P}_1$ (formal isomorph längs der Faser über 0) $\Rightarrow$ Es gibt $V = V(0) \subset U$, s.d. $E|V \times \mathbb{P}' \approx F|V \times \mathbb{P}'$

Satz E, F hol. VB über $U \times \mathbb{P}'$, U nicht kompakte, zshd. Riemannsche Fläche, $D \subset U$ diskret.
(i) Zu beliebig vorgebbaren Sprüngen über D gibt es ein 2-Bündel mit diesem Sprungverh.
(ii) $E|(U-D) \times \mathbb{P}_1$ zerfällt global in Geradenbündel.
(iii) E, F gleiches Spaltungsverhalten über $(U-D) \times \mathbb{P}'$, $E|z^\infty \times \mathbb{P}' \approx F|z^\infty \times \mathbb{P}'$ $\forall z \in D \Rightarrow E \approx F$.

G. Muilich

Deformationen nichtrationaler Singularitäten

Es sei $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \to S$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung zwischen den komplexen Räumen $\tilde{Z}$ bzw. S, und es sei
$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & Z \arrow[d, "\pi"] \\ & S \end{tikzcd}$$
die "blowing-down"-Abbildung von $\tilde{\pi}$ über S. Es wurde gezeigt: Die Faser $\pi^{-1}(s_0)$ über einem Punkt $s_0 \in S$ ist der Remmert-Quotient von $\tilde{\pi}^{-1}(s_0) = \tilde{Z}_{s_0}$ genau dann, wenn die Restriktionsabbildung $\Gamma(\tilde{E}_{s_0}, \mathcal{O}_{\tilde{Z}}) \to \Gamma(\tilde{E}_{s_0}, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_{s_0}})$ surjektiv ist

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(hierbei bezeichnet $\tilde{E}_{s_0}$ die exzeptionelle Menge des streng pseudokonvexen Raumes $\tilde{Z}_{s_0}$). Dies ist z. B. erfüllt in dem Fall, wo $\tilde{\pi}$ platt, S reduziert und $\dim H^1(\tilde{Z}_{s_0}, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_{s_0}})$ konstant in der Nähe von s_0 ist.

Dieses Resultat wurde dann dazu benutzt, um folgendes zu zeigen: Zu jeder kompakten Riemannschen Fläche R mit Geschlecht $g \geq 2$ gibt es eine 2-dimensionale normale analytische Singularität X, so daß die minimale Auflösung $\tilde{X} \to X$ die Fläche R als exzeptionelle Menge enthält und eine Deformation über $S = \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$ besitzt, die nicht zu einer Deformation von X über S niedergeblasen werden kann.

Oswald Riemenschneider

Eine Integraldarstellung vom Cauchy-Fantappié Typ

Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : G \to \mathbb{C}^n$ eine holomorphe Abbildung. Seien α^j $(1 \leq j \leq n)$ zweimal stetig differenzierbare Differentialformen vom Typ $(1,0)$ auf G, so daß $0 \neq (\alpha^j \cdot f)(x) := \alpha^j(x)(f(x))$ für alle $x \in G$ und $1 \leq j \leq n$ gilt. Dann heißt die Differentialform $D_f(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) := \frac{\alpha^1}{\alpha^1 \cdot f} \bigwedge_{j=2}^{n} \bar{\partial} \frac{\alpha^j}{\alpha^j \cdot f}$ eine verallgemeinerte Cauchy-Fantappié Form. Es wird ein Beweis angegeben für den folgenden von W. Koppelman in Bull of the AMS (1956) angekündigten

Satz a) $D_f(\beta^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) = D_f(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$, $\bar{\partial} D_f(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) = 0$.

b) Die Differenz zweier verallgemeinerter C.-F. Formen ist ein $\bar{\partial}$-Rand.

c) Falls $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j \, dx_j$, so gilt

$$D_f(\alpha, \alpha, \dots \alpha) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)! \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k \bigwedge_{j=1, j \neq k}^{n} \bar{\partial} a_j \bigwedge_{j=1}^{n} dx_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j f_j \right)^n},$$

und daraus eine Integraldarstellung vom Cauchy-Fantappié typ

$$h(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial G} h(x) \, D_{x-y}(\alpha, \alpha, \dots \alpha) \quad \text{für holomorphe Funktionen } h : \bar{G} \to \mathbb{C}$$

hergeleitet.

Robert Braun.

Deformation kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten

Der von Kuranishi 1962 bewiesene Satz, daß jede kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X_0 eine verselle Deformation besitzt, wird zum Zwecke der Verallgemeinerung auf kompakte komplexe Räume ohne Verwendung elliptischer Differentialgleichungen bewiesen.
Dazu wird die n-dimensionale Mannigfaltigkeit X_0 mit einem endlichen Atlas $\mathfrak{U} = \{\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} Q_i\}$ versehen (wobei die Q_i Quader im $\mathbb{C}^n$ sind), und die X_0 definierenden Verheftungen $F^0_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} | \varphi_j(U_{ij})$ werden geringfügig verwackelt. Diese verwackelten Verheftungen $F = (F_{ij}) = (F^0_{ij} \circ (id + F'_{ij}))$, wo $F'_{ij} < \varepsilon$, bilden eine banachanalytische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{A}$, die verträglichen darunter ($F_{ik} = F_{ij} \circ F_{jk}$) einen banachanalytischen Unterraum $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{A}$. In $\mathfrak{L}$ wird (als Fixraum eines kompakten holomorphen Operators) ein endlichdimensionaler komplexer Unterraum B bestimmt. B ist Basisraum der versellen Deformation $\pi : X \to B$. Die Faser über $b \in B$ ist dabei die durch $b \in \mathfrak{L}$ definierte kompakte komplexe Mannigfaltigkeit.

Michael Commichau. (Göttingen)

Über einfache holomorphe Abbildungen

Eine hol. Abbildung $f: X \to Y$ zwischen komplexen Räumen heißt in einem Punkt $p \in X$ einfach, wenn es eine Umgebungsbasis $\mathfrak{U}$ von p gibt, so daß für alle $U \in \mathfrak{U}$ sämtliche Fasern von $f | U$ zusammenhängend sind, sie heißt in p reduziert, wenn die Faser $X_{f(p)}$ durch p in p reduziert ist. Man zeigt:
„Ist X ein reduzierter komplexer Raum, X vollständiger Durchschnitt von Hyperflächen, Y eine komplexe Mannigfaltigkeit, $f: X \to Y$ eine offene überall einfache holomorphe Abbildung, dann ist f überall reduziert"
Setzt man zusätzlich voraus, daß die Reduktion der Faser $X_{f(p)}$ in einem Punkt $p \in X$ regulär ist, so folgt, daß X in p regulär ist und f in p regulär ist.
Zum Beweis benötigt man neben Aussagen über regulär faktorisierbare holomorphe Abbildungen folgenden Satz, den man mit Sätzen von J. Frisch u. K. Langmann beweist: „Sei X ein reduzierter komplexer Raum und Y eine

komplexe Mannigfaltigkeit, die Strukturgarbe von X sei Cohen-Macaulaysch; ist die offene holomorphe Abbildung $f: X \to Y$ in einem Punkt $p \in X$ nicht reduziert, dann gibt es eine Komponente F von $X_{f(p)}$, so daß in allen $x \in F$ die Abbildung f nicht reduziert ist."

G. Schumacher (Münster)

Sur la détermination des plongements triviaux.

Le théorème de Douady (pour les sous-espaces) peut être essentiellement considéré comme un résultat de "passage du formel au convergent". On illustre ce point de vue en appliquant ce théorème à la démonstration du suivant: Tout plongement formellement trivial d'une variété compacte dans une variété est trivial (c'est à dire isomorphe au plongement d'une fibre dans un produit) - La démonstration utilise aussi un résultat de Schuster à savoir: toute déformation formellement triviale est triviale.
Comme corollaire on peut montrer que tout plongement d'un espace projectif (ou d'une variété grassmannienne) dans une variété tel que le fibré normal soit trivial est trivial.

André HIRSCHOWITZ (Nice).

About Stein neighbourhoods of Stein submanifolds.

It is well-known that if X is a (locally closed) Stein submanifold of $\mathbb{C}^n$, one can find a Stein neighbourhood U of X. (i.e. X closed in U).

One can ask the same question for a (locally closed) Stein submanifold X of Y, Y being a complex manifold.

When Y satisfies one of these two hypothesis:

1°) TY admits a holomorphic connexion,

2°) TY is generated by global sections,

the problem can be solved.

As examples of such Y: Stein manifolds, parallelizable manifolds, homogeneous manifolds under a Lie group action, manifolds whose changes of charts are linear affine, certain families of tori, product of such manifolds...

P. le Barz (Nice).

Intégrales de formes différentielles d''-fermées sur les cycles de certains ouverts de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$

$C^+_d(X)$ est l'espace des cycles analytiques compacts positifs de dimension d de X, ouvert d'une variété algébrique projective.

on définit l'application $\rho_0 : H^d(X, \Omega^d) \to \Gamma(\mathcal{C}^+_d(X), \mathcal{O})$ par intégration

$$\rho_0(\varphi)(c) = \int_c \varphi \quad , \quad \varphi \in H^d(X, \Omega^d), \ c \in \mathcal{C}^+_d(X)$$

Dans le cas où X est d-pseudoconvexe, on s'intéresse aux φ telles que $\int_c \varphi = 0$, $\forall c \in \mathcal{C}^+_d(X)$.

Si Y est une sous-variété algébrique de Z de codimension $(d+1)$ et $X = Z - Y$ est fortement d-pseudoconvexe, on a, modulo un espace vectoriel de dimension finie,

$$\operatorname{Ker} \rho_0 = \operatorname{Im}\left(d' : H^d(X, \Omega^{d-1}) \xrightarrow{d'} H^d(X, \Omega^d)\right)$$

(résultat d'Andreotti - Norguet)

On montre, alors, que l'obstruction de dimension finie est nulle dans les cas suivants:

1°) $\mathbb{P}_n - \tau(\mathbb{P}_k)$ où $n > k+1$

et $\tau(\mathbb{P}_k) = \{ z \in \mathbb{P}_n \mid |z_j| \leq r_j \sup_{i \in \{1,k\}} |z_i| \ \forall j \in \{k+1, n\} \}$ $\quad \mathbb{P}_k = \{ z \in \mathbb{P}_n \mid z_{k+1} = \dots = z_n = 0 \}$

(on calcule $H^{n-k-1}(\mathbb{P}_n - \tau, \Omega^{n-k-1})$ grâce au recouvrement de Leray $\mathcal{U} = (U_j)_{j=k+1,\dots n}$ $U_j = \{ z \mid |z_j| > r_j \sup |z_i| \}$

pour $k=0$, on caractérise $\int_H \psi = 0$, $\forall H$ $(n-1)$-plan de $\mathbb{P}_n - \tau(0)$, par des conditions donnant $z = d'x$, z représentant en Čech de ψ ; on raisonne par récurrence sur n, $n-k$ fixé : démonstration technique) ; on utilise ce résultat pour :

2°) $\mathbb{P}_n - B_\rho(\mathbb{P}_k)$ où $B_\rho(\mathbb{P}_k) = \{ z \in \mathbb{P}_n \mid \sum_{j=k+1}^{n} z_j \bar{z}_j < \rho \sum_{i=0}^{n} z_i \bar{z}_i \}$ $\rho > 0$, ou un domaine $\mathbb{P}_n - \beta(\mathbb{P}_k)$ un peu plus général, toujours fortement $(n-k-1)$-pseudo-convexe, défini à partir d'un voisinage compact $\beta(\mathbb{P}_k)$ de $\mathbb{P}_k$ à bord strictement k-pseudo-convexe dans $\mathbb{P}_n - \mathbb{P}^\infty_{n-k-1}$, $\mathbb{P}^\infty_{n-k-1} = \{ z \in \mathbb{P}_n \mid z_0 = \dots = z_k = 0 \}$

Hélène Krebs (Paris)

F-quasikohärente Garben und lokale Cohomologiegarben

Man gibt sich über einem steinschen Raum X eine Folge kohärenter Garben und Morphismen $\dots \to \mathcal{F}_n \xrightarrow{i_n} \mathcal{F}_{n+1} \to \dots$ und für jedes $W \subset\subset X$ eine ~~Folge~~ von Maßstäben (Epimorphismen $\varphi_n : \mathcal{O}_X^{\nu_n} \to \mathcal{F}_n$ über W). Für $K \subset\subset U \subset W$ definiert man die Pseudonorm $\| \cdot \|_K^{(\varphi_n)}$ über $\Gamma(U, \mathcal{F}_n)$. Mit bestimmten Verträglichkeitsbeziehungen kann man dann über $\Gamma(U, \varinjlim \mathcal{F}_n)$ folgende Pseudonorm definieren, (mit $R \in \mathbb{R}^n$):

$$\|f\|_{K,R} = \inf \left\{ \sum \|f_n\|_K^{(\varphi_n)} \cdot R^n \;\middle|\; f_n \in B(K, \mathcal{F}_n),\; f = \sum f_n \text{ in } \varinjlim \mathcal{F}_n \right\}$$

Die vollständige Hülle von $\Gamma(U, \varinjlim \mathcal{F}_n)$ für die so definierte Topologie ist die Menge der Schnitte einer Garbe $\mathcal{F}$, die wir durch $\widehat{\varinjlim}(\mathcal{F}_n, \varphi_n)$ bezeichnen.

Eine F-quasikohärente Garbe ist eine analytische Garbe $\mathcal{F}$, die über jeden $W \subset\subset X$ eine solche Darstellung hat. Für $\mathcal{F}$ F-quasikohärent hat man folgende Sätze, mit $V \subset U \subset\subset X$ und $x \in U$:

<u>Theorem A:</u> $\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(U) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}(V)$ und $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(U) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}_x$

<u>Theorem B:</u> Für $p \geq 1$, $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$

<u>Runge Theorem:</u> Für V Runge in U ist die Einschränkung $\Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(V, \mathcal{F})$ von dichtem Bilde

<u>Transversalitätssatz:</u> $\mathrm{Tor}_p^{\mathcal{O}(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{O}(V)) = 0$

Als Beispiel gibt man die lokale Cohomologiegarbe $\mathcal{H}^q_S(\mathcal{L})$ wo S ein halbglobaler vollständiger Durchschnitt in X ist, und $\mathcal{L}$ eine lokalfreie analytische Garbe. Die Garbe $\mathcal{H}^q_S(\mathcal{L})$ (mit $q = \operatorname{codim}_X S$) ist F-quasikohärent aber nicht kohärent.

Jean Luc STEHLÉ Paris

Automorphismen von projektiven Schemata.

Ist S eine graduierte k-Algebra (k ein Körper), $X = \mathrm{Proj}\, S$ das zugehörige projektive Schema über k, so kann man alle Automorphismen von X aus den (graduierten) Automorphismen von S erhalten, falls S faktoriell ist. Unter einer weiteren Bedingung an S hat man eine exakte Sequenz: $1 \to k^\times \to \mathrm{Aut}(S) \to \mathrm{Aut}(X) \to 1$.
Ist weiter Y offen in X und $\mathrm{codim}\,(X-Y) > 1$, so kann man alle Automorphismen von Y auf X fortsetzen, d.h.

$$\mathrm{Aut}\,(Y) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(X) \mid \sigma(Y) = Y\}.$$

Diese Ergebnisse kann man benutzen, um die analytischen Automorphismen des Quotienten H_2/Γ_2 zu berechnen (H_2 = Siegelsche Halbebene 2. Grades, Γ_2 = Siegelsche Modulgruppe). Dabei benutzt man die Satake-Kompaktifizierung von H_2/Γ_2 und das Ergebnis von Igusa über die Struktur des graduierten Rings der Modulformen zweiten Grades. Außerdem verwendet man die Tatsache, daß für eine Zariski-offene Teilmenge Y einer projektiven $\mathbb{C}$-Varietät X mit $\dim\,(X-Y) < \frac{1}{2} \dim X$ jeder analytische Automorphismus von Y algebraisch ist.

Siegfried Suckow (Mainz)

Exceptional Points on Real Submanifolds

A real submanifold $M^n \subset \mathbb{C}^n$ has an <u>exceptional point</u> at $p \in M$ if the complex tangent space H_pM has positive dimension. We assume that this dimension is always 1. Note that if $M^n = \{\rho_1 = \cdots = \rho_n = 0\}$ near p, the ρ_j independent, then $H_pM = \bigcap_1^n \ker \partial_p\rho_j$. <u>Definition</u>. An exceptional pt. p is <u>non-degenerate</u> if whenever $b = (b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ in $\mathbb{C}^n$ satisfies $\sum_1^n b_j \partial_p\rho_j = 0$ then $\| 2\sum_1^n b_j S_p\rho_j | H_pM \| \neq \| \sum_1^n b_j L_p\rho_j | H_pM \|$. Here $L_p\rho$ is the E.E. Levi form of ρ and $S_p\rho$ the complex bilinear part of its Taylor expansion (at p). The definition is independent of a choice of defining functions ρ_j and of local holomorphic coordinates.

Bishop (1963) shows that if $<$ holds, then M is not holomorphically convex near p ("elliptic" case). Various special cases indicate that when $>$ holds ("hyperbolic" case) M is holomorphically convex near p. The following is another such special case: Theorem 1. Let $p \in M^n \subset \mathbb{C}^n$ be a non-degenerate exceptional pt. Then $\exists$ a plurisubharmonic non-negative function σ such that $M = \{\sigma = 0\}$ near p iff M is Levi-flat near p. (The latter condition means $L_p \rho_j / H_p M = 0$, all j, and is also invariant). M is holo. convex near such p, because $\{\sigma < \varepsilon\}$ is a basis of pseudoconvex neighborhoods. Theorem 2: Under the same conditions, if M is Levi-flat near p $\exists$ a compact M-neighborhood K of p and a strictly pseudoconvex domain $D \supset K$ such that $\mathcal{O}(D) \xrightarrow{\text{restr.}} C(K)$ is dense (in the uniform norm). These results support the idea that near a non-degenerate point on a Levi-flat manifold the induced function theory (from $\mathbb{C}^n$) is the same as if $M = \mathbb{R}^n$.

Michael Freeman (Lexington)

Local pseudoconvexity in complex manifolds.

Let D be a locally pseudoconvex open subset of X. Suppose $D \subset\subset X$.
Following A. Takeuchi one uses Kähler methods to evaluate the plurisubharmonicity of the function
$-\log$ (distance to the boundary of D)
and can so prove that
I] If there exists on X a strictly plurisubharmonic function, then D is Stein.
The hypotheses is fulfilled, for example, in the case that X is the total space of a

Stein morphism over a Stein manifold

II] If $T(X)$ is a positive bundle (i.e. there exists a Kähler structure on X such that the curvature tensor R satisfies

$\forall x \in X, \forall u, v \in T_x(X) - \{0\} \quad \sum_{i,j,k,l} R_{ij\bar{k}\bar{l}}(x) u^i \bar{u}^j v^k \bar{v}^l > 0$)

then D is 0-convex (i.e. a proper modification of a Stein space at a finite number of points).

Georges Elencwajg
(Nizza)

Holomorphe Seifertsche Faserungen

Als Gegenstück zu einem Satz von Epstein über "Periodic flows on three-manifolds" (Ann. of Math. 95, 1972) erhält man im komplex-analytischen Fall:

Satz: X sei ein kompakter zusammenhängender komplexer Raum. Die additive Gruppe $\mathbb{C}$ operiere holomorph auf X, so dass alle $\mathbb{C}$-Bahnen elliptische Kurven sind. Dann gilt:

a) Der Ineffektivitätskern $I_{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{C}$ ist ein zweidimensionales Gitter, d.h. $T := \mathbb{C}/I_{\mathbb{C}}$ ist eine komplexe Torusgruppe.

b) $X/\mathbb{C}$ $(= X/T)$ hat eine kanonische komplexe Struktur.

c) X ist ein holomorpher Seifertscher Faserraum über $X/\mathbb{C}$ mit den $\mathbb{C}$-Bahnen als Fasern.

Ganz im Gegensatz zum differenzierbaren Fall (und auch reell-analytischen) steht zu vermuten, dass Aussage b) richtig bleibt, wenn man die Kompaktheit von X fallen lässt; für dim X = 2 liegt ein Beweis vor.

Harald Holmann
(Fribourg)

Chaînes sous-analytiques ; homologie et cohomologie des variétés analytiques réelles

Soit X une variété analytique réelle. Une p-préchaîne sous-analytique est un triple (Y', Y'', η) où Y', Y'' sont des ensembles sous-analytiques (au sens de H. HIRONAKA) fermés de X, de dim $\leq p$, $p-1$ resp. et $\eta \in H_p(Y; L)$ où $Y = Y' - Y''$ et où L est un anneau principal. Une p-chaîne sous-analytique $\mathcal{Y}$ est une classe de p-préchaînes pour une certaine relation d'équivalence. Thm (J. POLY) Les chaînes sous-analytiques définissent un préfaisceau $\mathcal{S}_\bullet(X)$ de L-modules; $\mathcal{S}_\bullet(X)$ est un faisceau différentiel Φ-mou pour toute famille paracompactifiante Φ de supports. Tout morphisme propre $f: X \to X'$ de variétés analytiques réelles définit un morphisme $f_*: \mathcal{S}_\bullet(X) \to \mathcal{S}_\bullet(X')$. J. POLY définit l'intégration sur une chaîne sous-analytique.
Thm (Poly) Le morphisme d'intégration $I: \mathcal{S}_\bullet \to \underline{N}_\bullet^{loc}$ (faisceau de germes de courants localement normaux) est injectif et compatible avec les morphismes propres.

Localement, si $\mathcal{Y}$ est une p-chaîne sous-analytique fermée (p-cycle), pour $0 \leq p \leq n-1$, il existe une $(p+1)$-chaîne sous-analytique $\mathcal{Z}$ telle que $\mathcal{Y} = b\mathcal{Z}$ (Lemme de Poincaré); si $\mathcal{Y}$ est compact, pour $1 \leq p \leq n-1$, on peut construire $\mathcal{Z}$ compact tel que $\mathcal{Y} = b\mathcal{Z}$ (Lemme de Poincaré compact). On en déduit Thm. Pour tout faisceau de L-modules $\mathcal{F}$, pour toute famille paracompactifiante Φ, il existe un isomorphisme canonique $H^{\Phi}_q(X; \mathcal{F}) \to H_q(\Gamma_\Phi(\mathcal{S}_\bullet \otimes \mathcal{F}))$.

A l'aide d'une paramétrix introduite par J. Poly, le courant d'intégration $I(\mathcal{Y})$ sur une p-chaîne sous-analytique s'écrit $I(\mathcal{Y}) = \theta - d\omega$, où ω et θ sont localement intégrables, de type resp. $q-1$ et q (avec $q = n-p$). Alors pour toute chaîne sous-analytique compacte Z coupant $\mathcal{Y}$ "proprement", $R[(\theta, \omega), \mathcal{Z}] = \mathcal{K}(I(\mathcal{Z}), \theta) - \mathcal{K}(I(b\mathcal{Z}), \omega) \in \mathbb{Z}$ ($\mathcal{K}(T,S)$ désigne l'indice de Kronecker (de Rham) des 2 courants T, S).
Réciproquement à un couple (θ, ω) de formes différentielles localement intégrables ayant des singularités convenables est associée une chaîne sous-analytique. On en déduit de cela et du Lemme de Poincaré que le groupe de cohomologie $H^q_\Phi(X; \mathbb{Z})$ est canoniquement isomorphe au q-ième groupe de cohomologie de classes de couples de formes à singularités. Cet isomorphisme est compatible aux morphismes propres.

P. Dolbeault (Univ. Paris 6)

Dreidimensionale fasthomogene Kählermannigfaltigkeiten

Es gilt der

Satz: Sei X eine dreidimensionale kompakte ~~K~~ komplexe Kählermannigfaltigkeit und G eine komplexe Untergruppe der Automorphismengruppe von X. Es gebe einen offenen G-Orbit W in X, derart daß $S_G := X \setminus W$ eindimensional sei. Dann folgt:
Es ist $b_1(X) = 0$ oder $b_1(X) = 2$
Ist $b_1(X) = 2$, so ist X biholomorph äquivalent zu $T \times \mathbb{P}_2$, T Torus.
Ist $b_1(X) = 0$, so besteht S_G aus höchstens zwei singularitätenfreien

rationalen Kurven, auf denen G transitiv operiert, oder es ist $X = \mathbb{P}_3$ und S_G eine Gerade in $\mathbb{P}_3$.

S. Oeljeklaus (Bremen)

Zur nichtarchimedischen Uniformisierung von Kurven

Ist eine endlich erzeugbare torsionsfreie Gruppe Γ von gebrochen-linearen Transformationen auf dem eindimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}$ über einem nichtarchimedisch bewerteten lokalkompakten Grundkörper k gegeben, so ist die Menge X der gewöhnlichen Punkte ein Steinscher Raum. Die Gruppe Γ operiert diskret auf X und der Quotientenraum $C = X/\Gamma$ trägt eine kanonische analytische Struktur. Der Raum C ist eine kompakte Riemannsche Fläche und auf natürliche Weise eine projektiv-algebraische Kurve. Ein wesentlicher Schritt dieser Konstruktion besteht in der expliziten Angabe von geeigneten Fundamentalbereichen für Γ. Daraus ergibt sich, daß $H^1(C, \mathbb{Z}_C) \approx \mathbb{Z}^g$, wobei g der Rang von Γ ist und g das Geschlecht von C ist.

L. Gerritzen (Frankfurt)

Über 1-dimensionale rigid analytische Gruppen

Es sei k ein vollständiger nicht archimedisch und nicht trivial bewerteter Körper, der Einfachheit halber sei k auch algebraisch abgeschlossen. Für kompakte rigid analytische Gruppen über k läßt sich der Begriff der guten Reduktion erklären. Ist eine solche Gruppe G 1-dimensional und zusammenhängend (als analytischer Raum), so besitzt G eine maximale offene zusammenhängende Untergruppe $\breve{G}$ mit guter Reduktion. Dieses Resultat ist ein wesentliches Hilfsmittel zur Klassifikation der 1-dimensionalen kompakten und zusammenhängenden Gruppen, es gibt lediglich einige Gruppen –

struktur auf dem affinoiden Einheitskreis E^1, den affinoiden Torus E^*, die analytischen Tori $k^*/(q)$ sowie Gruppen mit guter Reduktion, wobei die Reduktion jeweils eine elliptische Kurve über $\tilde{k}$ ist. Nebenbei erhält man das bekannte Resultat, daß eine elliptische Kurve über k entweder gute Reduktion hat oder ein analytischer Torus ist.

S. Bosch (Münster)

Ein Schachtelungssatz für nicht-archimedische Normen.

Gegeben sei ein kommutativer Ring A mit einer nicht-archimedischen potenz-multiplikativen Halb-Norm n und eine Ringerweiterung B von A. Gesucht wird eine Fortsetzung der Norm n nach B. Dazu wird die "Spektral-Norm" $S_{B|A}[n]$ der Ringerweiterung unter geeigneten Voraussetzungen eingeführt und bewiesen, daß sich die Spektral-Norm für aufeinander folgende Ringerweiterungen transitiv verhält; d.h. es gilt: $S_{C|B}[S_{B|A}[n]] = S_{C|A}[n]$ für Ringerweiterungen $A \subset B \subset C$. Aus dieser Formel wird ein Satz der nicht-archimedischen Funktionentheorie hergeleitet.

Ulrich Güntzer (Berlin).

Über eigentliche holomorphe Abbildungen mit 1-dimensionalen Fasern

1. Es seien X eine (zusammenhängende) komplexe Mannigfaltigkeit, Y ein (red.) kompl. Raum, $\tau: X \to Y$ eine eigentliche, holomorphe, surjektive Abbildung mit rein 1-dimensionalen Fasern, $Q \in Y$, F_0 eine irreduzible Komponente von $\tau^{-1}(Q)$ mit der Normalisierung $\tilde{F}_0$, $g(\tilde{F}_0)$ das Geschlecht von $\tilde{F}_0$, g das Geschlecht der allgemeinen Niveaumenge von τ. Es gilt $g(\tilde{F}_0) \leq g$.

2. Sei zusätzlich Y singularitätenfrei, $g = 0$, $\dim E = \dim Y - 1$ (E = kritische Menge von τ). Dann ist F_0 isomorph zum $\mathbb{P}^1$.

3. Es mögen die Voraussetzungen von 1. gelten, T sei eine komplexe Mannigfaltigkeit, alle Fasern von τ seien irreduzibel, singularitätenfrei und vom demselben Geschlecht $g \neq 1$. Dann ist τ regulär.
4. Ist $\dim X = 2$, $\dim T = 1$ und ist Y singularitätenfrei, so sind schärfere Aussagen bekannt (z.B. auch durch van de Ven, Lazzeri, G. Fischer).
Die obigen Aussagen stehen in engem Zusammenhang mit dem Satz von Saika – Ramanujam über "Purity down-stairs".

Norbert Kuhlmann, Bochum

Über Fortsetzbarkeit von k-analytischen Mengen und k-kohärenten Untergarben

Satz: ("Remmert-Stein") Sei X ein k-analytischer Raum über einem nichtarchimedisch komplett bewerteten Körper k, $Y \subset X$ eine analytische Teilmenge der Dimension d, $A \subset X - Y$ eine analytische Teilmenge mit $\dim_a A \geq d+1$ $\forall a \in A$, dann ist A als analytische Menge nach X fortsetzbar. Speziell ist der topol. Abschluß $\bar{A}$ von A in X die kleinste Fortsetzung von A nach X.
Satz: Sei X ein k-analytischer Raum, $Y \subset X$ eine analytische Menge, $X' = X - Y$. Sei $\mathcal{M}$ eine kohärente Garbe auf X und $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}|X'$ eine kohärente Untergarbe. Wenn $\mathcal{N}' = \mathcal{N}'_n$ ($n = \dim Y$) gleich seiner n-ten Lückengarbe ist und $\mathcal{N}'$ durch globale Schnitte aus $\Gamma(X, \mathcal{M})$ erzeugt wird, so ist $\mathcal{N}'$ als kohärente Untergarbe nach X fortsetzbar.

Werner Lütkebohmert (Münster)

Fortsetzung holomorpher u. meromorpher Funktionen in eine Hyperfläche hinein

Theorem 1. Sei X ein (der Einfachheit halber) rein dimensionaler (rigid-) analytischer Raum $N \subset X$ irreduzible analyt. Menge der Kodimension 1, f eine meromorphe Fktion auf $X \setminus N$. Wenn ein $x_0 \in N$ und eine Umgebung $U(x_0) \subset X$ existiert, sodaß $f \mid U \setminus N$ nach U meromorph fortsetzbar ist, dann ist f nach X fortsetzbar. Ist X normal, so gilt das Entsprechende für holom. Funktionen.

Theorem 2 („Thullen – Remmert – Stein“). Sei X analyt. Raum, $N \subset X$ irreduzibel von der Dimension d, $M \subset X \setminus N$ rein-d-dimensional. Wenn es ein $x_0 \in N$, $U(x_0) \subset X$ gibt so daß M als analyt. Menge nach U fortsetzbar ist, ist M nach ganz X fortsetzbar.

Der Teil des Beweises, der für Th. 1 und Th. 2 parallel verläuft, wurde skizziert.

W. Bartenwerfer (Göttingen)

TOPOLOGIE

8.9. – 14.9.1974

Beziehungen zwischen algebraischer und topologischer K-Theorie.

$\xi \mapsto \Gamma(\xi)$ induziert den Swanschen Isomorphismus $KX \xrightarrow[\cong]{\sigma} K_0 C_{\mathbb{C}}(X)$ für ξ = komplexes Vektorbündel über dem kompakten Hausdorffschen Raum X, $C_{\mathbb{C}}(X)$ = komplexwertige stetige Funktionen auf X, $\Gamma(\xi) = C_{\mathbb{C}}(X)$-Modul der Schnittflächen in ξ, KX = Atiyah-Hirzebruch K von X, $K_0 A$ = Grothendieck-Gruppe der Isomorphismenklassen projektiver endlich erzeugter A-Moduln. Die Atiyah-Bott-Shapiro Konstruktion $P \mapsto \xi$ induziert den Homomorphismus $K_0 A \xrightarrow{\mu} KX$, wo $\mu = \sigma^{-1}$ für $A = C_{\mathbb{C}}(X)$, und wo μ auch definiert ist in den Fällen $A = R_{\mathbb{C}}(V)$ = komplexer Koordinatenring der (reellen) affinen Varietät $V = (\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I_V) \otimes \mathbb{C}$, $V = X$ [Fossum], oder $A = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(Y) = R_{\mathbb{C}}(V)\, S^{-1}$ = Ring der komplexwertigen algebraischen Funktionen auf einem (reellen) algebraischen Modell Y der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X [Lønsted]. Nach Fossum gilt $K_0 R_{\mathbb{C}} S^n \xrightarrow[\cong]{\mu} KS^n$, und daraus ergibt sich mit Hilfe der Bott'schen Periodizität $K_0 R_{\mathbb{C}} X \xrightarrow{\mu} KX \to 0 \Rightarrow K_0 R_{\mathbb{C}}(X \times S^{2m}) \xrightarrow{\mu} K(X \times S^{2m}) \to 0$. Der reelle Fall wird ähnlich behandelt und die Lønstedschen Resultate führen zu $K_0 \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(Y) \otimes K_0 \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(S^{2m}) \xrightarrow{\cong} K_0 \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(Y \times S^{2m})$. Fragen: Funktorielle Zusammenhänge? Axiomatische Charakterisierung von K_0? $K_0(A \otimes B) = ?$ im allgemeinen.

Alfred Aeppli.

Minimal models of differential graded algebras and applications to closed geodesics

In differential geometry one studies the question, if there exist closed geodesics on a compact Riemannian manifold, and if the answer is yes, how many can be found.
In 69 Gromoll and Meyer stated the following theorem, which shifts the problem onto a purely algebraic-topological level:

Theorem: (Gromoll/Meyer) On every simply connected (and connected) compact Riemannian manifold M there exist infinitely many closed geodesics, which are geometrically distinct, if the sequence of Betti-numbers of the rational cohomology of the free loops space ΛM is unbounded.

~~The~~ (The free loops space ΛM equals ~~the~~ the space of all continuous mappings from S^1 to M) –

Conjecture: The topological condition in the Gromoll-Meyer theorem is fulfilled iff the rational cohomology algebra of M has more than one minimal generator.

It is not yet decided, whether the conjecture is true or not.
At least, one direction is easy to prove:
If there is at most one generator, then the Betti-numbers of ΛM are bounded. –
For the other direction, we give the following $\boxed{\text{partial}}$ $\boxed{\text{positive}}$ answer:

Theorem: (Coefficients always $\mathbb{Q}$; all spaces being simply connected): If $H^*(M)$ is free or the first nontrivial relation in it occurs in an <u>even</u> dimension, then the conjecture is true

The theorem for instance applies to manifolds which allow a CW-structure with only even-dimensional cells. –
The proof uses the construction of Sullivan, in which to each space X of the homotopy-type of a CW-complex there is assigned a certain differential graded (commutative!) algebra, whose homology

is isomorphic to the cohomology of X (coefficients $\mathbb{Q}$).
This algebra is the minimal model of the rational de-Rham-complex of X, which is a commutative DGA (= diff. gr. alg.). It is a special case of the general procedure of constructing a "minimal model" for arbitrary connected + simply connected commutative DGA's. (See Sullivan).
The method of minimal models allows to construct the minimal model of ΛM out of the minimal model of M. You can now calculate the cohomology of ΛM by using the minimal model of ΛM. The remaining part of the ~~theorem~~ proof is rather technical.

Proposition: For every connected, simply connected, compact mfld of dim ≤ 9 the conjecture is true

The proof is technical and (partially) ~~uses~~ the theorem, as well as the proof of the theorem.
In the remaining cases (where the first relation in H^*M occurs in odd dimension) a general answer is not (yet) available. However the general framework described above, allows us to give some further (positive) statements also in this case.
Since they are rather technical and special, we omit them here.

Peter Klein, Bonn

Mixing Homotopy Types of Manifolds

Conventions: Spaces are pointed, CW cplxs., up to homotopy type, and maps are basepoint-preserving with connected (homotopy-theoretic) fibre. P is a set of primes, Q the complementary set, and a P-equivalence is a map f such that $\pi_i f$ is a locally-finite Q-group, $i \geq 2$. A (P,Q)-square for h, $S(h)$ consists of maps f_i, g_i, and h, with $g_2 f_2 \sim f_1 g_1 \sim h$, and f_i P-equivalences, g_i Q-equivalences, and h a 0-equivalence. Given $S(h^{(i)})$, $i = 1,2$, such that range $h^{(1)}$ = range $h^{(2)}$, we form the pullback squares corresponding to $f_1^{(1)}, g_2^{(2)}$, and $f_1^{(2)}, g_2^{(1)}$, obtaining (P,Q) squares $S(h^{(12)})$ and $S(h^{(21)})$, respectively, said to be obtained from $S(h^{(1)})$ and $S(h^{(2)})$ by mixing.

Proposition 1: a) Every (P,Q)-square is cartesian.
b) Every (P,Q)-square for h is co-cartesian provided h is nilpotent.

We say that h is nilpotent (for any map h) when $\pi_1 h$ acts nilpotently on all $\pi_i h$.

Proposition 2: For any nilpotent h, there exists one and (up to homotopy) only one (P,Q)-square for h.

In case h is a map of 1-connected spaces (or simple spaces), this result is due to Zabrodsky (Chicago notes, 1968).

Therefore, given $h^{(1)}, h^{(2)}$ 0-equivalences with range $h^{(1)}$ = range $h^{(2)}$, we can form their (P,Q)-squares, mix, and obtain $h^{(12)}, h^{(21)}$: this is what Zabrodsky has called mixing homotopy types. He showed that when one mixes maps of finite-H-spaces, one obtains maps of finite H-spaces. By results of Browder, such spaces are homotopy-smoothable as closed smooth manifolds (at least in 1-connected case of dim. ≥ 5 and $\neq 4k+2$). Thus, Zabrodsky can mix a special class of manifolds, obtaining similar manifolds. Browder asked (Madison, 1970) whether this can be generalized.

Theorem 1: a) Mixing closed, 1-connected PL (topological) n-manifolds $n \geq 5$, produces the same (up to homotopy type). b) Similarly for closed, 1-connected smooth manifolds, n odd and $n \geq 5$. c) There exist counterexamples to mixing smooth, 1-connected $4k$-manifolds (which are 3-connected 8-manifolds).

Application: In Inventiones 1971, I prove the following result {manifolds are PL}:

Theorem: The following are equivalent: a) $\exists$ nullhomotopic, locally-flat $S^{n-1} \hookrightarrow M^n$ not bounding contractible submanifold of M^n; b) M^n is a connected sum $\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n$, where Σ_1^n is a non-trivial P-sphere, Σ_2^n a non-trivial Q-sphere.

(A P-n-sphere is a 1-connected rational homotopy n-sphere containing no homology P-torsion. It is non-trivial if it is not a homotopy sphere.) Observe: a) Among PL n-manifolds, the property of being a non-trivial P-n-sphere is describable entirely in terms of algebraic topology invariants. b) The property of being a non-trivial (P,Q)-sphere is, by Browder's Splitting Theorem, a homotopy invariant among PL n-manifolds.

Problem: ~~Describe~~ Characterize (P,Q)-spheres in terms of algebraic top. invariants

Theorem 2: M^n is a non-trivial (P,Q)-sphere for some P and Q, if and only if M^n is a 1-connected, rational homotopy sphere such that Tor $H_* M^n$ is non-trivial and non-primary.

The proof involves constructing a 0-equivalence $h: S^n \to M^n$, forming a (P,Q)-square for h, for a good choices of P, and showing that, when h is properly chosen, M^n is homotopy equivalent to the connected sum of the remaining two spaces (PL n-manifolds by Th. 1) in the square. This connected sum is a non-trivial (P,Q)-sphere, correct choices having been made, and so, by Browder's Splitting Theorem, it follows that M^n is also.

Peter J. Kahn
(Cornell U., Ithaca, N.Y., U.S.A.
Heidelberg)

Generalised Degree Theories

Let Ω^m be an open bounded subset of R^n and let $\bar{\Omega}^m \xrightarrow{f} R^n$ be any continuous map. If $p \in R^n - f(\partial\Omega)$ and if $m = n$ then an integer $d(f,p)$, the Leray-Schauder degree can be defined whose non vanishing is a sufficient condition for p to lie in the image of f. If $m \geq n$, then a generalised degree lying in $\pi_m(S^n)$ can be defined using Pontryagins formulation of the homotopy groups of spheres. By suspension arguments this can be utilised to define a degree theory with values in the stable k-stem for a large class of maps between Banach spaces including compact perturbations of Fredholm maps of index k.

Roger Fenn
(University of Sussex, England)

Combinatorial Topology of Euler Spaces.

Let $(X, \partial X)$ be a polyhedral pair with $\dim X = n$.

Def. X is a euler n-polyhedron with boundary ∂X, if $(\forall x \in X)$ $\quad \chi(X, X-x) = \begin{cases} (-1)^n & , \text{if } x \in X - \partial X \\ 0 & , \text{otherwise.} \end{cases}$

For a euler space X $(\partial X = \phi$ for example$)$, D. Sullivan defined Stiefel-Whitney homology classes $s_p(X)$ of X in $H_p(X, \mathbb{Z}_2)$.

We have shown the product formula for the total Stiefel-Whitney homology classes, by defining them for cell complex divisions of euler polyhedra. We also observed that for a ~~map~~ proper PL map $f: X \to Y$ between euler polyhedra X and Y, the total Stiefel-Whitney homology class $s(f)$ of f can be defined so that

$$s(f) = s(Y) - f_* s(X) \in H_*(Y, \mathbb{Z}_2).$$

As an example, we have given an explicit formula for the Stiefel-Whitney homology classes of a complete intersection in a complex projective space with isolated singularities as well as the total chern homology classes. In fact, the difference between those of such singular one and the non-singular one only lies on the Euler classes (0-dimensional chern or integral Stiefel-Whitney homology classes). Then we have observed the formula is a sort of generalization of the Plücker formula for a plane curve.

Mitsuyoshi Kato.
(The University of Tokyo,
Universität Bonn).

Tame singularities of differentiable functions.

If one looks after the top. configuration of an isolated singularity x_0 of a diff. function $f: M^n \to \mathbb{R}$ differential equivalence is to strong a relation, so one has to consider a weaker one: Two germs of differential functions with isolated singularity x_0 are equ. if there is a germ of a homeomorphism ~~wh~~ which leaves x_0 fixed and is diffeom. outside x_0.

Finite determined or analytic singularities are tame i.e. the level surface $f^{-1}(f(x_0))$ has a cone structure in a neighbourhood of x_0. But as shown by Takens in 1967 there are wild singularities. For a better understanding of tame singularities one has to show that there are balls $D(x_0)$ as regular neighbourhoods of x_0 where a regular neighbourhood is essentially a flow-box for a gradient flow ~~with~~ rounded edges. By the way one sees that a tame singularity has a cone structure in a whole neighbourhood and that it is uniquely determined up to equ. by the classes of oriented embeddings of the hypersurface $f^{-1}(f(x_0)) \subset \partial D(x_0)$.

Wildnes is an unstable phenomenon: If one defines the suspension of $f(x): M^n \to \mathbb{R}$ by $f(x)+y^2-z^2 : M^n \times D^2 \to \mathbb{R}$ one can show:

Thm: Every isolated wild singularity can be tamed by iterated suspension.

Suspension up to a stable range makes it also easier to classify: If the cohomology classes hanging at the singularity are in addition ~~ats~~ spherical one has a classification by $H^*(D(x_0), D^-(x_0))$ where $D^-(x_0)$ is the set of points with $f(y) < f(x_0)$. There are some connections between $H^*(D, D^-)$ and its (higher) cohom. operations on one side and the singularity on the other side also in other cases.

M. Klingmann, Heidelberg

The ε Families in the Stable Homotopy of Spheres

Let $p>3$ be prime and $BP(\ )$ the Brown Peterson homology theory for p. Recall

$$\pi_* BP = Z_{(p)}[v_1, v_2, \ldots] \qquad \deg v_i = 2p^i - 2$$

The study of which cyclic modules over $\pi_* BP$ can be realized by spaces is a problem of current interest. For example the space $V(1)$ such that

$$BP_* V(1) \simeq \pi_* BP / (p, v_1)$$

is important in studying the β family $\beta_i \in \pi^S_{2i(p^2-1)-2p}$. The construction that gives $V(1)$ also gives spaces $V^{(s)}(1)$ with

$$BP_*(V^{(s)}(1)) \simeq \pi_* BP / (p, v_1^s) \qquad s \geq 0.$$

Thm 1: For $r = 1, \ldots, p-1$ there is a map
$\Delta_r : S^{2p(p^2-1)} \cancel{A_{11}}\ V^{(p-r)}(1) \longrightarrow V(1)$
such that

(a) $BP_*(C(\Delta_r)) = \pi_* BP / (p, v_1^{p-r}, v_2^p)$
where $C(\Delta_r)$ is the mapping cone of Δ_r

(b) There is no such map for $r = p$.

Thm 2: Define $\varepsilon_r(t) \in \pi^S_{2(p-1)[tp^2+t-r]-2}$ by the diagram

$$\begin{array}{ccc}
S^{2tp(p^2-1)} V^{(p-r)}(1) & \xrightarrow{(\Delta_r)^t} & V^{(p-r)}(1) \\
\text{include bottom}\uparrow\text{cell} & & \text{collapse}\downarrow\text{onto top cell} \\
S^{2tp(p^2-1)} & \xrightarrow[\varepsilon_r(t)]{} & S^{2(p-r)(p-1)+2}
\end{array}$$

Then

(a) $\varepsilon_r(t) \neq 0 \quad : r = 1, \ldots, p-1, \quad t > 0$

(b) $\varepsilon_r(1) = \varepsilon_r$, where ε_r is the element introduced by Toda

(c) $\varepsilon_{p-1}(t) = \beta_{tp}$.

Larry Smith
Bloomington, Indiana.

Generalized Flag Manifolds as Framed Boundaries
(jointly with Larry Smith).

Let G be a compact, connected Lie group and T a maximal torus. It has been known for over a decade that the homogeneous space G/T is a π- ~~mani~~ manifold (= stably parallelizable manifold) and hence an (oriented) boundary; however it is only comparatively recently that explicit stable framings and bounding manifolds for G/T have been exhibited.

We exhibit an explicit manifold W which bounds G/T, and then an explicit framing on W. Hence for this framing, call it Φ, the element $[G/T : \Phi]$ in stable homotopy is zero. Since $KO^{-1}(G/T)$ is a $\mathbb{Z}/2$-vector space, it follows easily that for any framing Ψ on G/T, $2[G/T : \Psi] = 0$ in π_*^S.

Our methods involve the construction of a G-homogeneous 2-sphere bundle, whose total space is G/T: this is shown to be the sphere bundle of a homogeneous 3-plane real vector bundle, and hence the disk bundle provides the required W. The framing on W is then constructed using further homogeneity properties of the bundles in question.

Harsh V. Pittie
Courant Institute, New York
and Univ. of Warwick, England.

Dyer-Lashof Operations in the theory of loopspaces
(sub-titled: the K-theory of the Adams Conjecture)

Let X be an ∞-loopspace, Y a 2^{nd}-loopspace, $K_*(-;\mathbb{Z}/p)$ (mod 2 graded) complex K-homology and p a prime.

Theorem 1: (Results for Ω^2-spaces in [....])

There exist operations

$$Q : K_\alpha(X;\mathbb{Z}/p) \longrightarrow K_\alpha(X;\mathbb{Z}/p) \big/ (x^p \mid x \in K_*) \qquad (p \neq 2)$$

$$Q : \frac{\ker \beta_2}{\operatorname{im} \beta_2} \longrightarrow \frac{K_\alpha(X; \mathbb{Z}/_2)}{\{x^2 \mid x \in \ker \beta_2 \subset K_*\}} \qquad (p=2)$$

$$\cap$$

$$\frac{K_\alpha(X; \mathbb{Z}/_2)}{\operatorname{im} \beta_2}$$

($\beta_2 \equiv$ $Z_2 \to Z_4 \to Z_2$ Bockstein)

$$\left[Q_\alpha : \frac{\ker \beta_2}{\operatorname{im} \beta_2} \longrightarrow K_1(Y; \mathbb{Z}/_2) \right]$$

$$\cap$$

$$\frac{K_\alpha(Y; \mathbb{Z}/_2)}{\operatorname{im} \beta_2}$$

satisfying

(i) naturality for Ω^∞-maps [Ω^2-maps]

(ii) $Q(x+y) = Q(x) + Q(y) - \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i}/p \; x^i y^{p-i}$ if $|x| \equiv |y| \equiv 0 \pmod{2}$

and Q linear otherwise [Q_α linear]

(iii) Cartan formula

$$Q(x.y) = \begin{cases} Q(x).Q(y) & \text{if } |x| \equiv |y| \equiv 1 \ (2) \\ Q(x)\,y^p + x^p\,Q y & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\left[Q_{\alpha+\beta}(x.y) = x^2 Q y + Q x . y^2 \right].$$

(iv) Q & Q_α commute with the duals of the Adams operators.

(v)(a) ($p \neq 2$) (β_p Bockstein)

$$\beta_p Q x = \begin{cases} Q \beta_p x - x^{p-1} \beta_p x & , |x| \equiv 0 \ (2) \\ Q \beta_p x & , |x| \equiv 1. \ (2) \end{cases}$$

(b) $p=2$

$$\beta_2 Q x = \begin{cases} Q B_2 x & |x| \equiv 0 \ (2) \\ (B_2 x)^2 & |x| \equiv 1 \ (2) \end{cases}$$

($B_2 =$ 2nd Bockstein)

$$\left[\beta_2 Q_\alpha x = \begin{cases} (B_2 x)^2 & \alpha \equiv 0 \ (2) \\ (B_2 x)^2 + x^2 & \alpha \equiv 1 \ (2) \end{cases} \right]$$

(vi) σ is suspension:

$$\sigma Q x = \begin{cases} Q \sigma x & , |x| \equiv 0 \ (2) \\ \sigma(x)^p & , |x| \equiv 1 \ (2) \end{cases}.$$

N.B. For convenience constants in Z/p have been omitted in the formulae (iii), (V) & (Vi).

Despite difficulties of iterating Q (mod 2), because of (V) we have

Proposition 2: $K_*(X; Z/p)$ and iterates of Q generate $K_*(QX; Z/p)$ $\quad (QX = \lim_n \Omega^n S^n X)$,

In contrast we have.

Proposition 3 $K_*(Z; Z/2)$ and $\{Q_\alpha\}_{\alpha=0,1}$ do not generate $K_*(\Omega^2 S^2 Z; Z/2)$ [e.g. $Z = SZ'$ and torsion free].

Now let spaces be 2-local. From calculations of the K-theory of Ω^∞-spaces QS^0, SG, $Z \times BU$, $Z \times BO$ and

$J_1 = \text{fibre}(BO \xrightarrow{\psi^3-1} BSpin)$, $J_2 = \text{fibre}(BSO \xrightarrow{\psi^3-1} BSO)$

the following results may be obtained concerning the splitting $SG = J \times \text{Coker} J$, where $J = J_1 \simeq J_2$ (as spaces only).

Theorem 4 (a) There is no H-space map $J_1 \to SG$ which is split.
(b) There is an Ω^3-map $J_2 \to SG$ which is split.

Theorem 5: $\widetilde{KO}^*(B^i \text{Coker} J) = \widetilde{KO}_*(B^i \text{Coker} J)$
$= \widetilde{KU}_*(B^i \text{Coker} J) = \widetilde{KU}^*(B^i \text{Coker} J) = 0 \quad i > 0$,
where for odd primes (a prime power) p, $J \to BU \xrightarrow{\psi^q-1} BU$ is a fibration with q a generator of the multiplicative units mod p^2.

Out of these calculations also come the following: (any p)

Theorem 6 (i) If $J \xrightarrow{f} X$ gives a $KU_*(-; Z)$ isomorphism then f is split
(ii) $J \xrightarrow{f} SG$ is split if and only if f_* is a $K_*(-; Z/p)$ isomorphism.

The splitting criterion of 7(ii) is almost always satisfied and this leads to the following applications.

(A) Given $J \xrightarrow{f} SG$ split; if $SG = B\Sigma_\infty \xrightarrow{\pi} BGL(\mathbb{F}_q)^+$ is defined by the permutation matrix map then $\pi \circ f$ is split, hence by counting the ranks of homology groups it is a homotopy equivalence. This result gives a simpler calculation of Quillen's, $K_i(\mathbb{F}_q)$ than Quillen's calculation.

(B) A similar result for $J' = \text{fibre } BO \xrightarrow{\psi^q - 1} BO$ gives $J' \simeq BO(\mathbb{F}_q)$ at $p \neq 2$ and gives Karoubi's $L_i(\mathbb{F}_q)$ — a result of Friedlander.

(C) By 7(i) it is very easy to classify homotopy equivs. of J and the set of homotopy classes of maps $J \to J$ which carry homotopy equivalences can be calculated as (at $p \neq 2$) a subset of $\dfrac{KU^0(BU)}{(x \sim \psi^q x)}$

(D) If $h_1, h_2 : \mathbb{R}P^\infty \to J$ induce the same map in $K_*(-; \mathbb{Z}/2)$ [there are only two choices] differ by a homotopy equivalence.

(E) If one can construct a $J \to SG$ (knowing the Quillen equivalence of application (A) gives $BGL(\mathbb{F}_q)^+ \to B\Sigma_\infty^+ \simeq SG$ which is split at $p \neq 2$) it is easy to test if it is split. This gives $J(X) \subset [X, SG]$ as a split factor which could be used to prove the Adams conjecture — Using a map from (A) is merely going round a circle but RM Seymour has maps $J \to SG$, independently of (A), which I hope to examine for splittings and so give an independent K-theoretic resolution of the Adams conjecture phenomenon, the algebraic K- and L- theory of a finite field, $\mathbb{F}_q$, simultaneously.

Victor Snaith

EMMANUEL COLLEGE,
Cambridge.

Homology decompositions of connected algebras.

The aim of the following considerations is to determine the Pontryagin ~~ring~~ homology ring of some loop spaces, with coefficients in a fixed field $\underline{k}$

1. Two examples to start with

Let $X^* = S^{n_1+1} \times \cdots \times S^{n_k+1}$ a product of 1-connected spheres ($n_i > 0$). Adams and Hilton have given a chain algebra $A(X^*)$ such that there exists a chain equivalence $A(X^*) \to C_*(\Omega X^*)$. The algebra $A(X^*)$ is freely generated by elements a_I, where I runs the non-empty subsets of $\{1, \ldots, k\}$, with $|a_I| = \sum_{i \in I} (n_i+1) - 1$; the differential on $A(X^*)$ has the form:

$$da_I = \sum \varepsilon_{I', I''} a_{I'} a_{I''}$$

with $I' \cup I'' = I$, $I' \cap I'' = \emptyset$, $I' \neq \emptyset \neq I''$.

On the other hand, since $\underline{k}$ is a field, one has

$$H_*(\Omega(\Pi S^{n_i+1})) = \bigotimes_i H_*(\Omega S^{n_i+1}) = \bigotimes_i P(x_i)$$

with $|x_i| = n_i$.

Now, we notice that the mapping $A(X') \to \bigotimes_i P(x_i)$ defined by $a_{\{i\}} \to x_i$, $a_I \to 0$ if $\operatorname{card} I \geq 2$ is a homology isomorphism, $\otimes P(x_i)$ being given the 0 differential.

Similar considerations hold for $\mathbb{C}P(\infty)$.

One has $\Omega \mathbb{C}P(\infty) \sim S^1$ as H-spaces, and therefore $H_*(\Omega \mathbb{C}P(\infty)) = E(x_1)$, $|x_1| = 1$:

Now the mapping $\Omega B E(x_1) \to E(x_1)$ is a homology isomorphism, where B (resp Ω) denotes the bar-construction (resp. cobar-const.) functor. One has the following description for $\Omega B E(x_1)$: it is freely generated by elements a_p, with $|a_p| = 2p-1$, and $da_p = \sum_{\substack{p'+p''=p \\ p'>0 \\ p''>0}} a_{p'} a_{p''}$. One may show that this ~~abelian~~ algebra is a Adams - Hilton model for $\Omega\mathbb{CP}(\infty)$.

Now one may show that the homology of the subalgebra of $A(X^*)$ generated by the a_I's such that card $I \leq k$ is isomorphic to $H_*(\Omega T_k)$ where T_k is the "fat-wedge" of spheres (with $k-k$ points at the base point). Similarly the subalgebra of ~~H~~ $\Omega BE(\alpha_1)$ generated by the a_k with $k \leq n$ corresponds to $\Omega\mathbb{CP}(n)$.

2/ <u>Homology dec. for a connected algebra.</u>

Let A be a (non diff) algebra, graded, connected ($A_0 = \underline{k}$). A homology decomposition is a diff. morphism of diff. algebras (A being given the 0 diff):

$$q : \Omega \longrightarrow A$$

such that:

1/ $q_* : H\Omega \xrightarrow{\cong} A$

2/ Ω is free ($\Omega \cong T(V)$ for some graded v. space V)

3/ Ω is minimal: i.e. every bdry in Ω is decomposable, $d\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}\cdot\bar{\Omega}$.

<u>Thm 1</u>: Every A has a homology decomposition, unique up to isom.

Idea of proof: start ~~off~~ with a minimal set of generators for A, that is to say a morphism

$$\rho^1 : \Omega^1 = T(QA) \twoheadrightarrow A$$

and give $T(QA)$ the zero diff. Add to $T(QA)$ generators whose bdry form a minimal set of defining relations. Call this Ω^2. The obvious mapping $\Omega^2 \to A$ induces $\rho^2_* : H\Omega^2 \twoheadrightarrow A$ which admits a section (as algebras). Add to Ω^2 generators whose bdry are cycles in Ω^2 whose classes form a minimal set of ideal generators for $(\rho^2_*)^{-1}(0)$. Call this Ω^3. Iterate the procedure to get

$$\Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \cdots \subset \Omega^n \subset \cdots$$

and set $\Omega = \varinjlim \Omega^n$. The mapping $\rho : \Omega \to A$ which extends $\rho^1 : \Omega^1 \to A$ by zero on the other generators is a homology decomposition of A.

<u>thm</u> 2: one has the diagram:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1 = H\Omega^1 \arrow[r] \arrow[dr, "\rho^1"'] & H\Omega^2 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \cdots \arrow[r] & H\Omega^n \arrow[r] \arrow[dll, shift left] & H\Omega = A \arrow[dlll, "\cong"] \\
 & A \arrow[u, shift left] \arrow[urr, shift left] & & &
\end{tikzcd}$$

which in particular shows that A is a retract of $H\Omega^n$ as an algebra.

<u>thm</u> 3: the above construction shows that $\Omega = T(U)$ where $U = U^1 \oplus U^2 \oplus \cdots \oplus U^n \oplus \cdots$ with $U^1 = QA$, and in general U^n is the v. space spanned by generators added ~~the~~ to Ω^{n-1} to make Ω^n. Then one has:

$\forall n \geq 1$, $\forall q$ $\quad (U^n)_q \cong \mathrm{Tor}^A_{n, q-n+1}(\underline{k}, \underline{k})$

this can be viewed as a generalization of the well known fact that Tor_1 measures the generators in A and Tor_2 the relations. (beware the shift of degrees!)

<u>thm</u> 4. the retraction: $H\Omega^n \rightleftarrows A$ induces $\mathrm{Tor}^{H\Omega^n}_{p,*}(\underline{k},\underline{k}) \rightleftarrows \mathrm{Tor}^A_{p,*}(\underline{k},\underline{k})$, and one has the exact sequence, $\forall p \geq 1$, $\forall n \geq 2$

$$0 \to \mathrm{Tor}^A_{p+n,\, q-n+1}(\underline{k},\underline{k}) \to \mathrm{Tor}^{H\Omega^n}_{p,q}(\underline{k},\underline{k}) \rightleftarrows \mathrm{Tor}^A_{p,q}(\underline{k},\underline{k}) \to 0$$

3/ <u>Applications</u>. the filtration of $A(x')$ by the cardinal of the indices has the above properties; this enables one to complete:

$$\mathrm{Tor}^{H_*(\Omega T_n)}_{p,*}(\underline{k},\underline{k})$$

and to prove the following:

Prop: $H_*(\Omega T_r; \underline{k})$ is generated by $(r \geq 2)$

$$\begin{cases} \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ , \bar{a}_k, & (a_i \text{ is a cycle}) \\ \overline{dx_I} & \text{for all } I \subset \{1, .., k\} \text{ with } |I| = r+1 \end{cases}$$

and a minimal set of defining relations is given by:

$$\begin{cases} [a_i, a_j] = 0 \\ d^2 x_J = 0 & \text{where } |J| = r+2 \end{cases}$$

(developping this give a generalized Jacobi (or (Toda-Nakaoka) identity between the $\overline{dx_I}$ and the $\bar{a}_i$'s.

Similarly, we can prove $H_*(\Omega\, \mathbb{C}P(n)) = E(x_1) \otimes P(w_{2n})$

(also $H_*(\Omega\, \mathbb{H}P(n)) = E(x_3) \otimes P(w_{4n+2})$

Similar arguments can be applied to get descriptions by generators and relations of

$H_*(\Omega(T_{r+s}/T_r))$ where T_r, ~~to~~ T_{r+s} are fat wedges of spheres as above

and $H_*(\Omega(\mathbb{C}P(n+r)/\mathbb{C}P(n))$

the formulas are to long to be given here and will appear elsewhere. Let's just mention:

$$H_*(\Omega[\mathbb{C}P(\infty)/S^2]) = E(x_3) \otimes P(y_5)$$

Final remark: if $\underline{k} = \mathbb{Q}$, the construction of a homology decomposition of an algebra seems to be a particular case of a "Eckmann-Hilton dual" of Sullivan's minimal models for cochain algebras (cf P. Klein's talk)

J.M. LEMAIRE (Nice)

(r,s) - stable unfoldings & catastrophe theory.

In Thom's catastrophe theory, models for events in nature are constructed by considering a manifold B (the base space, the space where the event is observed) and a manifold M (the state space, parametrized by all the physical variables relevant to describing the event); a process is a subset $s \subset M \times B$. A point $b \in B$ is regular if $\exists$ a nbhd $U \subset B$ of b and a homeomorphism $h: M \times U \to M \times U$ s.t. $h(s \cap (M \times U)) = s_b \times U$ (where $s_b = \{x \in M \mid (x,b) \in s\}$) and s.t. $\pi h = \pi$, where $\pi: M \times B \to B$ is the projection. What an observer sees is the set of catastrophe points (i.e. non-regular points of B) of the process. In the simplest case, the gradient-model case, one has a function $V: M \times B \to \mathbb{R}$ of class C^∞, which one considers as a family of potential functions on M parametrized by B, and one takes s to be a subset of the set $\{(x,u) \in M \times B \mid V/M \times \{u\} \text{ has a local minimum at } (x,u)\}$.

Clearly it would be desirable to have a local classification of such functions V, done in such a way that information about the catastrophe set is not lost; in other words, one wishes to classify the V's up to diffeomorphisms of $B \times M$ which lie, via π, over a diffeomorphism of B (and up to families of diffeomorphisms of $\mathbb{R}$, parametrized by B, operating on the left). When $\dim B \leq 4$, and under a physically reasonable stability assumption on V, Thom's list of the 7 elementary catastrophes is such a classification.

However when B represents space-time, physically relevant information is lost in this classification since the diffeomorphisms used in the classification can operate on B arbitrarily, ignoring the distinction between space and time. ~~Thus if we~~ Thus the same catastrophe set (for example (hypothetically) the cone $w^2 + x^2 + y^2 = z^2 \subseteq \mathbb{R}^4$) might be given by Thom's classification for two different models which differ in that in one case planes of constant time are normal to the w-axis (in this case an observer of the event would see (in space time) a moving hyperboloid) and in the other planes of constant time are normal to the z-axis (an observer would then see a sphere suddenly appearing and growing); the two events appear different but are given the same description by Thom's classification.

For this reason we now seek a classification of the V's up to a smaller class of diffeomorphisms, whose operation on B must preserve some given foliation of B.

Locally such a V is a $(\dim B)$-dimensional unfolding; the equivalence notion we need for the finer classification is the following:

Let $f \in m(n+r+s)$, $g \in m(n+r+s)$. Define $F \in \mathcal{E}(n+r+s, 1+r+s)$, $G \in \mathcal{E}(n+r+s, 1+r+s)$ by $F(x,u,v) = (f(x,u,v), u, v)$; $G(x,u,v) = (g(x,u,v), u, v)$ for $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $v \in \mathbb{R}^s$. An (r,s) equivalence from f to g is a quadruple $(\phi, \psi, \rho, \Lambda)$ of local diffeos near 0 of $\mathbb{R}^{n+r+s}$, $\mathbb{R}^{r+s}$, $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{R}^{1+r+s}$ resp. s.t.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R}^{n+r+s} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^{1+r+s} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^{r+s} & \xrightarrow{q} & \mathbb{R}^s \\
\phi \downarrow & & \Lambda \downarrow & & \psi \downarrow & & \rho \downarrow \\
\mathbb{R}^{n+r+s} & \xrightarrow{G} & \mathbb{R}^{1+r+s} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^{r+s} & \xrightarrow{q} & \mathbb{R}^s
\end{array}$$

commutes (where p and q are projections). If r or s is 0 this is just ordinary equivalence of unfoldings. Using (r,s)-equivalence one defines (r,s)-stability of unfoldings in the usual way, and one shows:

Thm 1: Let $f \in m(n+r+s)$ unfold $\eta \in m(n)$, and let $f_0 = f|\mathbb{R}^{n+r}$. We have ~~these~~ coords $x_1, \ldots x_n$ on $\mathbb{R}^n$, $u_1 \ldots u_r$ on $\mathbb{R}^r$, $v_1 \ldots v_s$ on $\mathbb{R}^s$.

For f to be (r,s)-stable it is necessary that η be finitely determined (so $\exists$ a k s.t. $m(n)^k \subseteq \langle \partial\eta/\partial x \rangle_{\mathcal{E}(n)}$) and it is necessary and sufficient that

$$\mathcal{E}(n+r) = \langle \partial f_0/\partial x \rangle_{\mathcal{E}(n+r)} + \langle \partial f_0/\partial u \rangle_{\mathcal{E}(r)} + \langle \partial f/\partial v | \mathbb{R}^{n+r} \rangle_{\mathbb{R}} + \langle 1, f_0, f_0^2, \ldots \rangle_{\mathcal{E}(r)} + m(r)^{s+1}\mathcal{E}(n+r) + m(n+r)^{k(s+1)}$$ (where k is as above)

In the case of ordinary stability of unfoldings a germ has up to equivalence at most one stable unfolding of a given unfolding dimension; this is not true in general for (r,s)-stability. How can we find, given η, all (r,s)-stable unfoldings of η? We have the following

Theorem 2: If $f \in m(n+r+s)$ is a stable $r+s$-dimensional unfolding and $g \in m(n+r+s)$ is (r,s)-stable then there is a linear map $\sigma: \mathbb{R}^{n+r+s} \to \mathbb{R}^{n+r+s}$ permuting the last $r+s$ coordinates (and leaving the first n fixed) and there are polynomial maps $p, \xi_1, \ldots, \xi_s : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$, without constant term, p of degree $s+1$, ξ_i of degree $s-1$, s.t. if h is given by

$$(*) \qquad h(x,u,v) = f\sigma\left(x, u, v + p(u) + \sum_{i=1}^{s} v_i \xi_i(u)\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, v \in \mathbb{R}^s)$$

then g is (r,s)-equivalent to h.

This partially answers the question above, for given η, a "standard" $r+s$-dimensional stable unfolding of η, if one exists, can easily be written down; theorem 2 gives a "normal form" for (r,s)-stable unfoldings of η and by Theorem 1 one can determine for which σ, p, ξ_i the h in $(*)$ is in fact (r,s)-stable. So one can find all (r,s)-stable unfoldings of η, though not uniquely up to (r,s)-equivalence. In practice additional arguments can be used to find unique representatives of the equivalence classes.

Using this method and the information contained in Thom's lists one can obtain similar lists classifying all $(3,1)$-stable unfoldings (to describe events occurring in time) and all $(1,3)$-stable unfoldings (for describing, in catastrophe theory, spatiotemporal events where identity of location is important to the description).

Gordon Wassermann
Universität Regensburg

Hopf invariants for reduced products of spheres

The reduced product complex S^n_∞ of the sphere S^n is homotopy equivalent to the loop space ΩS^{n+1}. The complex S^n_∞ has a natural CW decomposition

$$S^n_\infty = S^n \cup e^{2n} \cup \dots \cup e^{mn} \cup \dots$$

the $m\cdot n$ skeleton of which is denoted by S^n_m, $S^n_1 = S^n$. We are concerned with the homomorphism

$$H^n_m : \pi_{mn-1}(S^n_{m-1}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

where n is even and $m \geq 2$. This homomorphism is a generalization due to James of Steenrod's definition of the Hopf invariant: Let $\alpha \in \pi_{mn-1}(S^n_{m-1})$, one can choose generators a_1, a_{m-1} and x of dimension n, $(m-1)n$ and mn respectively in the integral cohomology of the complex $S^n_{m-1} \cup_\alpha E^{mn}$. Then the Hopf invariant $H^n_m(\alpha)$ is defined to be the integer for which $a_1 \cup a_{m-1} = H^n_m(\alpha)\cdot x$. H^n_2 is the classical Hopf invariant.

Let the element $[i_n]^m \in \pi_{mn-1}(S^n_{m-1})$ be given by an attaching map of the cell e^{mn} in S^n_m. This element is an m-th order Whitehead product. For example $[i_n]^2$ is the Whitehead product $[i_n, i_n]$ of a generator $i_n \in \pi_n(S^n)$. It is well known that $H^n_2([i_n, i_n]) = 2$ and more generally $H^n_m([i_n]^m) = m$. On the other hand we have $H^n_2(\sigma_n) = 1$ for the Hopf elements $\sigma_n \in \pi_{2n-1}(S^n)$ $(n = 2, 4, 8)$ and $\operatorname{im} H^n_2 = 2\mathbb{Z}$ if $n \neq 2, 4, 8$ by the celebrated theorem of Adams on Hopf-invariants. Moreover Toda showed ~~in~~ that for a prime number p, there exist $\alpha_p \in \pi_{2p-1}(S^2_{p-1})$ (and $\alpha_2 = \sigma_2$ if $p = 2$) such that $H^2_p(\alpha_p) = 1$. We proved that the elements α_p and the Hopf elements $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_8$ are the only elements of Hopf invariant one:

Theorem:
$$\operatorname{im} H^n_m = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{, if } m = 2 \text{ and } n = 2, 4, 8 \\ \mathbb{Z} & \text{, if } n = 2 \text{ and } m \text{ a prime number} \\ m \cdot \mathbb{Z} & \text{, otherwise} \end{cases}$$

We have to acknowledge further partial results: Hardie proved that $\operatorname{im} H^n_m = m\mathbb{Z}$ if $n \geq 4$ and m is an odd prime. Using this result Shar showed that $\operatorname{im} H^n_m = m\,\mathbb{Z}$ for $n \geq 4$ and $m \geq 3$. Thus we only had to prove $\operatorname{im} H^2_m = m\mathbb{Z}$ in case m is not a prime. Using our method of proof one can also deduce Shar's result.

Hans Joachim Baues (Bonn)

Families of Elements in the BP Adams Spectral Sequence

Fix a prime p.

$\pi_*(BP) = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots]$ $\quad |v_n| = 2(p^n-1)$

$BP_*(BP) = \pi_*(BP)[t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots]$

$\exists$ two distinct coaugmentation maps

$$\eta_R, \eta_L : \pi_*(BP) \longrightarrow BP_*(BP).$$

Definition $(a_0, \ldots, a_k)$ a sequence of strictly positive integers is called p-admissible if

$$\eta_R v_i^{a_i} \equiv \eta_L v_i^{a_i} \bmod (p^{a_0}, \ldots, v_{i-1}^{a_{i-1}}) \text{ in } BP_*(BP).$$

This is precisely the condition needed for

$\dfrac{\pi_*(BP)}{(p^{a_0}, \ldots, v_k^{a_k})}$ to inherit a comodule structure over $BP_*(BP)$

from $\pi_*(BP)$ and there is a non-zero element in $\mathrm{Hom}^{2a_k(p^k-1)}_{BP_*(BP)}\left(\pi_*(BP), \dfrac{\pi_*(BP)}{(p^{a_0}, \ldots, v_{k-1}^{a_{k-1}})}\right)$

which sends the generator of $\pi_*(BP)$ to $v_k^{a_k}$.

Use short exact sequences of comodules

$$0 \to \frac{\pi_*(BP)}{(p^{a_0}, \ldots, v_i^{a_i})} \xrightarrow{v_{i+1}^{a_{i+1}}} \frac{\pi_*(BP)}{(p^{a_0}, \ldots, v_i^{a_i})} \longrightarrow \frac{\pi_*(BP)}{(p^{a_0}, \ldots, v_{i+1}^{a_{i+1}})} \to 0$$

to "collapse" this to an element in

$$\mathrm{Ext}^{k,t}_{BP_*(BP)}(\pi_*(BP), \pi_*(BP))$$

$$t = 2a_k(p^k-1) - \sum_{i=1}^{k-1} 2a_i(p^i-1).$$

which we call $\alpha(k; a_0, \ldots, a_k)$.

Examples

$\alpha(1; 1, n) \longleftrightarrow \alpha_n$ family

$\alpha(2; 1, 1, n) \longleftrightarrow \beta_n$ "

$\alpha(3; 1, 1, 1, n) \longleftrightarrow \gamma_n$ "

Define a homology theory $v_n^{-1}BP$:

$$v_n^{-1}BP_*(X) = v_n^{-1}\pi_*(BP) \otimes_{\pi_*(BP)} BP_*(X).$$

$$v_n^{-1}BP \simeq \bigvee_{\alpha} S^{\alpha} E^{(n)} \quad \text{as spectra}$$

where $\pi_*(E^{(n)}) = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_n^{-1}]$

Similarly $v_n^{-1}v_m^{-1}BP$ splits into wedge of $E^{(n)}$ if $n > m$.
Use this splitting to show that if $n > m$
$\varphi_m : BP \longrightarrow v_m^{-1}BP$ induces a map
on ASS which factors through map
induced by $\varphi_n : BP \longrightarrow v_n^{-1}BP$ and also if we define

$$H_{s,t}(E^{(n)}(a_0, \ldots, a_k)) = \mathrm{Ext}^{s,t}_{E^{(n)}_*(E^{(n)})}\left(\pi_*(E^{(n)}), \frac{\pi_*(E^{(n)})}{(p^{a_0}, \ldots, v_k^{a_k})}\right)$$

<u>Lemma</u> (a) $\lambda \in H_{s,t}(BP(a_0, \ldots, a_k))$ then
$\exists\, a_{k+1}$ s.t. $v_{k+1}^{a_{k+1}} \lambda = 0 \iff \lambda \in \mathrm{Ker}\, \varphi_{k+1}$.
(b) Given $\lambda \in H_{s,t}(E^{(k+1)}(a_0, \ldots, a_k))$
$\exists\, a_{k+1}$ st $v_{k+1}^{a_{k+1}} \lambda \in \mathrm{Im}\, \varphi_{k+1}$.
(I have replaced $v_n^{-1}BP$ by $E^{(n)}$ as target of φ_n, this is OK by splitting)
This Lemma is crucial in both following theorems

<u>Approximation Theorem</u>

$$\varphi_n : H_s(BP(a_0, \ldots, a_k)) \longrightarrow H_s(E^{(n)}(a_0, \ldots, a_k))$$

is a $\begin{cases} \text{monomorphism} & \text{if } n = s+k+1 \\ \text{isomorphism} & \text{if } n \geq s+k+2. \end{cases}$

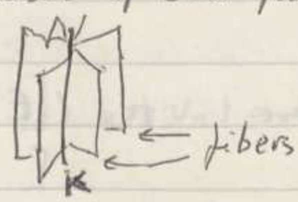
<u>Greek Letter Theorem</u>
$\alpha(k; a_0, \ldots, a_k) \in H_k(BP)$ is non-zero
for every admissible sequence $(a_0, \ldots, a_k)$.

This provides independent check that $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1} \in \pi_*^S$
are non-zero (Proved by Zahler and Thomas)
and when ~~and~~ suitable spaces of $V(n)$-type plus maps
exist gives new non-zero families in π_*^S e.g. $\gamma_p, \gamma_{p+1}, \ldots$

David Baird (Trinity Hall, Cambridge)

Join of Knots and sum of singularities †

A *knot* is a smooth oriented manifold pair (S^n, K^{n-2}); it is *fibered* if $S^n - K$ fibers over S^1 s.t. the closure of each fibre is a manifold with boundary K.



Given such a fibered knot with typical fiber F^{n-1} say, and any pair $M^{m-2} \subset N^m$ with N 2-connected one can define a "branched fibration" $E \xrightarrow{\pi} N$ such that

(i) $N - \pi^{-1}(M) \xrightarrow{\pi} N - M$ is a fibration with fiber F (induced from the fibration $S^n - K \to S^1$ by a map $N - M \to S^1$)

(ii) $\pi^{-1}(x) = CK$ (cone on K) for $x \in M$

(iii) $\partial E = N \times K$ with $\pi | \partial E$ = projection.

This construction is functorial in the sense that given any inclusion of closed manifold pairs $(N_1^{m_1}, M_1^{m_1-2}) \subset (N_2^{m_2}, M_2^{m_2-2})$ with N_1 and N_2 2-connected one gets an induced inclusion $E_1 \subset E_2$ of the total spaces of the branched fibrations (preserving product structure at boundary and unique up to isotopy). This uses a lemma to first make N_1 transversal to M_2 in an essentially unique way (c.f. talk at Singularities conference Sept 1973 Oberwolfach).

Now in particular, if (S^m, L^{m-2}) is any knot, taking branched fibrations of $(S^m, L^{m-2}) \subset (S^{m+2}, S^m)$ where $S^m \subset S^{m+2}$ is the trivial knot gives $E_1^{m+n-1} \subset E_2^{m+n+1}$ with $\partial E_1 = S^m \times K \subset S^{m+2} \times K = \partial E_2$. Closing off the boundaries with $D^{m+1} \times K \subset D^{m+3} \times K$ gives a pair of the form $X^{m+n-1} \subset S^{m+n+1}$, which we denote by $(S^m, L^{m-2}) \otimes (S^n, K^{n-2})$, the *join* of these knots.

Properties (1) For $f : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ $g : (\mathbb{R}^{m+1}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ "tame" †† (e.g. polynomial) maps with isolated singularities at 0 one has

$$\text{link}\,(f + g : \mathbb{R}^{n+m+2} \to \mathbb{R}^2) = \text{link}(f) \otimes \text{link}(g)$$

where $\text{link}(f) := (S^n_\varepsilon, S^n_\varepsilon \cap f^{-1}(0))$ for ε small (in the polynomial case; in general one must define link(f) as $(\partial(f^{-1}(D^2_\delta) \cap D^{n+1}_\varepsilon), f^{-1}(0) \cap S^{n+1}_\varepsilon)$, $0 < \delta << \varepsilon << 1$)

(2) Join of fibered knots is fibered. The join operation is commutative and associative.

③ If G is any Seifert surface (resp. fibre) for (S^m, L^{m-2}), then a typical Seifert surface (resp. fibre) H for $(S^m, L^{m-2}) \otimes (S^n, K^{n-2})$ is homotopy equivalent to $G * F$ (usual topological join). Hence $\widetilde{H}_*(H) = (\widetilde{H}_*(G) \otimes \widetilde{H}_*(F))_{-1}$.

④ The corresponding Alexander-Seifert linking form on $\widetilde{H}_*(H)$ is $\pm$(linking form of (S^m, L) w.r.t. G) $\otimes$ (linking form of (S^n, K) w.r.t. F)

⑤ Hence for fibered knots Monodromy$[(S^m, L) \otimes (S^n, K)] =$ Monodromy$(S^m, L) \otimes$ Monodromy(S^n, K).

The last three properties generalize results of Thom-Sebastiani, Sakamoto, Durfee etc. for isolated complex hypersurface singularities.

+): Joint work with L. KAUFFMAN

++): see Klingmann [this conference]

W. Neumann, Bonn.

Die Signatur von Flächenbündeln

Sei $\xi = (E, X, p, F, G)$ ein Faserbündel, wobei E, X, F orientierte, kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeiten ohne Rand sind. Dann ist im allgemeinen $\operatorname{sign}(E) \neq \operatorname{sign}(X) \cdot \operatorname{sign}(F)$. (Kodaira, Atiyah, Hirzebruch).

Wir betrachten hier den Fall $\dim(X) = \dim(F) = 2$ und $G = \operatorname{Diff}^+(F)$ oder $G =$ ~~Diff~~ $\operatorname{Top}^+(F)$. Sei h = Geschlecht von F und Γ_h die Abbildungsklassengruppe (Teichmüller-Gruppe) von F. Dann gibt es zu jedem Homomorphismus $\chi : \pi_1 X \longrightarrow \Gamma_h$ ein Bündel ξ mit Basis X und Faser F, und charakteristischer Abbildung $f : X \longrightarrow BG$, so daß $f_* = \chi : \pi_1 X \to \pi_1 BG = \pi_0 G = \Gamma_h$ ist. Ferner existiert eine Kohomologieklasse $k_h \in H^2(\Gamma_h, \mathbb{Z})$, so daß $\operatorname{sign}(E) = \chi^* k_h [X]$ ist ($\Rightarrow |\operatorname{sign}(E)|$ hängt nur von χ ab).

Mit Hilfe von bekannten Relationen von Γ_h läßt sich folgendes zeigen: Sei $S_h := \{ \operatorname{sign}(E) \,|\, g(F) = h;\ X, \chi \text{ beliebig} \}$.

Dann ist $S_1 = S_2 = \{0\}$

$S_h = 4\mathbb{Z}$ für jedes $h \geq 3$

Ferner ist $\operatorname{ord}(k_1) = 3$, $\operatorname{ord}(k_2) = 5$.

W. Meyer, Bonn.

KOBORDISMENTHEORIE und TRANSFORMATIONSGRUPPEN

15.9. – 21.9.1974

Bordism of cyclic groups and quadratic forms

Let p be an odd prime and G a cyclic group of order G with generator g. Let R be either $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Q}$. By an ε-isometric structure over R we mean a triple $(V, \varrho, \langle,\rangle)$, where V is a free finitely generated R-module, $\langle,\rangle$ an ε-symmetric bilinear form $V \otimes_R V \to R$ $(\varepsilon = \pm 1)$ such that the adjoint map $V \to \mathrm{Hom}_R(V, R)$ is an isomorphism, and ϱ is a homomorphism from G into the group of isometries of $(V, \langle,\rangle)$. An ε-isometric structure $(V, \varrho, \langle,\rangle)$ is called split if it contains an G-invariant R-submodule K such that $\langle,\rangle$ is zero on $K \otimes K$ and $\mathrm{rank}_R V = 2 \cdot \mathrm{rank}_R K$. The Witt-group $W_\varepsilon(RG)$ is the quotient of the semigroup of ε-isometric structures by the subsemigroup of split isometric structures.

It is easily seen that $W_\varepsilon(\mathbb{Z}G) \to W_\varepsilon(\mathbb{Q}G)$ is injective. A theorem of Landherr about hermitean forms over number fields, applied to the cyclotomic field $\mathbb{Q}(\zeta)$, ζ a primitive p-th root of unity, determines the structure of $W_\varepsilon(\mathbb{Q}G)$. By number-theoretical considerations it follows that $W_\varepsilon(\mathbb{Z}G)$ is determined by the signatures (equivariant and non-equivariant).

Now assign to a $2k$-dimensional oriented G-manifold it's intersection form on middle homology (taking $R = \mathbb{Z}$ and dividing out the torsion for closed manifolds, and taking $R = \mathbb{Q}$ and dividing out the null-space for manifolds with boundary).

Theorem: Every element of $W_\varepsilon(\mathbb{Q}G)$ comes from a manifold with boundary.

For an effective oriented G-manifold M^{4k} Conner and Raymond defined the invariant $q(M)$ to be the image under the second residue-homomorphism $\partial_p : W_+(\mathbb{Q}) \to W(\mathbb{Z}_p)$ of the quadratic form on the orbit space M/G. This invariant can be computed in terms of the fixed point information as follows:

To a complex representation ϱ of G assign $A(\varrho) = \langle 1 \rangle \in W(\mathbb{Z}_p)$ if the product of the rotation numbers of ϱ is a square mod p, and $A(\varrho) = \langle n \rangle$ otherwise, where ~~[illegible]~~ n is a quadratic non-residue mod p. Furthermore let Λ be the subgroup of $\mathbb{Q}(\zeta)$ generated by 1 and the elements $2(\zeta^i + \zeta^{-i})$, $1 \le i \le \frac{p-1}{2}$. Define a homomorphism $\lambda : \Lambda \to W(\mathbb{Z}_p)$ by $\lambda(1) = \langle 1 \rangle$ and $\lambda(2(\zeta^i + \zeta^{-i})) = \langle n \rangle - \langle 1 \rangle$.

Now let M^{4k} be an effective oriented G-manifold. For each component F of the fixed point set of M make the normal slice representation to F into a complex representation $\varrho(F)$, compatible with orientations.

Theorem 2: $q(M) = \sum_F \operatorname{sign}(F) \cdot A(\varrho(F)) = \operatorname{sign}(M) \cdot \langle 1 \rangle - \lambda(\operatorname{sign}(g, M) - \operatorname{sign} M/G)$

This is proved mostly by algebra, but using the calculation of the quadratic form for generators of the bordism ring of oriented G-manifolds. The first equality was obtained also by Alexander, Hamrick and Vick using a different method.

Erich Ossa (Wuppertal)

TRANSVERSE CW-COMPLEXES

(Report of joint work with S. Buoncristiano & C.P. Rourke)

We show that if h_* is a connected homology theory then $h_n(-)$ can be seen as cobordism of framed n-manifolds with singularities. In analogy with $[S^{n+k}, MO_k] \cong N_k$ (for example) we have $[S^{n+k}, E_k] \xrightarrow[\phi]{\cong} N^f_{E_k}(S^{n+k})$. Where ϕ is defined by making $f : S^{n+k} \to E_k$ transverse to the cone complex $\tilde{E}_k = E_k -$ (dual of base point) — for this we need E_k to be a TCW complex (described below). An n-manifold (without its framing) for h_n is then an n-complex with strata having trivialised neighbourhoods with fibre a cone from $\tilde{E} = \bigcup \tilde{E}_k$ where $S \wedge E_k \hookrightarrow E_{k+1}$ includes $\tilde{E}_k \subset \tilde{E}_{k+1}$.

A map $f : M \to X$ is <u>transverse</u> if for each cell

e_i of the cw cx. X $f^{-1}e_i$ is either ϕ or $\exists$ comm diagram of

$$\begin{tikzcd} T_i \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[dr, "f|"'] & D_i \arrow[d, "\chi_i"] \\ & X \end{tikzcd}$$

where χ_i is the chc. map for e_i, $T_i = f^{-1}e_i$, and $\mathrm{cl}\,T_i$ is a cod. c submanifold of the (closed manifold) M and π_i is the proj^n of a (trivial) bundle.

Defn. A cw cmplx X is transverse if each $\chi_i| : S_i \to X^{n_i-1}$ ($n_i = \dim e_i$) is transverse.

Brian Sanderson.

Äquivariante Transversalität:

Satz I: Sei G eine kompakte Liegruppe, so daß für alle abgeschlossenen Untergruppen $H < G$ der Index des Normalisators $N(H)$ in G endlich ist, $p: E \to B$ ein differenzierbares G-Vektorraumbündel, $\bar{p}: \bar{E} \to B$ ein Inverses Bündel mit $E \oplus \bar{E} \cong V \times B$ und $\varphi: TM \twoheadrightarrow V \times M$ eine Surjektion des Tangentialbündels der (kompakten) G-Mannigfaltigkeit M auf das triviale G-Bündel $V \times M$, so läßt sich jede G-Abbildung $f: M \to E$ durch G-Homotopie transversal zu B machen.

Es seien $V, W \dots$ G-Darstellungen mit den Einpunktkompaktifizierungen $S^V, S^W \dots$. Man hat die G-Homotopiemengen $[S^{V\oplus W}, S^W \wedge X^+]^G_0$ und $\pi^G_V(X^+) = \lim\limits_{\overrightarrow{W}} [S^{V\oplus W}, S^W \wedge X^+]^G_0$.

Es sei weiter $\omega^G_V(X)$ die Bordismentheorie der stabil gerahmten G-Mannigfaltigkeiten und ebenso $\omega^G_V[V\oplus W](X)$ die Bordismentheorie der singulären G-Mannigfaltigkeiten M in X zusammen mit einer Einbettung $j: M \hookrightarrow V\oplus W$ und einer W-Trivialisierung des Normalenbündels von j.

Die Pontrjagin-Thom Konstruktion liefert nat. Transformationen

$P: \omega^G_V(X) \to \pi^G_V(X^+)$ und $Q: \omega^G_V[V\oplus W](X) \to [S^{V\oplus W}, S^W \wedge X^+]^G_0$

Satz II: Erfüllt G die Eigenschaften aus Satz I, so sind P und Q Isomorphismen.

Satz III: Ist G beliebige kompakte Liegruppe und $\mathbb{R}^n$ die triviale G-Darstellung, so hat man nat. Zerspaltungsisomorphismen:

$$E: [S^{\mathbb{R}^n \oplus W}, S^W \wedge X^+]_0^G \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{(H)} [S^{\mathbb{R}^n \oplus W^H}, S^{W^H} \wedge X^{+H} \wedge E^{N(H)/H}{}^+]_0^{N(H)/H}$$

$$\bar{E}: \pi^G_{\mathbb{R}^n}(X^+) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{(H)} \pi^{N(H)/H}_{\mathbb{R}^n}(X^{+H} \wedge E^{N(H)/H}{}^+),$$ wobei

H die Konjugationsklassen abgeschlossener Untergruppen von G durchläuft, $E^{N(H)/H}$ der universelle freie $N(H)/H$-Raum ist und das hochgestellte H die jeweilige H-Fixpunktmenge bezeichnet.

Satz IV: Ist G beliebige kompakte Liegruppe, so ist

$P: \omega^G_{\mathbb{R}^n}(X) \longrightarrow \pi^G_{\mathbb{R}^n}(X^+)$ injektiv auf einen direkten Summanden.

H. Hauschild (Saarbrücken)

b! Cure Hauschild

Involutions over S^1 +)

Let G be a compact Lie group, X a top space, $\Omega_n^G(X)$ the bordism group of oriented n-dim singular G-mfds (M,f).

Problem: Which singular G-mf. (M,f) is bordant to a singular G-mf (M',f'), such that M' is fibred over S^1 and the action takes place within the fibres.

Let $F_n^G(X) < \Omega_n^G(X)$ be the subgroup of all singular G-mfds which are fibred over S^1. Let $\overline{SK}_n^G(X)$ be the S.K-group of singular G-mfds modulo cutting and pasting relation and bordism relation.

Theorem (Neumann): The projection $\Omega_n^G(X) \longrightarrow \overline{SK}_n^G(X)$ induces an isomorphism $\Omega_n^G(X)/_{F_n^G(X)} \cong \overline{SK}_n^G(X)$.

We deal with the special case $G = \mathbb{Z}_2$, $X = pt$.

Theorem:

$$\overline{SK}_n^{\mathbb{Z}_2} = \begin{cases} \text{torsion} & n \neq 0(4) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \text{torsion} & n = 0(4) \end{cases}$$

The isomorphism of the free part is given by the signature $\tau(M)$ and the equivariant signature $\sigma(M)$. The torsion here is actually all of exponent 2.

Corollary: M an oriented involution. Two copies of M ~~bound~~ are bordant to an involution fibred over S^1, if and only if

$$\tau(M) = \sigma(M) = 0.$$

+) joint work with J. Hermann

M. Kreck, Bonn

Die von der α-Invarianten definierte Bordismusinvarianten

Die α- und γ_i-Invarianten einer freien $\mathbb{Z}_p$-Aktion (p ungerade Primzahl) auf einer geschlossenen orientierten Mannigfaltigkeit M^{2n-1} (siehe Vortrag von W. Neumann) induzierten Invarianten der freien $\mathbb{Z}_p$-Bordismusklasse von M:

$$\alpha_{\mathbb{Z}} : \tilde{\Omega}(B\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Z}(\xi) \quad , \quad \gamma_{i/\mathbb{Z}} : \tilde{\Omega}(B\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$ (ξ primitive p-te Einheitswurzel)

diese Invarianten lassen sich durch charakteristische Zahlen beschreiben.

1) Im Dimensionsbereich $2n-1 < 2p-2$ lassen sich die Koeffizienten von $\alpha_{\mathbb{Z}}(g,M) = \sum_{k=1}^{p-1} a_k \xi^k$ ($a_k \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) durch $H^*(\,, \mathbb{Z}_p)$-Kroneckerprodukte

$$\left\langle \sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]} f^*\left(\frac{(-2k\cdot x)^{n-1-2m}}{(n-2m)!}\cdot 2y\right) \cup L_m(p_1, \dots, p_r), [M] \right\rangle \in \mathbb{Z}_p$$ berechnen;

hierbei ist L_m das m-te L-Polynom in den Pontrjaginklassen von M, $x, y \in H^*(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ und $(M,f) \in \tilde{\Omega}_{2n-1}(B\mathbb{Z}_p)$

2) Die zu den $\mathbb{Z}_p$-Pontrjaginzahlen aus [Conner Floyd; Diff per Map.] analogen K-Theorie-char.-Zahlen aus $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bestimmen im Gegensatz zu diesen die Bordismusklassen ohne Dimensionsbeschränkung. Durch diese K-Theorie char. Zahlen lassen sich die a_k's und damit die $\gamma_{i/\mathbb{Z}}$'s vollständig beschreiben: Es gibt Klassen $y_m \in K^1(L^\infty(p), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, so daß $a_k = \langle f^*(\psi^k y_m), [M]_S \rangle_K \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $m > 2n-1$.
Hierbei ist $[M]_S \in K_{2n-1}(M, \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ eine Fundamentalklasse für die orientierte Mannigfaltigkeit M und $\langle \,, \rangle_K$ das Kroneckerprodukt in der K-Theorie.

3) Die Existenz dieser Fundamentalklasse erlaubt es den Thomhomomorphismus $\mu : \Omega_*(X) \to K(X, \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ ($\mu((M,f)) = f_*([M]_S)$) zu definieren.
μ stimmt für $X = B\mathbb{Z}_p$ auf der reduzierten Bordismusgruppe im Wesentlichen mit $\alpha_{\mathbb{Z}}$ überein:

Die Atiyah-Singer-v-Invarianten stimmen mit verallgemeinerten char. Zahlen aus $K_1(B\mathbb{Z}_p)$ überein (für den komplexen Bordismus von G. Wilson (Quart. J. of Math, Oxford) bewiesen) und bestimmen ebenfalls die Elemente in $\tilde{\Omega}(B\mathbb{Z}_p)$. $\alpha_{\mathbb{Z}}$ ist eine dieser v-Invarianten

Es gibt einen injektiven Homomorphismus $\psi : K_1(BG) \to \frac{\mathbb{Q}(\xi)}{\mathbb{Z}(\xi)}$, so daß $\psi \circ \mu = \alpha_{\mathbb{Z}}$.

Das eben Gesagte läßt sich leicht auf den Fall einer endlichen zyklischen Gruppe ungerader Ordnung verallgemeinern.

Th. Knapp (Bonn)

EQUIVARIANT S-DUALITY. Let G be a compact Lie group, $\alpha \in RO(G)$. An α-duality between spaces X and X^* is a class $u \in \tilde{\omega}^{\alpha}_{G}(X^* \wedge X)$ (stable equivariant cohomotopy) such that slant product with u defines isomorphisms $\tilde{\omega}^H_* X \approx \tilde{\omega}^*_H X^*$ and $\tilde{\omega}^H_* X^* \approx \tilde{\omega}^*_H X$ for all closed subgroups $H < G$. α-dualities have properties analogous to those in the non-equivariant case and are compatible with reduction, restriction of the group action, and with taking fixed point sets. An induction argument shows that every finite G-CW complex has a dual, unique up to stable homotopy equivalence, so there is a duality cofunctor on the suspension category.

K. Wirthmüller (Saarbrücken and Liverpool).

G-Retracts

The following characterization of euclidean G-neighborhood retracts is proved:

Theorem. Let G be a compact Lie group and ~~G~~ X be a locally compact, finite dimensional G-space with a finite number of orbit types. Then X is a G-ANR (resp. G-AR) if and only if, for each isotropy subgroup H, the fixed point set X^H is a (topological) ANR (resp. AR).

The ~~proof~~ following extension theorem is first proved:

Extension theorem. Let G and X be as above, let Y be a G-space, let $A \subset X$ be a ~~[illegible]~~ closed G-subspace of X and $f: A \to Y$ be a G-map. Suppose we know that for each orbit type $[G_x]$ occurring in $x \in X - A$, the fixed point set Y^{G_x} is an ANR. Then f has a neighborhood G-extension $\bar{f}: U \to Y$, where U is a G-neighborhood of A.

The proof is obtained by reducing the situation to the case when all orbits in $X-A$ are of one type only; and by constructing an extension of a cross-section in a suitable bundle.

Jan Jaworowski

Bloomington, Indiana

Fixed-Point Sets of Group Actions on Finite Contractible Complexes

The talk described results obtained toward solving the following problem: for any given finite group G, what finite complexes can occur as fixed-point sets of cellular actions of G on finite contractible complexes. In the case of groups of prime power order, the answer was already known from results of P. A. Smith and Lowell Jones. In the case of groups not of prime power order, the main result is that there exists an integer n_G, such that a finite complex F is the fixed-point set of an action of G on some finite contractible complex if and only if $\chi(F) \equiv 1 \pmod{n_G}$. The result is obtained by building up "G-resolutions" of F: n-dimensional $(n-1)$-connected complexes with fixed-point set F and projective (over $\mathbb{Z}G$) top-dimensional homology; and then studying those homology groups as elements in $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$.

The constants n_G have been partially calculated. Denote by $\mathcal{G}^1$ the class of finite groups G with $P \trianglelefteq G$ of prime power order, such that G/P is cyclic. For any prime q, denote by $\mathcal{G}^q$ the class of finite groups G with normal subgroup $H \in \mathcal{G}^1$ of q-power index. Then $n_G = 0$ if and only if $G \in \mathcal{G}^1$. If $G \notin \mathcal{G}^1$, then n_G is divisible by at most the square of any prime, and $q \mid n_G$ if and only if $G \in \mathcal{G}^q$. Thus, $n_G = 1$ if and only if $G \notin \mathcal{G} = \bigcup_q \mathcal{G}^q$.

A special case is that of fixed-point free smooth actions on disks. Such actions are constructed from actions on finite G-CW-complexes using techniques of Floyd and Richardson. It thus follows from the above results that a finite group G has a smooth fixed-point free action on a disk if and only if $G \notin \mathcal{G}$. In particular, any non-solvable group has such an action, and an abelian group has one if and only if it has three or more non-cyclic Sylow subgroups.

Robert Oliver
Århus Universitet

Homotopy invariance of α-invariants

A Z_n-action on a space Y is called <u>S^1-induced</u> if an equivariant map $(Y, Z_n) \longrightarrow (S^1, Z_n)$ (standard action) exists. More generally if a group G acts on X we say $g \in G$ is S^1-induced if the cyclic subgroup $\langle g \rangle \subset G$ is S^1-induced.

<u>Theorem 1</u> If Y^{2n-1} is closed oriented manifold with G-action and $g \in G$ is S^1-induced then $\alpha(Y, g)$ is a (calculable) homotopy invariant algebraic integer. For instance this holds if G is finite abelian acting freely and $H_1(Y/G)$ is torsion free.

The proof involves other invariants: Suppose X^{2n-1} is closed and oriented and $\sigma : \pi_1(X) \longrightarrow U(V)$ is a representation in a hermitian vector space V such that $(*)$: either V is a definite hermitian space (i.e. $\operatorname{sign} V = \pm \dim V$) or $\operatorname{Image}(\sigma)$ is finite or abelian. Suppose further that some multiple $s(X^{2n-1}, \sigma)$ bounds a pair (Y^{2n}, τ) such that τ still satisfies $(*)$. Let $\tilde{V} \to Y$ be the hermitian local coefficient system over Y defined by τ and $\operatorname{sign}(Y, \tilde{V})$ the signature of the cup product form on $H^n(Y, \partial Y; \tilde{V})$.

<u>Theorem 2</u> $\gamma_\sigma(X) := \frac{1}{s}(\operatorname{sign}(Y, \tilde{V}) - \operatorname{sign} Y \operatorname{sign} V)$ is a well defined invariant.

<u>Theorem 3</u> If the finite group G acts freely on Y^{2n-1} and $X = Y/G$ and if $f: \pi_1(X) \longrightarrow G$ is the classifying map of the covering $Y \to X$ and $\tau_i : G \longrightarrow U(n_i)$, $i = 1, \cdots, s$ are all the irreducible representations of G up to equivalence and χ_i, $i = 1, \cdots, s$ their characters, then

$$\alpha(Y, g) = \sum_{i=1}^{s} \chi^i(g)\, \gamma_{\tau_i f}(X) ,$$

$$\gamma_{\tau_i f}(X) = \sum_{g \neq 1} \alpha(Y, g)(\chi^i(g^{-1}) - n_i) ,$$

so the γ- and α-invariants determine each other in this case.

Theorem 2 follows from the fact that under condition $(*)$, $\operatorname{sign}(Y, \tilde{V}) = \operatorname{sign} Y \operatorname{sign} V$ for closed Y. This is not hard and much wider conditions than $(*)$ were actually mentioned. Theorem 3 is easy representation theory. Theorem 1 now follows by giving an intrinsic calculation of $\gamma_\sigma(X)$ for suitable σ.

Let X^{2n-1} be closed and oriented and $f: \pi_1(X) \to \mathbb{Z}$ be given. Denote the induced map $X \to S^1 = K(\mathbb{Z},1)$ also by f. Consider the pullback

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\ X \arrow[r, "f"] & S^1 \end{tikzcd}$$

and let $\hat{f} \in H_{2n-2}(\tilde{X})$ be represented by $\tilde{f}^{-1}(pt)$ after making $\tilde{f}$ regular at a point. Let $\langle\ \rangle : H^{n-1}(\tilde{X};R) \otimes H^{n-1}(\tilde{X};R) \to R$ ($R = \mathbb{Q}$ or $\mathbb{R}$) be the bilinear form $\langle x,y\rangle = (x \cup y)(\hat{f})$. Put $H = H(M,f) := H^{n-1}(\tilde{X}) / \{x \mid \langle x,y\rangle = 0 \text{ for all } y\}$ and let $t: H \to H$ be the map induced by the covering transformation $\tilde{X} \to \tilde{X}$.

<u>Lemma</u> $(H, \langle\ \rangle)$ is a finite dimensional $(-1)^{n-1}$-symmetric bilinear space and t is an isometry.

<u>Definition</u> The "isometric structure" $\mathcal{H}(M,f) = (H, \langle\ \rangle, t)$ is called the <u>monodromy</u> of M, f.

Theorem 1 now follows from our main

<u>Theorem</u>: Given X^{2n-1}, $f: \pi_1(X) \to \mathbb{Z}$ as above, then for any hermitian representation $\tau: \mathbb{Z} \to U(v)$ the invariant $\gamma_{\tau f}(X)$ only depends on $\mathcal{H}(M,f)$. In fact $\gamma_{\tau f}(X)$ is easily expressed in terms of Milnor's classification (Inventiones 1969 ?) of isometric structures over $\mathbb{R}$, and it is an integer.

This calculation has various consequences for signature of coverings etc.

<u>Remarks</u> a) Every isometric antisymmetric structure over $\mathbb{Q}$ occurs as a $\mathcal{H}(M^3, f)$ already, so this is quite a rich invariant.

b) Conjecture: $\mathcal{H}(M,f) = \mathbb{Z}[t]$-torsion of $H^{n-1}(\tilde{M}, R)$.

Walter Neumann, Bonn

Equivariant bordism theory indexed by representations

Some G-bordism theory is constructed and investigated. It is a generalized G-homology theory indexed by representation ring $RO(G)$, and lying between ordinary unoriented G-bordism and „V-framed bordism" = stable G-homotopy

I Geometrical theory

Def 1. (A) G-vector bundle $\xi : E \to X$ is a V-bundle ($V \in RO(G)^+$) $\overset{df}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{x \in X} E_x \underset{G_x}{\cong} V$

(B) G-vector bundle $\xi : E \to X$ is a v-bundle ($v = V - W \in RO(G)$) $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$
$\Longleftrightarrow$ $\xi \oplus$ (product W-bundle) is a V-bundle in the sense of (A)

(C) G-manifold is a v-manifold $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ tangent bundle $TM \to M$ is a v-bundle

Notion of v-manifold leads in standard way to bordism theory $\mathcal{N}$, which in this case is indexed by $RO(G)$. This theory has suspension-homomorphism for all $V \in RO(G)^+$, so can be stabilized to the stable theory ${}^{st}\mathcal{N}$.

II Homotopical theory

The construction of Thom-spectrum ($RO(G)$-indexed) is indicated. This spectrum gives a theory N and that Pontriagin Thom construction provides us with natural isomorphism ${}^{st}\mathcal{N} \longrightarrow N$ (Bröcker-Hook theorem). The only non-quite standard thing is the construction of universal V-bundle - which is done by Milnor-construction $O(V) * O(V) * \ldots$ starting from the G-space $O(V) = O(n)$ with the G-action given by the representation V"

III. Connections with other G-bordism theories

Three natural transformations are considered:

① $\mathfrak{N}^G_{|v|}[\text{free}] \longrightarrow \mathcal{N}_v$ (any free G-manifold is a v-manifold for $|v|$ = dimension of manifold)

② $\bigoplus_{|v|=n} \mathcal{N}_v \longrightarrow \mathfrak{N}^G_n$ (forgetting the representation)

③ $\omega^G \longrightarrow \mathcal{N}$ (any V-framed G-manifold is a V-manifold)

IV Coefficients

Groups $\mathcal{N}_v(G/H)$ are partially computed:

$\mathcal{N}_v(G) = \mathfrak{N}_{|v| - \dim G}(pt)$

$\mathcal{N}_n(G/H) = \bigoplus_{(K) \leq (H)} \mathfrak{N}^{NK/K}_{n - \dim(G/NK)}((G/H)^K)$

n-dim. trivial repr.

Wojciech Pulikowski
POZNAŃ (Poland)

On the Burnside ring of a compact Lie group.

Let G be a compact Lie group. On the set of isomorphism classes $a(G)$ ~~in~~ of compact differentiable G-manifolds introduce the equivalence relation: $M \sim N \iff$ for all closed subgroups H of G the Euler characteristic $\chi(M^H)$ of the H-fixed point set M^H is equal to $\chi(N^H)$. Let $a(G)/\sim = A(G)$ be the set of equivalence classes with composition laws "+" induced by disjoint union and "·" by cartesian product. Then $A(G)$ is a commutative ring with unit, the Burnside ring of G. It is additively the free abelian group on G/H, where H runs through the conjugacy classes (H) of those H with finite index in their normaliser. The ring $A(G)$ is isomorphic to stable equivariant homotopy $\omega_0^G = \varinjlim [V_\cup\infty, V_\cup\infty]^0_G$, V all G-modules. The isomorphism is given by the map $M \longmapsto$ (Lefschetz-index of $M \to$ Point in the sense of Dold). I outlined a proof of all this and described applications to localizing homology theories at prime ideals of the Burnside ring.

Tammo tom Dieck (Saarbrücken)

Some remarks on Equivariant Bordism Theory indexed by representations

An n dimensional manifold is locally like $\mathbb{R}^n$ - thus we make the following definition:

If $\alpha = U - V \in RO(G)$ where U and V are G modules, then a G manifold is an α manifold if locally (& equivariantly) it looks like α

i.e. a) a G_x equivariant neighborhood of $x \in M$ is G_x isomorphic to α (in particular α/G_x is isomorphic to a G_x module)

i.e b) an equivariant neighborhood of an orbit looks like $G \times_{G_x} \alpha$

i.e. c) $TM_x \cong \alpha/G_x$ (and α/G_x is a G_x module)

d) $TM_x \oplus V$ and U are isomorphic as G_x modules, for all $x \in M$.

This is Pulikowski's definition of an α manifold ($\alpha \in RO(G)$) — see his abstract above

Let $\mathcal{N}_\alpha^G$ be the equivariant bordism theory corresponding to α manifolds and $\mathcal{N}_n^G$ the " " to n dimensional G manifolds. Also let $F' \subset F$ be adjacent families in G then we have a surjection

$$\bigoplus_{|V|=n} \mathcal{N}_V^G[F,F'] \longrightarrow \mathcal{N}_n^G[F,F']$$

In fact we ~~ob~~tain an isomorphism

$$\bigoplus_{V \in S_n} \mathcal{N}_V^G[F,F'] \xrightarrow{\cong} \mathcal{N}_n^G[F,F']$$

where S_n is a suitable set of n dimensional G modules

Czes Kosniowski (Newcastle)

19. TAGUNG ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

22.–28. Sept. 1974

Zum Gedenken an C. Thaer, L. Koschmieder und G. Kropp.

Clemens Thaer (8.12.1883 – 2.1.1974) ist vor allem durch seine Übersetzung der "Elemente" Euklids bekannt, die 1933-36 in 'Ostwald's Klassikern der exakten Wissenschaften' erschienen (Neudruck in einem Band 1969). Herr Thaer hatte in Gießen, Leipzig und Göttingen studiert und 1906 bei M. Pasch promoviert. Er war bis 1935 Studienrat und gleichzeitig nichtbeamteter a.o. Professor an der Universität Greifswald, dann Studienrat in Cammin (Pommern) und lebte nach dem Krieg in Detmold im Ruhestand. Er übersetzte auch die "Data" Euklids ins Deutsche (hrsg.   ) und veröffentlichte 1943 einen umfassenden Bericht über die zwischen 1906 und 1930 erschienene Literatur zur Geschichte der antiken Mathematik (Jber. Fortschritte Klass. Altertumswiss. 283).

Lothar Koschmieder (22.4.1890 – 6.3.1974), em. o. Prof. der Univ. Tübingen, studierte in Breslau, Freiburg und Göttingen und begann seine wissenschaftliche Laufbahn an der Universität Breslau. 1927 wurde er an die Deutsche Techn. Hochschule in Brünn berufen. Von 1940 bis 1946 wirkte er an der Techn. Hochschule in Graz. Danach lehrte er an verschiedenen ausländischen Universitäten, in Aleppo (Syrien), Tucumán (Argentinien), Bagdad (Irak) und Izmir (Türkei) sowie in Tübingen. Seine Hauptarbeitsgebiete waren die Variationsrechnung, spezielle Funktionen, Integralrechnung und Integralgleichungen. Mehrmals trug er auch über die Entwicklung mathematischer Theorien in diesen Gebieten auf unseren Tagungen vor.

Gerhard Kropp (6.4.1910 – 13.7.1974) studierte in Berlin, wurde dort Studienrat und 1955 Oberstudiendirektor. 1959 wurde er zum Oberschulrat ernannt, wenige Jahre später zum Leiter der Schulaufsicht und 1968 zum Präsidenten des Wiss. Landesprüfungsamtes in Berlin. Daneben hatte Herr Kropp 1945 das Diplomexamen für Mathematik abgelegt und mit einer bei J. E. Hofmann angefertigten Dissertation über die Quadraturmethoden von Lalouvère promoviert. Zusätzlich vertrat er lange Jahre die Erziehungswissenschaft an der Technischen und die Didaktik und Geschichte der Mathematik an der Freien Universität. An letzterer habilitierte er sich 1968. Seine vielseitigen Interessen umspannten auch die Philosophie. Die 1967 und 1969 erschienenen Einführungen in die Geschichte der Mathematik ergänzen die vorliegenden Darstellungen in glücklicher Weise.

C. J. Scriba

Zum Gedenken an A. Dinghas und H. Wieleitner.

Alexander Dinghas (9.2.1908 – 19.4.1974) war in Smyrna (Izmir) geboren, studierte in Athen an der Universität und an der Technischen Hochschule mit Abschlussprüfungen. 1933 kam er nach Berlin, wo er bei Erhard Schmidt und Ludwig Bieberbach promovierte und 1939 sich habilitierte. 1945 wurde er Professor an der Humboldt-Universität und 1949 an der neugegründeten Freien Universität in Berlin. Hier baute er die Mathematik und ihre Institute in grossem Maßstab auf. Seine unermüdliche Hingabe an Lehre und Forschung, die Heranbildung ausgezeichneter Mitarbeiter machten Berlin zu einer Bildungsstätte vom höchsten Rang. Neben seinen zahlreichen Beiträgen zur Funktionentheorie und ~~zum~~ isometrischen Problem mit seinen Ungleichheiten soll sein Lehrbuch der Funktionentheorie erwähnt sein. Er war Honorarprofessor an der T.U. Berlin, Mitglied mehrerer wissenschaftlicher Akademien und der Society of the Sigma Xi, Chapter Fordham University, Bronx, New York. Er war ein Professor mit universeller Bildung, der auch die geschichtlichen Probleme in seinen Vorlesungen und in seinen Arbeiten glänzend zu würdigen verstand.

Heinrich Wieleitner (1874–1931) stammte aus der bayerischen Pfalz und studierte an der Universität und an der T.H. in München. Nach Ablegung der Lehramtsprüfungen promovierte er bei F. von Lindemann und widmete sich dem Studium der algebraischen Kurven, die damals sowohl in Deutschland (A. von Brill, M. Nöther, F. Lindemann u.a.) als auch in Italien (L. Cremona, F. Severi) in grosser Breite untersucht wurden. Seine Bücher darüber haben in vielen die Freude an diesem Studium befördert. Sehr bald widmete er sich auch der Geschichte der Mathematik, wo er im grössten Sinne ein Bannerträger wurde. Als Gymnasiallehrer, zuletzt als Oberstudiendirektor in München, hat er sich viele Verdienste um die Förderung des höheren Schulwesens in Bayern erworben. Es wäre eine schöne Sache, wenn dem ersten Lehrbeauftragten für die Geschichte der Mathematik an der Universität München aus Anlass seines Centenariums z.B. durch die Herausgabe einer ausgewählten Sammlung aus seinen Schriften mit Würdigung die gebührende Ehrung zuteil gebracht würde.

Otto Volk.

Das Wachstum des mathematischen Wissens in historischer Beleuchtung

Es wurden die folgenden Themen zur Diskussion vorgelegt:

1., Der Zusammenhang der Philosophie und der Geschichte der Mathematik.
2., Der traditionelle Unterschied der Naturwissenschaften und der Mathematik.
3., Beweis und Widerlegung in den Naturwissenschaften und in der Mathematik. Der sog. Falsifikationismus. Synthetischer und apagogischer Beweis bei Euklid.
4., Die Methodologie der Forschungsprogramme in den Naturwissenschaften
5., Was ist ein Forschungsprogramm in Mathematik?
6., Revolutionen in der Geschichte der Mathematik.
7., Ein Neumann-Zitat. Empirismus und l'art pour l'art in der Mathematik.

Das Programm des Vortrages erwies sich als allzu breit angelegt. Die anschliessende Diskussion beschäftigte sich vorwiegend nur mit den Punkten 2. und 3. – Erfreulich einheitlich war die Stellungnahme der Anwesenden in Bezug auf Punkt 7. – Verfasser beabsichtigt dasselbe Thema in den künftigen Jahren auch eingehender zu bearbeiten.

Árpád Szabó (Budapest)

Über die Übermittlung der Elemente Euklids über die Länder des Nahen Ostens nach West-Europa.

An hand des Fehlens bestimmter Sätze wird gezeigt, dass Adelard I und II und Hermann von Kärnten einem al-Ḥaǧǧāǧ Tekst gefolgt sind. Da es aber zwei solche arabische Teksten gibt und die Besthorn-Edition den al-Ḥaǧǧāǧ II Tekst enthält, wie sich aus der Einführung ergibt, meine ich, dass Adelard I und Hermann von Kärnten den al-Ḥaǧǧāǧ I Tekst enthalten und Adelard II einen kurzgefassten al-Ḥaǧǧāǧ II Tekst. Wie verhält sich nun die Übersetzung von Gerard von Cremona hierzu? Nachgewiesen wird, dass der arabische Autor sicher den Isḥāq Tekst gekannt hat wie auch die Verbesserungen von Ṯābit ibn Qurra. In der Übersetzung von Gerard sind aber auch Beweise zu finden, die auf al-Ḥaǧǧāǧ I zurückgehen und Hinzufügungen, die darauf deuten, dass Gerard von Cremona seine eigene Übersetzung des Kommentars von an-Nayrīzī verwendet hat. Überdies lässt sich nachweisen, dass ausser an-Nayrīzī auch Ṯābit ibn Qurra einen Kommentar zu Euklids Elementen von Heron gekannt hat. Schliesslich wurde noch auf einige Beweise hingewiesen in der Übersetzung von Gerard von Cremona, die Heiberg in seiner Edition gestrichen hat.

H. Busard (Niederlande)

Jacob Oostwouds Funktion für die holländische Mathematik

Jacob Oostwoud (1714-1784) war Schulmeister zu Oostzaandam. Er machte sich um die Verbreitung der Arithmetik und Mathematik sehr verdient. Aus diesem Grunde hat er u.a. die Schriftleitung eines Monatsheftes mit Übungsaufgaben geführt (1754-1764). Nachdem er im Jahre 1767 Mitglied der Hamburger Kunstrechnungsliebenden Societät geworden war, sorgte Oostwoud für das Bekanntwerden dieser Gesellschaft in Holland. 1778 gründete dann A. B. Strabbe (1740-1804) nach dem Hamburger Vorbild die Amsterdammer Mathematische Gesellschaft.

Lourens van den Brom (Krommenie)

Bemerkungen zum Funktionsbegriff im Anschluß an einen Aufsatz von S. Bochner

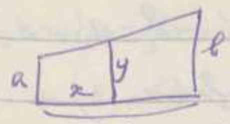
Im Rahmen der für diese Tagung vorgesehenen Diskussion über die Entwicklung des Funktionsbegriffs wurde über Salomon Bochners Aufsatz "The Rise of Functions" (Rice Univ. Studies 56 (1970), no. 2, p. 3-21 (1971)) berichtet. Man kann Bochners Auffassung vom „Begriff" der Funktion darin nur indirekt erschließen aus der Folge seiner Zwischenüberschriften: [Antike, Mittelalter, Renaissance] Stetigkeit, stückweise analytische Funktionen, trigonometrische Reihen, orthogonale Systeme, Riemannsche Flächen, analytische Fortsetzung, ["A parting thought"] sowie aus dem ersten Abschnitt, worin er den Funktionsbegriff in Zusammenhang bringt mit den Begriffen Korrespondenz, Abhängigkeit, Abbildung und zweistellige Relation. Für besonders wichtig hält er die "operationale Haltung", d.h. das Durchführen irgendwelcher Operationen mit den oder an den auftretenden Funktionen. Sie sei noch nicht in der Antike, sondern erst seit dem 16./17. Jh. zu finden. Bochner bemerkt zum Schluß: Während man seit dem Erlanger Programm in der geometrisch orientierten Analysis vorwiegend nach Symmetrien und Harmonien gesucht habe, passe das nicht mehr in die Wirklichkeit der Gegenwart, die - selbst wenn sie an der Oberfläche symmetrisch erscheine, - durch unzählig viele "lokale" Deformationen so verunstaltet sei, daß alle "angenehmen" Folgeerscheinungen der Symmetrie schwer beeinträchtigt seien. Deshalb seien weniger "harmonische" Theorien, wie sie z.B. durch die Arbeiten von M. Morse angeregt wurden, der Zeit angemessener. - Der Vortrag schloß unter Erwähnung der Rezension des Bochnerschen Aufsatzes in MR 44 (1972), # 6428 mit drei Thesen, die forderten, bei der historischen Untersuchung solch umfassender, auch in anderen Wissenschaften und im Alltagsleben vorkommender Begriffe wie des Funktionsbegriffs 1. den Begriff klar zu definieren, 2. den Bereich der Mathematik (einschließlich der Anwendungsgebiete und der Logik) anzugeben, den man berücksichtigt, und 3. auch auf Einflüsse von außen (philosophische, soziale, wirtschaftliche.- Entwicklungen) zu achten.

C. J. Scriba (Berlin)

<u>Funktionen im Altertum.</u>

Man kann sich die Frage stellen ob der Funktionsbegriff existiert falls eine Bezeichnung des Begriffes nicht existiert.... und man sich damit zufrieden stellt den Begriff klar darzustellen. In diesem Sinne zeigen die Ausführungen der Susa-tafeln Ax, Bb, daß in hunderten von Fragen erläutert wird, was modern geschrieben werden kann: §a Gegeben x, Berechne $F(x)$, §(a+1) gegeben $F(x) = a$, Bestimme x, indem man die Seite eines Quadrats gibt und die Frage stellt: αx die Seite, βx die Fläche, αx die Fläche + βx die Seite, αx die Fläche minus βx die Seite usw. zu berechnen und in nächstfolgender

Serie die Resultate zu geben indem man die „Gleichung" $F(x)=a$ zu lösen fragt.
In diesem Sinne wird also der Funktionsbegriff und die damit verknüpfte Gleichung „erläutert". Es treten in diesen Texten systematisch die „sechs Gleichungen" von Al-Khwarizmi" hervor. Man sollte nicht vergessen, daß der moderne Mathematiker auch keine direkt berechenbaren Funktionen kennt außer als rationale: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q, Polynome und daß für andere, sogar einfache Funktionen $\sqrt{x}$ usw. nur Rechenschemata bekannt gegeben werden und Tabellenform die einzig mögliche Art von Verarbeitung gibt. Dann macht z. B. Ptolemaios in seiner „Sehnentafel" nichts anderes als der moderne Mathematiker mit seiner „Sinusfunktion."
Man kann sich die Frage stellen wenn man sieht wie Ptolemaios interpoliert nachdem er die Vernachlässigung des Unterschiedes von $\sin h$ und h für genügend kleine Winkel explizit als numerisch gerechtfertigt bewiesen hat mit seinem Additionstheorem $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$ rechnend und $\cos h = \sqrt{1-\sin^2 h} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 h + \ldots = 1 - \frac{1}{2}h^2$ ansetzend wesentlich anders verfährt als der moderne Mathematiker mit der „Taylorreihe" da Ptolemaios' System modern geschrieben ist $\sin(x+h) = \sin x(1-\frac{1}{2}h^2) + \cos x\, h = \sin x + \cos x\, h - \frac{1}{2}\sin x\, h^2 + \ldots$!!
Auf der Tafel IM 31248 und dem korrespondierenden Text ist die „Gleichung der geraden Linie" erhalten. Die Berechnung der Transversalen in einem Trapez geschieht genau wie in der analytischen Geometrie:



$y = a + \frac{b-a}{c}\cdot x$. Diese „lineare Interpolation" zwischen zwei Funktionswerten" darf daraus nicht geschlossen werden aber der Text AO 6770 der Zinseszinsrechnung verwendet ausdrücklich die Vorschrift der linearen Interpolation. „Berechne nach vier Jahren wieviel es zu groß ist. Dividiere was es zu groß ist durch die Differenz der Werte nach vier Jahren und nach drei Jahren. Also: $F(x)=A$ löst man indem man berechnet $F(a_2)-A=\Delta_1$, $F(a_2)-F(a_1)=\Delta_2$

$x = a_2 - \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\cdot(a_2-a_1)$; also „doppelter Falscher Ansatz". Zu dieser Vorschrift kann man wohl nicht kommen ohne den Begriff des „Variablen x" und die damit verknüpften „Funktionswerte"... obwohl man den technischen Term nicht „ausgedrückt" findet.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Nebst einigen Beispiele wurde gezeigt, daß aus der „gleichschenkligen Trapez-formel" die Gleichungen für die regelmäßige Vielecke erhalten werden, und zwar sehr einfach z.B. für a_{14} aus dem Heptagon $x^3+1 = x^2+2x$ und für a_{18} aus dem Enneagon, $x^3+1 = 3x$. Da man aus $18\, a_{18} \sim 2\pi \sim 6$ eine erste Annäherung erhält (comp. Textor de tusi) gibt die [illegible] methode in neuer Zeile

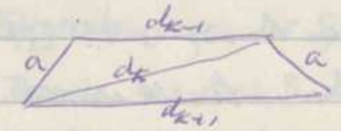
$a_1 = 0.20$ $\quad a_1^2 = 6.40$ $\quad a_1^3 = 2.13.20$ $\quad 1+a_1^3 = 1.2.13.20$ $\quad 3a_1 = 1$ $\quad \Delta_1 = 2.13.20$

$a_2 = 0.21$ $\quad a_2^2 = 7.21$ $\quad a_2^3 = 2.34.21$ $\quad 1+a_2^3 = 1.2.34.21$ $\quad 3a_2 = 1.3$ $\quad \Delta_2 = -0.2[illegible].39$

Also $\quad a_{18} = 0,20 + \frac{2.13.20}{2.[illegible]} \sim 0.20.50.$ oder

$9\, a_{18} = 3.7.30 = 3\tfrac{1}{8} < \pi.$

Falls man neu numerisch vorgeht braucht man nichts zu eliminieren. Man hat die Beziehung zwischen den Diagonale des Vieleckes



$$d_k^2 = a^2 + d_k d_{k+1}$$

und zwei aufeinander folgende Werte ($d_p = d_{p+1}$) sind einander gleich. Falls $d_p = d_{p+1} = 1$ angesetzt wird erhält man $d_{p-1} = 1 - a^2$ und dann durch Divisionen $d_{p-2}, d_{p-3}, \ldots$ bis d_2, d_1 um auszukommen auf $d_2^2 = a^2 + a d_1$ eine quadratische Gleichung für a welche die Lösung $\hat{a}_1 = a_1 + \Delta_1$ gibt. Eine zweite Reihe gibt $\hat{a}_2 = a_2 + \Delta_2$ und lineare Interpolation (aequivalent mit Newton's Verfahren) ergibt sehr genaue Werte für a/d_p. Für das Heptagon z.B. hat man

$$d_1^2 = a^2 + a d_2$$
$$d_2^2 = a^2 + d_1 d_3$$
$$d_3^2 = a^2 + d_2 d_4$$
$$\vdots$$

mit $d_2 = d_3$. Das Rechenschema ist also $\quad d_2 = d_3 = 1$

$\begin{cases} a_1, \\ a_2, \end{cases}$ $\quad d_1 = 1 - a_1^2$ $\quad \hat{a}_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + d_1^2}$ $\quad \hat{a}_1 - a = \Delta_1$

usw.

Dieses Verfahren ist anwendbar für jedes n-Eck.

24-IX-1974 [signature]

Das inverse Newtonsche Problem und inverse Funktionen.

1. Die erste Behandlung des inversen Newtonschen Problems in festen rechtwinkligen Koordinaten mit Aufstellung der sog. Newtonschen Differentialgleichungen der Punktmechanik erfolgt durch Jakob Hermann, der ein ebenbürtiger Partner der Bernoullis war (Hist. et Mém. de l'acad. d. sci. à Paris 1710. Paris 1712. S. 519–521; Giornale de Letterati d'Italia 2. Venezia 1710. S. 447–467.). Aus differentialgeometrischen Überlegungen kommt er zu den Differentialgleichungen (differentio-differential) 2. Ordnung:

(1) $\ddot{x} = -k^2 \frac{x}{r^3}$, $\ddot{y} = -\frac{k^2 y}{r^3}$; $x\dot{y} - \dot{x}y = c$. Mittels des integrierenden Faktors c bzw. $x\dot{y} - y\dot{x}$ erhält er:

(2) $c\dot{x} = -k^2 \frac{y}{r} + a$, $c\dot{y} = \frac{k^2 x}{r} + b$, woraus (3) $c(x\dot{y} - \dot{x}y) = c^2 = k^2 r + bx - ay$ als die Bahn des Himmelskörpers d.h. ein Kegelschnitt folgt. Hier ist der Zusammenstoss ($r = 0$, $c = 0$) enthalten. Bildet man noch (2): $c(x\dot{x} + y\dot{y}) = c r \dot{r} = ax + by$, so erhält man aus (2) u. (3):

(4) $(c^2 - k^2 r)^2 + c^2 r^2 \dot{r}^2 = (a^2 + b^2) r^2$.

Dies beinhaltet die Keplersche Gleichung. Die Schwierigkeit, die das Integral bietet, kann man umgehen, indem man mit $\dot{r} = 0$ die Perihel- u. Aphelabstände des H.K. bestimmt:

$$r_1 = \frac{c^2}{k^2 + \sqrt{a^2+b^2}}, \quad r_2 = \frac{c^2}{k^2 - \sqrt{a^2+b^2}}; \quad a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{c^2 k^2}{k^4 - a^2 - b^2}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{k^2}; \quad a^2 + b^2 < k^4$$

und mit Kepler setzt: $r = a(1 + e\cos u)$, $k a^{-\frac{3}{2}}(t - t_0) = u + e \sin u$.

(5) $x = r\cos(\varphi - \varphi_0)$, $y = r\sin(\varphi - \varphi_0)$, $\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos u + e}{1 + e\cos u}$, $\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin u}{1 + e\cos u}$, $\cos\varphi_0 = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi_0 = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

somit $c^2 = k^2(1 - e\cos\varphi)\, r$. Dies ist die Polargleichung der Ellipse, die hier wohl zum ersten Male auftritt. Auch die allgemeine Gleichung 2. Grades $k^4(x^2+y^2) = c^4 + 2c^2(ay - bx) + (ay - bx)^2$ ist von Hermann in diesem Zusammenhange zum ersten Male (also vor Eulers Diskussion in „Introductio in analysin", II, Additamentum) vollständig diskutiert: $a^2 + b^2 \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} k^4 \begin{cases} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hyperbel} \end{cases}$. Die differentio-differential-gleichungen (1) sind wohl das erste System von 2 Differentialgleichungen der 2. Ordnung, das in (3) eine allgemeine Lösung hat, soweit es sich um die Gestalt der Lösungskurven handelt.

2. Die Schwierigkeit, die die direkte Integration von (4) betrifft, wurde durch Euler überwunden, indem er die Arc sin-Funktion explicite einführte. Euler war schon frühzeitig (1730) durch Goldbach auf die Entwicklungen des jungen Mathematikers aus Kirchheim u. d. Teck, F. Chr. Mayer, Dispositiones cyclometricae aliquot 1728 (Comm. Petr. Ac. III) — Mayer war 1725 nach Petersburg berufen, starb aber sehr

(1724)

lenkt (wie Nik. Bernoulli) – aufmerksam gemacht worden. Er hatte u. a. die Sehne s durch eine Potenzreihe von x/b (x die zugehörige Sehne im Kreis mit dem Durchmesser b) dargestellt, wie sie schon Newton gegeben hatte. Indem Euler die Frage der „Umkehrbarkeit" der Keplerschen Formeln (5) in Angriff nimmt, nimmt er den Weg über

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos u}\,du = (1 - 2f\cos u + 2f^2\cos 2u - 2f^3\cos 3u + - \cdots)\,du,$$

$f = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}$; die gliedweise Integration ergibt:

$$\varphi-\varphi_0 = u - 2f\sin u + \frac{2}{2}f^2\sin 2u - + \cdots;$$

daraus leitet er die Entwicklung ab:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2} = \sin u + \frac{\sin 2u}{2} + \cdots;$$

er gewinnt also die Darstellung einer nichtperiodischen Funktion durch eine Fourierreihe. Später (vermutlich 1747; veröffentlicht in seiner Preisschrift über die Ungleichheiten von Jupiter und Saturn für das Jahr 1748) dehnt er diese Betrachtungen auf $f(\cos u) = \frac{1}{(1+e\cos u)^{\mu}}$ aus und gibt nun erstmals die Koeffizienten der Fourierentwicklung in der bekannten Form $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)f(x)\,dx$ und $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(nx)f(x)\,dx$ „verschlüsselt" an. Siehe dazu Euler, Opera omnia, II, 25. E 112 u. E 120.

25. 9. 1974 Otto Volk.

<u>Relation und Funktion bei de Morgan, Peirce und E. Schröder.</u>

Es wurde über Stellen der genannten Autoren berichtet, die auf die folgenden Definitionen führen: Eine Relation zwischen Elementen der Menge M und der Menge N ist eine Untermenge der Paarmenge: $R \subseteq M \times N$. Eine Relation heißt Abbildung oder Funktion, wenn sie „linkstotal" und „rechtseindeutig" ist.

Gericke

Der Übergang von einer problemorientierten Mathematik zu einer Mathematik der Funktionen von Fermat bis Euler.

Im Anschluß an den Aufsatz von A. P. Juschkewitsch über die Entwicklung des Funktionsbegriffs von 1966 wurden die beiden folgenden Fragen untersucht:
Kann bei den beiden Vätern einer analytischen Geometrie, Fermat und Descartes, eine Vorstufe des Eulerschen Funktionsbegriffs vorausgesetzt werden? Obwohl Formulierungen über die geometrisch darzustellende Beziehung zwischen zwei variablen Größen, Strecken, eine solche Vorstufe nahezulegen scheinen, konnte bei der Lösung konkreter Probleme eine Anwendung dieser Größenbeziehung nicht nachgewiesen werden. Die zweite Frage beschäftigte sich mit der Entstehung des Begriffs "functio" und seiner allmählichen Einbürgerung als Fachterminus in der Analysis. Dabei wurden insbesondere die Arbeiten von Leibniz, Jakob und Johann I Bernoulli und schließlich Euler untersucht. Vor Eulers "Introductio" von 1748, in der der Begriff "functio" zu dem zentralen Begriff der Analysis wird, erscheint das Konzept ~~auch~~ bei den vor 1748 liegenden Arbeiten Eulers ~~stets~~ weitgehend eingeschränkt auf die Bedeutung innere Funktion einer indirekt gegebenen Funktion.

Ivo Schneider

Continuity and quantification theory in the theory of functions

By 'quantification theory' I understand basically epsilontics as presented in text-books on mathematical analysis, where the techniques appear as if instantly received from heaven. In fact epsilontics had a significant prehistory followed by an extensive exposition, & I gave examples of both, thus:

1) The definitions of continuity of a function due to Cauchy & Bolzano define in Kleenean properties, though not in forms which fully emphasise the fact. They are also considerably verbal, & required symbolism by, for example, Bonnet before they became fully effective.

2) Although Cauchy defined the derivative as a limit, he also sometimes used dy/dx as a ratio. Later studies by such as Lamarle & especially Schwarz clarified the quantifier order in expressing the error term in equations such as
$$f(x_0+h) = f(x) + hf'(x) + hh_1(x,h).$$

3) Most important, early 19th century analysis had no technique of multiple limits, only single limits. Thus with $\{s_n\}$-problems there was no problem, but $\{s_n(x)\}$-problems (especially Fourier series) were often a mess. Seidel's (& Stokes's) 'arbitrarily slow convergence' (take ε in '$|r_n(x)| < \varepsilon$' to 0 & see if n stays finite) is really impossible to sort out quantificationistically. Such techniques, inspired by Weierstrass, use quantifier order explicitly.

4) The relationship between continuity & differentiability was unclear for a long time, since neither was clearly specified (for want of quantificational clarity) & infinitesimals allowed, for example, the interpretation of a cusp as an infinitely tight bend. Later work eliminated

such ambiguities, though in my view quantification plays as great a role as the removal of (informal) infinitesimals which are usually esteemed as the main cause.

I. Grattan-Guinness.

Pierre de la Ramée, Jan Brożek, Adriaan van Roomen and Giovanni Camillo Gloriosi on isoperimetrical figures

The French logician Pierre de la Ramée (1515-1572) discussed the isoperimetric problem in his Geometria (Arithmeticae libri duo, Geometriae septem et viginti, Basel 1569). In book 4 he gives the following bold reformulation of the Greek theory on isoperimetric figures: „Among isoperimetric homogeneous figures (polygons), the most regular has greater area; among heterogeneous but regular figures, the one having more sides has greater area." Ramus gives no further explanation of this postulate. He remarks only that „more regular" means the same as „less irregular", adding that among isoperimetric triangles „the equilateral has greater area than a triangle with unequal sides, and an isosceles greater area than a scalene".

For the first time in 1610 some criticism was formulated on this „postulate" by the Polish mathematician Jan Brożek (1585-1652). Comparing the isosceles triangle with sides 10, 20, 20 to the isoperimetric scalene triangle with sides 19, 20, 11, he found that the second has greater area. This contradicts Ramus' predictions. Brożek gathered from this, that something is missing in Ramus' theorem. In a letter dated Krakow 1 Oct. 1610 (Epistolae ad naturam ordinatarum figurarum plenius intelligendam pertinentes, ed. Brożek, Krakow 1615), he submitted the problem to Adriaan van Roomen (1561-1615). Van Roomen answered a few months later. He accepts Ramus' theorem as correct,

but remarks quite rightly that what is missing is an explicit definition of what is meant by „more regular".
In order to retrieve this shortcoming, van Roomen proposes two different criteria to compare the degree of regularity of polygons:
1. „A polygon is more regular according as the ratio of its greatest side to the greatest difference of two sides is greater; and according as the ratio of its greatest angle to the greatest difference of two of its angles is greater."
2. „Among polygons the more regular is the one for which the ratio of its perimeter to the radius of the inscribed circle is the smallest. This condition is true indeed, but non universally applicable, because not every polygon can be circumscribed to a circle. When we accept however circumscription in the sense that not each side has to be tangent to the circle, I think we may take the condition as general."
Taking the first criterium as definition for „more regular", van Roomen re-assumes Ramus' theorem. There is however no attempt at a demonstration. In its general form, the criterium is indeed inadequate, because it takes into account only the greatest and the smallest sides and angles. For triangles however it works.

During the years 1620-1624, while studying medicine in Padua, Brożek made friend with the mathematician and astronomer Giovanni Camillo Gloriosi (1572-1643). He submitted to him the same problem as to van Roomen. Gloriosi, who did not know van Roomen's answer, published his commentary in his Exercitationum mathematicarum decas prima (Naples 1627). He concludes that till now, nobody has been able to find a general rule for the comparison of the area of non-regular isoperimetric figures.

26-9-1974

P. Bockstaele

Bericht über einen Aufsatz von A.P. Juschkewitsch zur Geschichte des Funktionsbegriffs.

(A.P. Juschkewitsch: Die Entwicklung des Funktionsbegriffs. Ist. mat. issled. 17, 1966, S. 123-150, deutsche Übs. Forschungsinstitut des Deutschen Museums, Reihe D, 1972).

Zunächst wurden die verschiedenen Standpunkte dargelegt, die hinsichtlich des Zeitpunkts herrschen, von dem an man von einem "Funktionsbegriff" sprechen kann. Sodann wurde die Geschichte des Funktionsbegriffs in 5 Etappen geschildert: 1.) Vorstufen von Funktionen, z.B. Additions-, Multiplikations- und Divisionstabellen, etc. 2.) Antike: spezielle Funktionen, z.B. Gesetze der Akustik bei den Griechen, Treppen- und Zickzackfunktionen bei den Babyloniern der Seleukidenzeit 3.) Mittelalter: erste Definitionen von Funktion in der Pariser und Oxforder Schule (R. Swineshead, W. Heytesbury, N. Oresme) 4.) 17. Jh.: Entdeckung der analytischen Geometrie durch Fermat und Descartes 5.) 1755: Erweiterung des Funktionsbegriffs durch Leonhard Euler (1707-1783) auf die Form, die ihm auch N.I. Lobatschewsky 1834 und L. Dirichlet 1837 gegeben haben.

Karin Reich

Der Begriff der Dualgruppe bei Richard Dedekind

Richard Dedekind nahm in zwei Arbeiten 1897 und 1900 mit der "Dualgruppe" erstmals explizit die Theorie der Verbände vorweg, die erst 30 Jahre später wiederentdeckt wurde. Die Dualgruppenstruktur wird von Dedekind implizit in der Theorie der Zahlenmoduln entwickelt, die zunehmend Grundlage der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen von Dedekind wird. Die Moduln verallgemeinern den Begriff der Kongruenz und bilden mit ggT (Verbindung) und kgV (Schnitt) einen Verband. Dedekind ist vor allem von der Dualität dieser Struktur beeindruckt, auf die er mehrfach im Zusammenhang mit dem später so genannten Modulgesetz verweist. Im XI. Supplement zur 4. Aufl. von Dirichlets Zahlentheorie verweist

Dedekind in einer Fußnote auf: die aus drei Moduln mit kgV und ggT gebildete Gruppe von 28 Moduln. Das ist die Grundlage der Arbeit "Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe" 1900, in der Dedekind die meisten seiner Ergebnisse zu Dualgruppen zusammenfaßt. Es wird dort die Axiomatik der Dualgruppen, die genannte freie modulare Dualgruppe, die Äquivalenz von Kettensatz und Modulgesetz, der Dimensionssatz für endliche Dualgruppen und mehr behandelt. In der vorhergehenden Arbeit "Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler" (1897) werden Dualgruppen in einem Exkurs behandelt. Dort werden neben der Axiomatik, speziell der Unabhängigkeit von Modul- und Idealgesetz, Darstellungen von Verbänden durch den isomorphen Verband der Hauptideale gegeben (modern gesprochen). Hier ist implizit die äquivalente ordnungstheoretische Charakterisierung der Verbände enthalten, die Dedekind noch nicht besitzt. Daß Dedekinds Ansätze nicht weiterverfolgt wurden, ist einerseits damit zu erklären, daß die abstrakte Algebra noch nicht soweit war, daß die Theorie ihre vereinheitlichende Wirkung zeigen konnte; andererseits war Dedekind weder eifriger Propagandist, noch hatte er viele Schüler.

Richard Dedekind hat viele neue Begriffe mit großer logischer Präzision in Algebra und Zahlentheorie eingeführt. Das Verfahren, wie er die logische Schwäche alter Begriffe aufdeckt, die wesentlichen Eigenschaften herauspräpariert und sich diese zu neuen handhabbaren Objekten macht, indem er die Objekte, an denen sich die Eigenschaften manifestieren zusammenfaßt zu Mengen und diese neuen Objekte axiomatisch charakterisiert, zeigt sich sehr deutlich am Idealbegriff. Dieses Verfahren, die Dualität der Operationen kgV und ggT und die Bedeutung der Modultheorie in seinen Arbeiten haben dazu geführt, daß Dedekind den Verbandsbegriff vorwegnehmen konnte.

27.9.74 Herbert Mehrtens

Zahlenalphabet u. Reihenbetrachtungen in der Zahlenmystik

Die Interpretationsprobleme einer Handschrift des beginnenden 16. Jhs. (Augsburg 24) über die Gematrie wurden ausgebreitet und einige zugehörige Konjekturen vorgelegt. Die in diesem Zusammenhang vorkommende Tafel von Neunerresten und ihrer Verknüpfung (Victoria numerorum) zum Zweck der Vorhersagen konnte nur teilweise erklärt werden. Anschließend wurde der Übergang zur „mathematischen" Reihenbetrachtung innerhalb der Zahlenmystik im 16. Jh. an Beispielen aus dem Werk von P. Bongo erläutert und dabei die Tafel der angeblich vollkommenen Zahlen und die Verknüpfung der Vielfachen von 6 mit der Kubikzahlfolge als Ansatz für die allgemeinen Reihenbetrachtungen (z. B. Leibniz LMG I, 28 f.) vorgestellt.

27.9.74 Wolfgang Breidert (Karlsruhe)

Trigonometrische Funktionen in der indischen Mathematik.

Schon die jyā-Tafeln von Varāhamihira (505) waren mit Hilfe trigonometrischen Relationen berechnet. Die indischen Funktionen Sinus usw. waren von Anfang an algebraisch aufgefasst. Wenn nicht früher, hatten die Inder einen wirklichen Funktionsbegriff, z. B. von der Sinusfunktion, dann erreicht, wenn sie diese durch eine algebraische Funktion ersetzten, wie schon in Mahābhāskarīya (ung. 600):

$$\sin\alpha \approx \frac{4\alpha(180-\alpha)}{40500-\alpha(180-\alpha)} \quad \text{(max. Fehler 0,00160)}$$

Interpolationen zweiter Ordnung (Brahmagupta), modern geschrieben: $f(x+nh) = f(x) + \frac{n}{2}\{\Delta f(x-h) + \Delta f(x)\} + \frac{n^2}{2}\{\Delta f(x) - \Delta f(x-h)\}$, waren nicht nur auf trigonometrische Funktionen eingeschränkt. Nilakaṇṭha zitiert Regeln für Berechnung von Sinus und Cosinus, die mit Taylorentwicklungen (-approximationen) äquivalent sind und die er Mādhava (1350-1410) zuschreibt. z.B.

$$\sin(x+\theta) = \sin x + \left(\cos x - \frac{\sin x}{D}\right)\frac{2}{D} = \sin x + \frac{\theta}{R}\cos x - \frac{\theta^2}{2R^2}\sin x.$$

Spätestens um 1400 wurden Summationen auf Infinitesimalteile ausgedehnt (Integration), was von Mādhava für Rektifikation des Kreises gemacht wurde, z.B.

$$p = 4D - 4D\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) - 4D\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right) - \cdots \quad \text{(Karaṇapaddhati)}$$

In Yuktibhāṣa wurden wirkliche Beweise durchgeführt, sowie eine bemerkenswerte komplizierte Konvergenzverstärkung

$$\frac{p}{4D} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \pm \frac{1}{n} \mp \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)} \\[2mm] \dfrac{1/2(n+1)}{(n+1)^2+1} \\[2mm] \dfrac{1/4(n+1)^2+1}{\frac{1}{2}(n+1)[(n+1)^2+4+1]} \end{cases}$$

Hier operierten die Inder mit einer "wahlfreien" Funktion, die z.B. die verschiedenen Formen

$$\sum_{r=1}^{2p-1}(r-1)!\frac{a_r}{x^r} \qquad \text{bzw.} \quad \frac{b_1}{\cancel{x}} + \frac{b_3}{\cancel{x}} + \cdots + \frac{b_{2p-1}}{x}$$

annehmen können.

Clas-Olof Selenius (Uppsala)

CLAS-OLOF SELENIUS

Folgerungen aus der Entwicklung der Parallelogrammtheorie für die Frühgeschichte der griechischen Geometrie

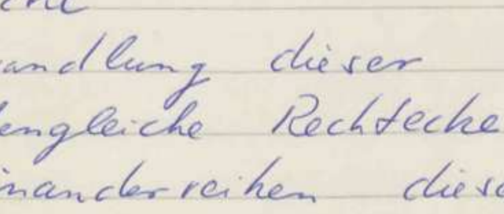
Die Parallelogrammtheorie (Elem. I,33–45) ist, wie an der letzten Tagung ausgeführt wurde, erst zur Zeit des Eudoxos entstanden. Sie sollte demnach in der Frühzeit der griechischen Geometrie nicht anzutreffen sein.

Der diesjährige Vortrag befasste sich mit Problemen der Frühzeit, in deren heutiger Formulierung entweder das Wort Parallelogramm auftritt, oder die heute mit Hilfe der Parallelogrammtheorie gelöst werden. Für sie wird gezeigt, wie sie ursprünglich ohne diese Theorie behandelt werden konnten.

I. Die Verwandlung einer geradlinigen Figur in ein ihr flächengleiches Rechteck wurde von den Pythagoreern ohne Parallelogrammtheorie in 3 Schritten durchgeführt:

1. Zerlegung ~~einer~~ der geradlinigen Figur in Dreiecke
2. Verwandlung dieser Dreiecke in ihnen flächengleiche Rechtecke
3. Aneinanderreihen dieser Rechtecke zu einem einzigen.

Wobei dem zweiten Schritt die unten stehende Figur zugrunde liegt.



Von dieser Figur ausgehend wurde auch der pythagoreische Beweis des Dreieckswinkelsummensatzes gefunden

II. Die Archytas-Lösung des delischen Problems kann wegen des Auftretens des Wortes "Parallelogramm" weder ein wörtliches Archytas- noch Eudemosfragment sein. Dies wird bestätigt: Im Text kommen im Gegensatz zum Bericht über die Möndchenquadraturen des Hippokrates keine Bezeichnungen mit Umschreibung durch ἐπί vor

E. Neuenschwander

TAGUNG über GEOMETRIE, 1974
29.9 – 4.10.

Hans Sachs: Lineare Komplexe in isotropen Räumen.

Es wird eine metrische Theorie der Gewinde im zweifach bzw. einfach isotropen Raum $J_3^{(2)}$ bzw. $J_3^{(1)}$ entwickelt, wobei die Einführung eines geeigneten Achsenbegriffes eine zentrale Rolle spielt. Die Gewinde K^1 des $J_3^{(2)}$ zerfallen je nach der Lage des Nullpunktes der Fernebene in 3 Klassen: Nichtisotrope, isotrope und vollisotrope Gewinde. Sie werden durch geeignete Normalformen beschrieben. Von den zahlreichen Resultaten sei hier erwähnt:

1) Ist K^1 nichtisotrop mit Achse $\bar{a}$, dann gilt für jeden nichtisotropen Gewindestrahl p: $d(\bar{a},p)\,\psi(\bar{a},p)$=konst. bzw. $a(\bar{a},p)\,s(\bar{a},p)$=konst.
2) Ist K^1 vollisotrop, $(g,\bar{g})$ ein Paar nichtisotroper reziproker Polaren bzgl. K^1, dann sind für jeden nichtisotropen Gewindestrahl die Momente $M(g,p)$, $M(\bar{g},p)$ gleich ("Momentensatz").

Im einfach isotropen Raum sind nichtisotrope und isotrope Gewinde zu unterscheiden. Nach Einführung eines geeigneten Achsenbegriffes kann die projektive Invariante $\Omega(a,b)$ zweier Gewinde K_1^1, K_2^1 mit den Darstellungen $\Omega(a,p)=0$, $\Omega(b,p)=0$ metrisch gedeutet werden.

Hans Sachs

Gewebe und Geradenkongruenzen

Betrachtet werden eine hyperbolische Geradenkongruenz und das Gewebe auf der Mittenfläche der Kongruenz, das durch die Sannia'schen Hauptflächen und eine Schar der Torsen bestimmt wird. Die sphärischen Bilder der Hauptflächen seien durch $\omega_{31}=0$, $\omega_{32}=0$ bestimmt. Es bezeichne $\bar{q}$ (bzw. q) die geodätische Krümmung von $\omega_{31}=0$ (bzw. $\omega_{32}=0$), p_1, p_2 die Hauptdralle, k die Krümmung der Kongruenz, $\omega_{31}\wedge\omega_{32}$ das Flächenelement des sphärischen Bildes und K^* die Gewebekrümmung. Die Pfaffsche Ableitung längs $\omega_{32}=0$ (bzw. $\omega_{31}=0$) wird mit D_1 (bzw. D_2) bezeichnet. Es wird gezeigt:

$$\int_{\partial G}(\bar{q}\,\omega_{31}+q\,\omega_{32})+\frac{1}{2}\int_{\partial G}\left\{D_1\log(-p_2)\,\omega_{31}+D_2\log p_1\,\omega_{32}\right\}$$

$$=-\iint_G K^*\sqrt{-k}\;\omega_{31}\wedge\omega_{32}\,.$$

Mit Hilfe dieser Formel wird bewiesen: Hat eine hyperbolische Geradenkongruenz zwei der folgenden drei Eigenschaften: (a) Das sphärische Bild der Hauptflächen ist isotherm. (b) Die Hauptflächen und irgendeine Schar der Torsen schneiden die Mittenfläche der Kongruenz in einem Sechseckgewebe. (c) $\frac{p_2}{p_1}=a(u)b(v)$, so besitzt sie auch die dritte.

N. K. Stephanidis (Thessaloniki) 30.9.74

Isolierte Singularitäten von Liouvilleschen Parameternetzen.

Eine Fläche, welche eine Parametrisierung der Form

$$ds^2 = (U(u)-V(v))\,(du^2+dv^2)$$

zulässt, heisst liouvillesch; hat das zugehörige Parameternetz eine isolierte Singularität, so ist diese entweder vom Typ der Singularität des

Netzes der Polarkoordinaten oder der parabolischen Koordinaten der euklidischen Ebene.
Zum Beweis dieses Satzes werden zunächst orthogonale Netze betrachtet, deren Netzkurven geodätisch sind oder dann eine geodätische Krümmung mit festem Vorzeichen haben (die Liouvilleschen Netze gehören zu diesen Netzen).

H. Walser, Zürich

Parallelverschiebung von Vektorräumen

Es wird die Parallelverschiebung von r-dimensionalen Vektorräumen T^r betrachtet, die Unterräume des Tangentialraums T^n an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n der Dimension n sind; längs einer Kurve γ erfolge die Verschiebung bei affinem Zusammenhang L. Der Unterraum T^r werde hierzu durch einen Multivektor p (schiefsymmetrischer Tensor) erfaßt, dessen Verschiebung vorgenommen wird. Für einen Riemannschen Zusammenhang Γ wird die Erhaltung des Betrages von p und der Winkel zweier windschiefer Unterräume T^r, $\bar{T}^r$ nachgewiesen. Läßt sich im bes. der Tangentialraum T^n einer Riemannschen Mannigfaltigkeit längs γ parallel verschieben, so herrscht längs γ Volumstreue. Schließlich wird eine Verallgemeinerung auf tensorielle Übertragungen im Sinne von E. Bompiani vorgenommen und die Frage nach einer damit verträglichen „tensoriellen" Metrik angeschnitten, bei denen ebenfalls Beträge u. Winkel der verschobenen Tensoren erhalten bleiben.

H. R. Müller / Braunschweig.

A survey over the theory of total absolute curvature and related topics

A compact differentiable manifold is immersed in a riemannian manifold $\widetilde{M}$, and this gives rise to various curvature measures. By integration it is possible to associate with the immersion a real number, for example, the total absolute curvature of the immersion. We now consider the infimum of these numbers taken over the whole class of immersions or else over the different regular homotopy classes of immersions, and the resulting numbers are invariants of the manifold, in particular when $\widetilde{M}$ is euclidean space. An immersion for which the total absolute curvature infimum is attained is called "tight". A natural problem is to answer for what manifolds tight immersions are possible and what are the geometrical properties of the image and the nature of the mapping.

It we replace the Lipschitz-Killing curvature of the immersion by a suitable combination of other curvature measures we obtain results of which the following is a very special case.

Let $x: M^2 \to E^3$ be an immersion of an oriented closed surface into euclidean space E^3. Then the mean curvature H satisfies the inequality

$$\int_{M^2} H^2 dS \geq 4\pi,$$

equality holding only for M^2 imbedded as a round sphere.

The Euler equation corresponding to the variational problem $\delta(I) = \int_{M^2} H^2 dS = 0$ is

$\Delta H + 2H(H^2-K) = 0.$ We conjecture that when M^2 is diffeomorphic to a surface of genus 1, the infimum value of $I(f)$ is equal to $4\pi^2$. An example is obtained of a surface whose curvatures satisfy the Euler equation and for which $I(f)$ takes the value $4\pi^2$. Since the integral is a conformal invariant for such surfaces, there exists an infinite number of surfaces for which $I(f) = 4\pi^2$.

An ingenious example due to Karcher which at first sight seems a good candidate for a counter-example to the conjecture, nevertheless gives a value of $I(f)$ about 6% higher than $4\pi^2$. All evidence available so far therefore supports the truth of the conjecture.

T. J. Willmore

(Durham, England).

Topologische Bedingungen für die Existenz von geschlossenen Geodätischen

Bei dem alten differentialgeometrischen Problem, auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten geschlossene Geodätische zu finden, und zwar möglichst viele, haben Gromoll und Meyer 1969 eine algebraisch topologische Bedingung für die Existenz von so vielen gegeben. Der Satz lautet:

Satz (Gromoll/Meyer 1969): M Riemann, kompakt, 1-zusammenhängend. Dann gibt es ∞ viele geometrisch verschiedene periodische (=geschl.) Geodätische, falls die Folge der Betti-Zahlen des topologischen Raumes ΛM unbeschränkt ist. ("Gromoll-Meyer-Bedingung": "GMB"). Dabei ist ΛM der "freie Schleifenraum" von M, der aus allen stetigen Abb. $S^1 \to M$ besteht mit der kompakt-offen Topologie

Nun ist diese topologische Bedingung kaum direkt nachprüfbar, also ist es wichtig, handlichere (topologische) Kriterien anzugeben, wann die GMB erfüllt ist.

Vermutung: GMB ist genau dann erfüllt, wenn $H^*(M, \mathbb{Q})$ als Algebra von mehr als einem Erzeugenden (positiven Grades) erzeugt wird.

Eine Richtung der Vermutung zu beweisen ist einfach: Hat man nur ein Erzeugendes, so ist GMB nicht erfüllt (klassische Homotopietheorie und verwandte Gebiete der alg. Topologie).

Ob die Vermutung tatsächlich richtig ist, ist noch nicht entschieden. Es gilt die folgende "50 %" positive Antwort:

Theorem: Die Vermutung ist richtig, falls $H^*(M, \mathbb{Q})$ frei ist oder die "erste" nicht triviale Relation in $H^*(M, \mathbb{Q})$ in gerader Dimension auftritt. Für solche Mannigfaltigkeiten gibt es also ∞ viele per. Geod., falls $H^*(M, \mathbb{Q})$ von mehr als 2 Erzeugenden erzeugt wird

Beispiel: Lie-Gruppen (mit beliebiger Metrik), Mannigfaltigkeiten mit einer CW-Struktur, die nur aus geradedim. Zellen besteht (etwa komplexe Grassmann, komplexe flag-manifolds etc.

Falls die erste Relation in ungerader Dimension auftritt, kann man eine Reihe von Teilresultaten angeben, von denen wir nur eines angeben:

Satz: Falls $\dim M \leq 11$ (möglicherweise auch noch etwas höhere Dim.) gilt die Vermutung und die entsprechende Aussage über die Relationen

Beim Beweis des Theorems werden die neueren Methoden verwendet, die Sullivan in die rationale Homotopietheorie eingeführt hat (Minimalmodelle von Differentialalgebren im wesentlichen). Der Beweis des Satzes ist eher technisch.

P. Klein, Bonn

Über n-dim. Räume mit p-dim. Volumenbestimmung.

Ein Raum mit p-Volumen besteht aus einer ~~...~~ n-dim. differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist f. einer reellwertigen, positiven, Funktion auf, welche positiv homogen ~~Funktion auf~~ F. gewesen ist und welche auf dem Grassmannbündel $G^p(M)$ der zerlegbaren p-Vektoren definiert ist $(1 \leq p \leq n-1)$. Beispiele hierfür sind der Finslersche Raum und der Cartansche Raum ($p=1$ bzw. $p=n-1$). Auf den allgemeinen Fall $(1<p<n-1)$, kann man die für diese beiden Beispiele entwickelten Theorien nicht übertragen, da $G^p(M)$ kein Vektorbündel ist. Ein genaueres Studium der hier auftretenden Schwierigkeiten zeigt, daß es sinnvoll ist, eine geeignete kovariante Ableitung und mit deren Hilfe eine riemannsche Struktur auf den ~~...~~ Grassmannbündeln zu definieren. Auf diese Weise lassen sich viele Begriffe der Finslergeometrie auf den allg. Fall übertragen.

S. Heinen, Bonn

Über die Hauptkrümmungen von Hyperflächen

Die Hauptkrümmungen einer Hyperfläche in einem beliebigen Riemannschen Raum unterliegen keinen Einschränkungen, da man stets in ~~der~~ einer $(n+1)$-dimensionalen Umgebung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^n eine Metrik einführen kann, die auf M^n einen vorgegebenen 1. und 2. Fundamentaltensor induziert. Dagegen bestehen zwischen den Hauptkrümmungen einer Hyperfläche im Euklidischen Raum R^{n+1} — allgemeiner in Räumen konstanter Krümmung — auf Grund der speziellen Form der Codazzi-Gleichungen gewisse Relationen. Z.B. gilt für $n=2$: aus $k_1 \equiv k_2$ folgt, daß beide Hauptkrümmungen konstant sind; falls k_1 und k_2 konstant und verschieden sind, folgt $k_1 k_2 = 0$. Diese Eigenschaften lassen sich folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 1: Ist M^n eine Hyperfläche im Euklidischen R^{n+1} und $k \neq 0$ eine (im allgemeinen nicht konstante) Hauptkrümmung mit konstanter Vielfachheit $\nu \geq 2$, so ist M^n eine "Kanalfläche", d.h. Hüllfläche einer $(n-\nu)$-parametrigen Schar von Hypersphären S^n vom Radius $\frac{1}{|k|}$.

Satz 2: Sind auf einer M^3 in R^4 2 Hauptkrümmungen konstant und verschieden, so ist eine davon $= 0$.

1.10. 1974 K. Voss

Diagonale Netze aus Schmieg- und Krümmungslinien

Auf einer regulären C^r-Fläche ϕ $(r \geqq 2)$ im E^3 seien vier paarweise linear unabhängige PFAFFsche Formen $\alpha_i \in C^s$ $(i=1,..,4;\ 1 \leqq s < r)$ gegeben. Sie bestimmen auf ϕ lokal ein berührungsfreies Paar von C^s-Netzen $N_1: \alpha_1=\alpha_2=0$, $N_2: \alpha_3=\alpha_4=0$. Nach W. BLASCHKE heißen zwei Kurvennetze N_1, N_2 diagonal zueinander, wenn jedes Netzviereck aus N_1 mit einer Diagonale aus N_2 noch eine zweite Diagonale aus N_2 besitzt (und umgekehrt). Jene hyperbolisch gekrümmten regulären C^r-Flächen $(r \geqq 3)$, deren Schmieg- und Krümmungslinien lokal ein Paar diagonaler (C^1) Netze bilden, nennen wir D_{SK}-Flächen. Nach Ableitung eines Kriteriums

für diese Flächen lassen sich drei weitere Kennzeichnungen angeben, insbesondere ergibt sich die Identität der Klasse der D_{SK}-Flächen mit den von N. K. STEPHANIDIS untersuchten Flächen "mit Sechseckgewebe-eigenschaft (der Krümmungslinien und einer Schar der Schmieglinien)". Schließlich werden – ausgehend von den hyperbolisch gekrümmten Drehflächen – einige herausragende Klassen von D_{SK}-Flächen bestimmt und durch entsprechende Eigenschaften charakterisiert. Beispielsweise gilt:
Die einzigen Parallelflächenklassen aus D_{SK}-Flächen der Differentiationsklasse C^6 sind jene mit einer beliebigen hyperbolisch gekrümmten Drehfläche oder einem hyperbolisch gekrümmten Flächenstück einer DUPINschen Zyklide als Repräsentanten.

1. 10. 1974

Richard Koch (München)

Clifford-Parallelismus in Inzidenzräumen.

In einem elliptischen Raum (P sei die Punktmenge, G die Geradenmenge) gibt es nach Clifford zwei Parallelenrelationen $\parallel_e$ und $\parallel_r$, so daß gilt:

P1. Zu jedem $p \in P$ und zu jedem $A \in G$ gibt es genau ein $B \in G$ mit $p \in B$ und $B \parallel_e A$ (bezeichnet mit $B =: \{p \parallel_e A\}$) bzw. $C \in G$ mit $p \in C$ und $C \parallel_r A$ (bezeichnet mit $C := \{p \parallel_r A\}$).

P2. Für alle $A, B \in G$ mit $A \cap B \neq \emptyset$ und alle $a \in A$, $b \in B$ gilt $\{a \parallel_e B\} \cap \{b \parallel_r A\} \neq \emptyset$.

H.-J. Kroll, K. Sörensen und ich konnten für einen projektiven Raum (P, G), in dem zwei Parallelenrelationen $\parallel_e, \parallel_r$ mit P1 und P2 erklärt sind, zeigen:

1. Wenn $\parallel_e \neq \parallel_r$ ist, so ist $\dim P = 3$ und $\parallel_e$ und $\parallel_r$ lassen sich mit Hilfe eines Quaternionenschiefkörpers beschreiben.
2. Wenn $\parallel_e = \parallel_r$ ist, so hat (P, G) einen kommutativen Koordinatenkörper der Charakteristik 2,

der eine rein inseparable Erweiterung vom Grad 4 gestattet.

4.10.1974 Helmut Kasel (München)

LAGRANGE-GEOMETRIE

Eine Lagrange-Geometrie ist gegeben durch eine reguläre Lagrangefunktion, d.h. eine Funktion auf dem Tangentialbündel, deren zweite Faserableitung nichtdegeneriert ist. Den Zugang zu diesem Gebiet erleichtern Begriffe, die ursprünglich für die Finslergeometrie entwickelt wurden, wie die von MATSUMOTO dargestellte Theorie der Finslerbündel. Es wird gezeigt, daß eine reguläre Lagrangefunktion L einen kanonischen Zusammenhang in diesen Finslerbündeln induziert. Mit Hilfe der zugehörigen Zusammenhangsabbildung K läßt sich auf elegante Art formulieren, wie L das Tangentialbündel mit einer hermitischen, pseudoriemannschen, symplektischen und fastkomplexen Struktur versieht. Die Lösungskurven der Differentialgleichungen von Euler-Lagrange sind die Autoparallelen des Zusammenhangs, die Geodätischen. Es wird gezeigt, daß ein Vektorfeld ξ auf dem Bitangentialbündel genau dann invariant unter dem geodätischen Fluß $\varphi: TM \to TM$ längs einer Bahn γ ist (d.h. $\varphi_{t*}\,\xi(0) = \xi(t)$), wenn $(\pi_*\xi, K\xi) = (Y, Y')$ ist, wobei Y ein Jacobifeld längs der Geodätischen $c = \pi\circ\gamma$ ist ($\pi: TM \to M$ ist die Projektion).

30.9.74 Jürgen Kern (Bonn)

Ein Satz von Brahmagupta und seine Verallgemeinerungen

Eine Funktion $\varphi(x,y)$ soll „die Funktion von Brahmagupta" heissen, wenn sie eine nicht identisch verschwindende Lösung des Systems von zwei Funktionalgleichungen

$$\varphi(x,y)\varphi(y,z)\varphi(z,x)-\varphi(x,y)\varphi(y,t)\varphi(t,x)+$$
$$+\varphi(x,z)\varphi(z,t)\varphi(t,x)-\varphi(y,z)\varphi(z,t)\varphi(t,y)=0,$$
$$\varphi(x,y)+\varphi(y,x)=0$$

ist. Es wird bewiesen, dass jede nicht identisch verschwindende linearadditive Funktion X ein Beispiel der Funktion von Brahmagupta ergibt, und dass jede Funktion $f(X)$ dieser linearadditiven Funktion, welche die Funktionalgleichung

$$f(X)f(Y)f(X-Y)+f(Y)f(Z)f(Y-Z)+f(Z)f(X)f(Z-X)+$$
$$+f(X-Y)f(Y-Z)f(Z-X)=0$$

genügt, ebenso eine Funktion von Brahmagupta darstellt. Aus einer Lösung dieser Funktionalgleichung ergibt sich dann ein Beweis des verallgemeinerten Satzes von Brahmagupta und einiger seiner Analoga.

3. X. 74 Stanko Bilinski (Zagreb)

On the Number of Isometry - Invariant Geodesics

Let M be a compact Riemannian manifold and $A: M \to M$ an isometry on M. A geodesic $\gamma: \mathbb{R} \to M$ is said to be A-invariant iff $\exists\, \theta > 0$ s.t. $A(\gamma(t)) = \gamma(t+\theta)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Two problems conserning A-invariant geodesics were discussed:

Problem 1: Do there exist non-trivial A-invariant geodesics on M?

Problem 2: If so, how many?

Both of these problems can be treated by calculus of variations-methods (critical point theory on Hilbertmanifolds):

If we let $\Lambda_{G(A)}(M) = \{\sigma: [0,1] \to M \mid \sigma(1) = A(\sigma(0)),\ \sigma \in L^2_1\}$, then $\Lambda_{G(A)}(M)$ is a complete Riemannian Hilbertmanifold in a natural way and the energy integral $E: \Lambda_{G(A)}(M) \to \mathbb{R}$, $\sigma \mapsto \int \|\dot\sigma\|^2$ is differentiable. The critical points for E are exactly the $\sigma \in \Lambda_{G(A)}(M)$ s.t. σ is a geodesics with $\dot\sigma(1) = A_* \dot\sigma(0)$. From critical point theory (E satisfies condition (C) of Palais & Smale) then follows:

Thm. 1 If there are no A-invariant geodesics on M, then

1) $1 - A_*: \pi_*(M) \to \pi_*(M)$ is an isomorphism for all $* \geq 2$

2) $A_*[\alpha] \neq [\alpha]$ for all $[\alpha] \in \pi_1(M) \setminus \{e\}$.

3) $\#\,\mathrm{Fix}(A) = \#$ components of $\Lambda_{G(A)}(M)$.

From this theorem follows in particular that any $A \sim 1_M$ has invariant geodesics, and if $A_*: \pi_*(M) \circlearrowleft$ has prime power oder and M is 1-connected then A has invariant geodesics. In both cases it is therefore natural to ask for the number of A-invariant geodesics. The main results in this direction are obtained from degeneret-Morse-theory on $\Lambda_{G(A)}(M)$:

Thm. 2 If M is 1-connected, $A^2 = 1_M$ and $\{\beta_k(\Lambda_{G(A)}(M))\}$ unbounded then A has infinitely many closed invariant geodesics.

Thm. 3 If M is 1-connected and $\{\beta_k(M^{S^1})\}$ is unbounded, then the set of $A \in I_0(M)$ (id-component of isometry group) having inf. many closed invariant geodesics is dense in $I_0(M)$.

This thm. is a generalization of a thm. of Gromoll & Meyer.

2.10.74

Karsten Grove, Kopenhagen

D-1e Krümmung und Kongruenz von Hyperflächen.

Es werden Hyperflächen in Riemann'schen Räumen betrachtet, die durch eine einparametrige Transformationsgruppe aufeinander bezogen sind, d.h. jedem Punkt p einer Fläche F wird durch eine gewisse Transformation der Gruppe auf einen Punkt $\bar{p}$ der Fläche $\bar{F}$ abgebildet. Der Kongruenzsatz für die mittlere Krümmung besagt nun, dass F und $\bar{F}$ kongruent sind, d.h. dass alle Punkte von F mit derselben Transformation abgebildet werden, falls folgendes gilt:

1) $\bar{H}(\bar{p}) = \tilde{H}(\bar{p})$ wobei $\tilde{H}$ die mittlere Krümmung der mit einem festen Parameter in den Punkt $\bar{p}$ verschobenen Fläche $\tilde{F}$ ist.

2) Die Funktion s auf $\bar{F}$ ~~$(\vec{v}, \vec{n})$~~, die durch $s(\bar{p}) = (\vec{v}, \vec{n})$ definiert ist, wobei $\vec{v}$ der Strömungsvektor, $\vec{n}$ die Normale von $\bar{F}$ in $\bar{p}$ ist, hat folgende Eigenschaft:

$s(\bar{p}) = 0 \Rightarrow \operatorname{grad} s(\bar{p}) \neq 0.$

Derselbe Satz lässt sich auch für die ν'te Krümmung H_ν beweisen, wobei zusätzlich die Annahme gemacht werden muss, dass die zweiten Fundamentalformen einer beim Beweis benötigten Flächenschar positiv definit sind.

H. Brühlen Dortmund

Euler und die orthogonale Transformation.

Zitat von Poggendorff: „Wer sich mit einer Wissenschaft bekannt machen will, darf nicht nur nach reifen Früchten greifen – er muss sich darum kümmern, wie und wo sie gewachsen sind." Kurze biographische Angaben:

Ch. Poggendorff (1796-1877), Redakteur der Annalen für Physik und Chemie (160 Bände) und Verf. des biographischen Handbuchs der exakten Naturwissenschaften I, II (1863).

H. Wieleitner (1874-1931), Verf. einiger Bücher über algebraische Kurven und Geschichte der Mathematik. Gymnasiallehrer, zuletzt Oberstudiendirektor in München.

H. Liebmann (1874-1939), Priv. Doz. in Leipzig, a.o. Prof. an der T.H. München und o. Professor a.d. U. Heidelberg. 1898 Nachweis der Unverbiegbarkeit der Kugel als der einzigen, singularitätenfreien geschlossenen Fläche; 1919 Verbiegbarkeit der

Kugel mit Hut. Ein grosser Humanist, Philosoph und Philologe, der z.B. die Wahrscheinlichkeitslehre von Markoff und die nichteuklidische Geometrie von Lobatschefski wie von Bonola ins Deutsche übertrug.
Kurzer Bericht über die K.-St.-Transformation (Kustaanheimo-Stiefel) in der Himmelsmechanik:

$x = u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2$, $y = 2(u_1 u_2 + u_3 u_4)$, $z = 2(u_1 u_3 - u_2 u_4)$. Sie steht bereits bei Euler im Briefe an Chr. Goldbach vom 23.4/4.5.1748. (siehe Leonhard Euler und Chr. Goldbach, Briefwechsel 1729–1764; Abh. d. d. Akad. der Wiss. zu Berlin Jahrgang 1965 Nr. I. Nr. 127, S. 289.
Ausführlicher Bericht über Eulers zahlentheoretische Arbeiten im Anschluss an Fermat und Diophant, die sich über 50 Jahre erstrecken. Die ~~..~~ ~~..~~ sog. Eulersche Identität:

$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = A^2+B^2+C^2+D^2$, wo A, B, C, D im wesentlichen Quaternionen darstellen, und die aus ihr folgenden Orthogonalitätsformeln finden sich in E 242, Opera omnia I,2, S. 269; E 445, O.O. I,3, 218–239.
S. 287–315: Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile;
E 407, O.O. I,6, worüber eingehend berichtet wird. – Hier kommt das Wort „quasi divinando" vor.

3. 10. 1974.

Otto Volk.

Energiekomplexe in der Einstein-Schrödinger-Geometrie

Als Energiekomplex bezeichnet man diejenige Erhaltungsgröße, die nach dem Noetherschen Theorem (von 1918) aus der Invarianz der Lagrange-Funktion gegenüber Translationen bestimmt wird. Es werden zwei verschiedene Lagrange-Funktionen betrachtet. Der zur ersten gehörige Energiekomplex $\overset{1}{T}{}_q^{\,p}$ zeichnet sich dadurch aus, daß sich $\overset{1}{T}{}_1^{\,p}$ bei ~~Koor~~ Automorphismen der Unterräume x^1 = konst vektoriell transformiert. (Dies wird sogar für eine größere Klasse von Geometrien gezeigt.) Der von der zweiten Lagrangefunktion abgeleitete Energiekomplex ist invariant gegen Eichtransformationen des Torsionsvektors. Außerdem hat er ein günstiges Konvergenzverhalten, wenn sich der metrische Tensor konstanten Werten nähert. – Es wird gezeigt, daß in einer speziellen Lösung der Feldgleichungen $\hat{T}_q{}^p$, $\overset{2}{T}_q{}^p$ und alle anderen geläufigen Energiekomplexe verschwinden. Die Folgen für eine physikalische Interpretation werden kurz erwähnt.

Klaus Buchner (München)

Scheibenpackungen mit maximaler Nachbarnzahl

Unter einer Scheibe verstehen wir eine offene, beschränkte und konvexe Teilmenge der euklidischen Ebene. Eine Menge paarweise disjunkter Scheiben heißt Packung. Diejenigen Scheiben, die eine bestimmte Scheibe S einer Packung berühren, heißen Nachbarn von S. Die größte Anzahl von Nachbarn, die in einer Packung von zu S kongruenten Scheiben auftreten kann, heißt die Newtonsche Zahl von S. Eine Packung kongruenter Scheiben heißt Maximalpackung, wenn die Anzahl n der Nachbarn einer jeden Scheibe gleich der Newtonschen Zahl ist. L. Fejes Tóth vermutete, daß es Maximalpackungen nur für $n \leq 21$ gibt. Im Vortrag wurde dafür ein Beweis skizziert. Er beruht im wesentlichen auf folgendem Satz: Wenn in einer endlichen Packg. jede Scheibe mindestens n Nachbarn hat, und höchstens g Scheiben einen gemeinsamen Randpunkt haben, dann gilt für $g \geq 3$: $n < 2g$; und für $g \geq 12$: $n < (g^2 - 3g + 18)/(g-6)$. Zum Beweis dieser Ungleichungen werden jeder Packg. zwei bestimmte ebene Graphen zugeordnet, auf die dann der Eulersche Polyedersatz angewendet wird.

Johann Linhart (Salzburg)

Endliche widerspruchsabgeschlossene Systeme

Sei P_n ein n-dimensionaler projektiver Raum. Dann heißt eine Menge $\mathfrak{A}$ von k-dimensionalen Teilräumen "widerspruchsabgeschlossen", wenn ~~nicht~~ je zwei Räume von $\mathfrak{A}$ einen nicht-leeren Schnitt haben und jeder k-dimensionale Teilraum von P_n, der mit jedem Raum von $\mathfrak{A}$ einen nicht-leeren Schnitt hat, zu $\mathfrak{A}$ gehört. Es ist möglich, zu jeder endlichen projektiven Ebene E ein widerspruchsabgeschlossenes System zu konstruieren, das nur aus endlich vielen Räumen besteht und ein Modell der Ebene E ist. Die Konstruktion erfolgt so: Sei E eine Ebene der Ordnung k, und $n = k^2+k$, und P_n ein beliebiger projektiver Raum. Die Abbildung $f: E \to P_n$ besitze folgende Eigenschaft: $\langle f(E) \rangle = P_n$. Dann bilden die Räume $P_k = \langle \{ f(g) \mid g \subset E \text{ Gerade} \} \rangle$ ein endliches widerspruchsabgeschlossenes System.

3.10.1974

Jörg Tenge (Hamburg)

Abbildungen von Riemannschen Räumen, bei denen Krümmungseigenschaften von Hyperflächen erhalten bleiben

Vor kurzem hat der Verfasser Abbildungen von Riemannschen Räumen untersucht, bei denen Kreise, d.h. Kurven konstanter 1. und verschwindender 2. Krümmung, wieder in Kreise übergehen. Verallgemeinerungen des Kreises des zweidim. Raumes sind z.B. die Hyperflächen konstanter mittlerer Krümmung bzw. konstanter Kronecker-Krümmung, von denen die Nabelhyperflächen konstanter Krümmung ein Sonderfall sind. Hier werden Abbildungen Riemannscher Räume betrachtet, bei denen diese Hyperflächen in ebensolche übergehen. Von den zahlreichen Ergebnissen, die hier der Kürze wegen nicht erwähnt werden können, sei nur ein Corollar erwähnt: Eine Abbildung der n-Sphäre auf sich, bei der jede Minimalhyperfläche in eine Hyperfläche konstanter mittlerer Krümmung übergeht, ist eine isometrische Bewegung.

Walter Vogel (Karlsruhe)

Differentialgleichungen auf der Sphäre und Verallgemeinerungen

Die folgenden bekannten Sätze sind Spezialfälle des nachfolgenden Theorems.

SATZ 1. Sei $f \in C^2$, $f: S^2 \to \mathbb{R}$, nichtkonstante Lösung der Dgl. $\Delta f + 2f = 0$. Dann ist f linear, d.h. $f = \langle x, a \rangle$, $a \in \mathbb{R}^3$, x Ortsvektor der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. (Δ Laplace-Operator)

2. Ist $f \in C^2$ und f Lösung der homogenen Weingartengleichung $\frac{\det(\nabla_j \nabla_i f)}{\det(e_{ij})} + f\Delta f + f^2 = 0$ auf der Einheitssphäre, so ist f linear.

Theorem: Sei $f: S^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^4$ und sei $A_{ij} := \nabla_j \nabla_i f + f \cdot e_{ij}$ (e_{ij} Metriktensor auf der Sphäre). Sei $A_{(r)}$ die r-te normierte elementarsymmetrische Funktion von A. Erfüllt dann f die Differential-Ungleichung

$$Q := A_{(2)} \cdot \nabla(A_{(1)}) - A_{(1)} \nabla(A_{(1)}, A_{(2)}) \geqq 0,$$

so ist $f = \langle x, a \rangle + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Die Ungleichung $Q \geqq 0$ ist insbesondere dann erfüllt, wenn (α) $A_{(1)} = \text{const}$; (β) $A_{(2)} = \text{const} \geqq 0$; ($\gamma$) $A_{(1)} \geqq 0$, $A_{(2)} \geqq 0$ und $\nabla(A_{(1)}, A_{(2)}) \leqq 0$; ($\delta$) $A_{(1)} \neq 0$, $\nabla\left(A_{(1)}, \frac{A_{(2)}}{A_{(1)}}\right) \neq 0$.

Lemma: $Q \geqq 0$ impliziert $\nabla_k A_{ij} \nabla^k A^{ij} - \nabla(\mathrm{Sp} A) \geqq 0$.

Lemma: a) Sei M kompakt, zusammenhängend, Riemannsch mit nichtnegativer Schnittkrümmung. A sei ein symm. $(0,2)$-Tensor, der $\nabla_k A_{ij} = \nabla_j A_{ik}$ erfüllt (Codazzi-Tensor). Gilt analog $Q \geqq 0$, so folgt $\nabla_k A_{ij} \nabla^k A^{ij} = \nabla(\mathrm{Sp} A)$.

b) Ist die Schnittkr. positiv, so folgt $A_{ij} = \mu \cdot g_{ij}$, $\mu = \text{const}$, g_{ij} Metriktensor auf M.

Lemma: $A_{ij} = \nabla_j \nabla_i f + f \cdot e_{ij}$ ist ein Codazzitensor auf $S^n(1)$.

Hauptsatz. Sei M n-dim., kompakte Riemann-Mannigf. mit dim $M \geqq 2$. Es gelte (α) der Ricci-Tensor ist parallel auf M; (β) die Schnittkrümmung ist $\geqq \frac{1}{2}$; (γ) es ex. ein nichtkonstantes $f \in C^4$, $f: M \to \mathbb{R}$, mit $\Delta f + nf = 0$

Dann ist M isometrisch zu $S^n(1)$.

Udo Simon

Isometry group of certain Riemannian manifold.

Let M^n be an n dimensional connected Riemannian homogeneous manifold which admits an isometric immersion of type number 2 into a space form $\bar{M}^{n+1}$ of non vanishing curvature. Then we have the following theorem:

Theorem.

1) The dimension (n) of M^n is equal to 3.
2) If $\bar{M}^4$ is a hyperbolic space, M^3 is represented by the following matrix group G

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ 0 & z^{-1} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R},\ z > 0 \right\}$$

with left invariant metric $ds^2 = z^{-2}dx^2 + z^2dy^2 + z^{-2}dz^2$.
The identity component of the group of all isometries of M^3 is just G. (G acts on G by left.)

3) If $\bar{M}^4$ is a sphere, the Lie algebra of the groups of all isometries of M^3 is isomorphic to $SO(3) \oplus SO(2)$ or $SO(3)$.

Fortsetzung von Flaggenabbildungen mit Kegelbildung

Sei $R_a(P_n)$ die Menge aller projektiven Teilräume des P_n der Dimension a. Unter einer Flaggenabbildung f zwischen Räumen $R_a(P_n)$ und $R_b(P_s)$ versteht man eine Abbildung mit der Eigenschaft: Zu $\alpha \in PGL(P_n)$ gibt es ein $\alpha' \in PGL(P_s)$ mit $f \circ \alpha = \alpha' \circ f$. Definiert man die Summe in natürlicher Weise, so läßt sich ein Kegel als $f + p\,(R_a P_n)$ definieren, wobei p konstant ist. Eine Abb. g heißt Fortsetzung $g: R_{a+t}(P_{n+t}) \to R_r(P_s)$ $t > 0$, wenn gilt $g / R_a(P_n) = f + p$ mit p konstant. Eine Abb. die nicht Fortsetzung ist, heiße Keim (mit Kegelbildung). Es ergibt sich für einen Keim gilt $n = 1$. Die Verringerung der Dimension der Kegelspitze beim Schritt von $n=1$ zu $n=2$ läßt sich abschätzen. Es ergeben sich in den einfachsten Fällen als nicht fortsetzbare Abbildungen $\left\{ \begin{matrix} R_a(P_2) \to R_2\langle V_2^3 \rangle_5) \\ P_0 \to \langle V_1^2 \rangle_2(P_0) \end{matrix} \right.$ und die Abbildungen $g \left\{ \begin{matrix} R_a(P_{n+1}) \to R_{\binom{n+1}{a+1}}(P_{\binom{n+2}{a+2}}) \\ P_0 \to \langle G_{n,a} \rangle (P_0) \end{matrix} \right.$ mit $P_{\binom{n+2}{a+2}} = \langle G_{n+1,a+1} \rangle$. Die Abbildungen g lassen sich charakterisieren und die Dimensionen der linearen Räume des Keims und der Spitze lassen sich angeben. Es sind benachbarte Binomialkoeffizienten. Für andere Dimensionen existiert keine Fortsetzung, die sich nicht weiter fortsetzen läßt, wenn der Keim ein Segrekegel ist

H. Timmermann (Hamburg)

Totale Absolutkrümmung von berandeten Untermannigfaltigkeiten euklidischer Räume

In Analogie zur Definition der totalen Absolutkrümmung im Fall geschlossener Mannigfaltigkeiten kann für C^∞-Immersionen $f: (M,\partial M) \to \mathbb{R}^N$ berandeter kompakter Mannigfaltigkeiten definiert werden
$\tilde{\tau}(f) := \frac{1}{2}\tau(M_\varepsilon \to \mathbb{R}^N)$, wobei M_ε aus M durch hinreichend kleines „Aufblasen" in Normalenrichtung entsteht.
Ferner liefert die bekannte differentialtopologische Interpretation der totalen Absolutkrümmung die Definition:

$$\tilde{\tilde{\tau}}(f) := \frac{1}{c_{N-1}} \int_{z \in S^{N-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(zf)\, \sigma_{N-1} \qquad (*),$$

wobei $\mu_k(zf)$ die Anzahl der H-kritischen Punkte p der Höhenfunktion zf v. Index k ist, jeder gemäß der Dimension des lokalen Homologiemoduls $H_k((zf)_c, (zf)_c \setminus \{p\})$ gezählt.
Es wird der Satz gezeigt: $\tilde{\tau}(f) = \tau(f|_{\mathring{M}}) + \frac{1}{2}\tau(f|_{\partial M}) = \tilde{\tilde{\tau}}(f) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \dim H_k(M)$.
Diese Beziehung ermöglicht ähnliche Sätze wie im Fall geschlossener Mannigfaltigkeiten, insbesondere bzgl. minimaler Immersionen.
Ferner ist $(*)$ auch anwendbar auf polyhedrale und topologische Einbettungen, auch von Nicht-Mannigfaltigkeiten, z.B. Graphen.
Ein offenes Problem: Existenz (und ggf. Charakterisierung) von minimalen C^∞-Immersionen des 2-dim. Torus minus einer offenen Scheibe in den $\mathbb{R}^N$.

Wolfgang Kühnel (Berlin)

Der Kongruenzsatz von V. G. GROVE für berandete Untermannigfaltigkeiten des R^{n+1}.

V. G. GROVE hat 1957 mit Hilfe der im Cartanschen Kalkül angewandten Integralformelmethode bewiesen, daß eine Eifläche des euklidischen dreidimensionalen Raumes R^3 durch die Gaußsche Krümmung und die zweite Fundamentalform bis auf eine Bewegung oder

Spiegelung eindeutig bestimmt ist. Zu diesem Satz gibt es Beweise mit verschiedenen Methoden von F. MUENZNER, U. SIMON u. W. WENDLAND, K. LEICHTWEISS, R. WALDEN u. B. WEGNER und eine Verallgemeinerung auf geschlossene Hyperflächen des R^{n+1} von R. GARDNER. Der Kongruenzsatz von GROVE läßt sich auf berandete Untermannigfaltigkeiten beliebiger Kodimension des R^{n+1} erweitern und zwar im Anschluß an die Arbeit von GARDNER unter alleiniger Verwendung des Tensorkalküls. Wir beweisen den

Satz: Seien $x, \bar{x}: M_n \to R^{n+m}$ zwei isometrische Immersionen einer berandeten orientierbaren zusammenhängenden Riem. Mannigfaltigkeit mit $M_n \in C^r\ (r \geq 3)$ und $\partial M_n \in C^s\ (s \geq 1)$ und den Eigenschaften:

a) ξ bzw. $\bar{\xi}$ seien jeweils global existierende im Normalenbündel parallele Normalschnitte mit gleicher zugehöriger positiv definiter Fundamentalform, also $B(\xi)_{ij} = B(\bar{\xi})_{ij}$,

b) die zu ξ bzw. $\bar{\xi}$ gehörenden Gauß-Kronecker-Krümmungen seien gleich, also $K(\xi) = K(\bar{\xi})$

c) die durch $E_{ij} := \langle \xi_{,i}, \xi_{,j} \rangle$ bzw. $\bar{E}_{ij} := \langle \bar{\xi}_{,i}, \bar{\xi}_{,j} \rangle$ mit ξ aus a) definierten Metriken (M_n, E) bzw. $(M_n, \bar{E})$ seien negative Einsteinmetriken mit gemeinsamer Skalarkrümmung, also $R(E)_{ij} = \lambda E_{ij}$ und $R(\bar{E})_{ij} = \lambda \bar{E}_{ij}$,

d) die bezüglich der 2. Fundamentalform normierten Randstreifen von $x(\partial M_n)$ bzw. $\bar{x}(\partial M_n)$ seien kongruent.

Dann gilt $x(M_n)$ und $\bar{x}(M_n)$ sind I-isometrisch.

Eckehart Gläßner (Stuttgart).

On co-isotropic submanifolds of a para-Kählerian manifold

by Radu ROSCA

Let M be a C^∞ submanifold of a para-Kählerian manifold K and let $T_p(M)$ and $T_p^\perp(M)$ be the tangent and normal space to M at $p \in M$. This paper is concerned with co-isotropic submanifolds of K, i.e. such that $T_p^\perp(M) \subset T_p(M)$. Denoting by C such a manifold we decompose $T_p(C)$ in a para-Hermitian part $H_p(C)$ and in a isotropic part $I_p(C)$. This splitting of allows to define the mean curvature vector associated with $x: C \to K$. So we reach the theorem that any x inclusion is quasi-minimal. Furthermore C is a pre-symplectic (C, Ω) manifold and if it admits a para-Hermitian parallel field, then this field is an infinitesimal automorphism of Ω and behaves as a Hamiltonian system.

R Rosca (Rumänien)

Riemannsche Immersionen der Kodimension 2 von Raumformen.

Sei $f: M^m(C) \to \tilde{M}^{m+2}(\tilde{C})$ eine riemannsche Immersion einer vollständigen m-dim. riem. Mgf. von konstanter Krümmung C in eine $(m+2)$-dim. riem. Mgf. von konstanter Krümmung $\tilde{C}$, wobei $C > \tilde{C}$, $m \geq 4$. Dann existiert eine kanonische $(m-1)$-dim. Blätterung L der Menge G aller Nicht-Nabelpunkte von f derart, daß alle Blätter von L nabelsch sowohl in M^m als auch in $\tilde{M}^{m+2}$ sind, und jedes Blatt von L ist vollständig.

Ist $C > 0$ und gilt zusätzlich a) $\tilde{M}^{m+2} \in \{S^{m+2}, P^{m+2}$ (= reeller projektiver Raum), $\mathbb{R}^{m+2}$, H^{m+2} (= hyperbolischer Raum)$\}$ oder b) M^m nicht isometrisch zu einem P^m, so ist die Blätterung eine global-triviale Faserung mit typischer Faser S^{m-1}.

Sei spezieller f eine riemannsche Immersion von $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ in $\mathbb{R}^{m+2}$. Dann gilt nach ERBACHER für alle Punkte p der dichten Teilmenge $S^m \setminus \partial G$ von S^m: Es existiert eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von p in $\mathbb{R}^{m+1}$ und eine riemannsche Immersion $\tilde{f}: \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^{m+2}$ der offenen riemannschen Untermgf. $\mathfrak{U}$ von $\mathbb{R}^{m+1}$ in den $\mathbb{R}^{m+2}$ mit $\tilde{f}|\mathfrak{U} \cap S^m = f|\mathfrak{U} \cap S^m$. Es wurde eine Verschärfung dieses Satzes bewiesen, die zusätzlich eine Aussage darüber macht, wie groß die Umgebung $\mathfrak{U}$ gewählt werden kann.

Wolfgang Henke (Köln)

Zum Begriff der Parallelen in mehrdimensionalen affinen Räumen.

$\mathfrak{P}$ sei eine Menge von „Punkten", in der „Geraden", d. h. Teilmengen, die durch irgend zwei Elemente festgelegt sind, existieren. Definiert man die „Parallelität" zweier Geraden in geeigneter Weise, so erhält man bei alleiniger Zugrundelegung des Parallelenaxioms eine affine Geometrie über $\mathfrak{P}$, die wie üblich in eine projektive Geometrie eingebettet werden kann. Dabei wird allerdings angenommen, daß es auf jeder Geraden mindestens fünf Punkte gibt. Für weniger als drei Punkte gibt es ein Gegenbeispiel von M. Hall jr.

J. L. [illegible] (Leicht, Heidelberg)

Laguerre-Kinematik in der Ebene

Die Kinematik einparametriger Scharen von Abbildungen der Laguerre-Ebene auf sich - kurz L-Bewegungen genannt - weist im affinen Modell der Laguerre-Geometrie manche Analogien mit der euklidischen Raumkinematik auf. Es scheint daher von Interesse, die Theorie der L-Bewegungen in der Ebene selbständig zu entwickeln.

Es werden die Grundlagen der ebenen Laguerre-Kinematik behandelt und eine Einteilung in sieben Typenklassen angegeben. Diejenige Typenklasse, die die euklidischen Bewegungen der Ebene enthält wird exemplarisch näher untersucht. Es handelt sich dabei um diejenigen L-Bewegungen, deren Momentanbewegung eine elliptische Schraubung ist.

Die Punkte, deren Bahntangenten isotrop sind, liegen auf dem (quadratischen) Krümmungskreiszylinder. Die dazu gehörenden Kreise der euklidischen Modellebene bei isotroper Projektion durchlaufen Krümmungskreise ihrer einzigen Hüllkurve. Diejenigen Punkte des Krümmungskreiszylinders, die zu Wendepunkten ~~durchlaufen~~ der Hüllkurven gehören, bilden eine Kurve vierter Ordnung auf dem Zylinder und ihre Bahntangenten bestimmen einen Laguerre-Hyperzykel vom Blaschke Typ IV. Die stationären Krümmungskreise (=Scheitelkreise) gehören zu Punkten, die auf einer Kurve 6. Ordnung des Krümmungskreiszylinders liegen.

Helmut Frank, Freiburg

FUNKTIONALANALYSIS

6.–11. Oktober 1974

A Fréchet space E with $\mathcal{L}(E)$ commutative; a rigid topological vector space.

The topological vector spaces in this talk are of course not locally convex. E_0 is called rigid if the only continuous linear transformations of E_0 are scalar multiplications (homotheties). The main point in the talk is the description of a complete metrizable space of function E with few endomorphisms, the only ones being multiplications by suitable continuous functions. E also has a dense subspace E_0 such that a continuous linear $E \to E$ which maps E_0 in E_0 is a scalar multiplication. So E_0 is rigid.

Turpin's results on continuous linear mappings of non locally convex Orlicz spaces (Studia Math, 1973) are essential in the construction.

We need here a function $\rho(x, t)$ of two variables, $\Gamma \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (Γ the Cantor set), continuous in (x,t), $\rho(x, 0) = 0$, subadditive in t for all constant x, and satisfying a condition somewhat stronger than the following: for $x \neq x'$, $\lim\sup_{t\to\infty} \rho(x', t)/\rho(x,t) = \infty$. The space $E = L_\rho(\Gamma)$ is that of measurable, almost everywhere defined u such that

$$\nu_\rho(u) = \int_\Gamma \rho(x, |u(x)|)\,dx < \infty$$

with the $\mathcal{F}$-~~sem~~ norm ν_ρ. This has few continuous endomorphism and a rigid, dense subspace.

L. Waelbroeck

Une classe d'espaces de Banach réticulés riches en formes réticulantes

[forme réticulante = Lattice homomorphism = Verbandhomomorphismus]

Notations: Let V be a Banach lattice, $P(V)$ the set of positive linear forms and $GP(V)$ the cone of lattice homomorphisms.

The following properties are équivalent:
(H 1) Every closed ideal in V is the $\cap$ of the maximal closed ideals it contains
(H 2) Every proper closed face of $P(V)$ contains a l. homom. $\neq 0$.
(H 3) $G(PE)$ separates Baire functions associated to V (thus is QUASIDISKRET in the sense of WOLFF)
(H4) $GP(E)$ separates u.s.c. functions associated to V
(H5) $GP(E)$ séparates u.s.c. Baire " " " ".
(H 6) If $v_n \downarrow$ in V_+ and $R(v_n) \to 0$, $\forall R \in G(P(V))$, $v_n \to 0$
(H 7) For each $L \in P(V)$, there is a ≥ 0 Radon measure θ_L on $GP(V)$ s.t.:

$$L(v) = \int_{GP(V)} v \, d\theta_L ,$$

and characterize a class of Banach lattices. The property that $GP(V)$ separates points in V is not equivalent to these. These spaces are exactly the one for which one can define the structure space as I did for M-spaces. The topological ~~feature~~ nature of the structure space ~~expresses~~ reflects the structure of V.

A Goullet-Mayes

Abschätzungen für subdominante Spektralwerte

Es sei E ein Banachraum über dem Körper der komplexen Zahlen und T ein beschränkter Endomorphismus von E. Mit Hilfe der Norm eines von T induzierten "Quotientenoperators" $\hat{T}$ werden subdominante Spektralwerte von T abgeschätzt. Für Matrizen ergeben sich dabei folgende neue Ergebnisse:

Es sei $T = (t_{ik})$ $(t_{ik} \in \mathbb{C})$ eine quadratische $n \times n$-Matrix mit konstanter Zeilensumme λ_0. Ferner sei $\rho(T) := \max_{i,k} \left\{ \sum_{s=1}^{n} |t_{is} - t_{ks}| \right\}$. Dann gilt

$|\lambda| \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \rho(T)$ für alle Eigenwerte λ von T mit $\lambda \neq \lambda_0$.

Ist T reell, so gilt in der vorhergehenden Abschätzung sogar $|\lambda| \leq \frac{1}{2} \rho(T)$.

Egon Scheffold (Darmstadt).

Lokalkonvexe Garben stetiger Funktionen

Auf lokalkompakten Hausdorffraum X mit abzählbarer Basis, derart daß jede offene Teilmenge im Unendlichen abzählbar ist, werden Untergarben $\mathcal{F}$ der Garbe $\mathcal{C}$ der stetigen komplexwertigen Funktionen betrachtet, für welche $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ in $\mathcal{C}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset X$ offen, abgeschlossen ist. Beispiele liefern Lösungsräume gewisser (partieller) Differentialoperatoren. Sind alle $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ nukleare Räume, so folgt bereits die s-Nuklearität von $\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

Mit Hilfe des ε-Produktes von L. Schwartz kann man zu Garben $\mathcal{F}_i$ (vom obigen Typ) auf X_i $(i = 1,2)$ eine Produktgarbe $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \varepsilon \mathcal{F}_2$ auf $X_3 = X_1 \times X_2$ definieren, welche die Eigenschaft $\mathcal{F}_3(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2) = \mathcal{F}_1(\mathcal{U}_1) \,\varepsilon\, \mathcal{F}_2(\mathcal{U}_2) \subset \mathcal{C}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)$ für jedes offene $\mathcal{U}_i$ in X_i hat $(i=1,2)$ und wieder vom gleichen Typ ist. Dies kann man dazu benutzen, um (analog wie in einer früheren Arbeit von B. Gramsch) den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

Satz. Sei $P(D)$ ein hypoelliptischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten auf $\mathbb{R}^N$. Die Garbe $\mathcal{N}_{P(D)}$ ist definiert mittels $\mathcal{N}_{P(D)}(\mathcal{U}) = \{ f \in C^\infty(\mathcal{U});\ P(D)f = 0 \}$, $\mathcal{U}$ offen in $\mathbb{R}^N$. X sei lokalkompakt und $\Lambda \subset X \times \mathbb{R}^N$ offen, so daß für jedes $x \in X$ die Menge $\Lambda_x = \{ t \in \mathbb{R}^N;\ (x,t) \in \Lambda \}$ $P(D)$-konvex (im Sinne von Hörmander) ist.
Dann gilt:

(1) $\mathcal{C}\,\varepsilon\,\mathcal{N}_{P(D)}(\Lambda)$ hat die (Grothendieck'sche) Approximationseigenschaft.

(2) Ist $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ eine exakte Sequenz von (F)-Räumen, so ist die Sequenz $0 \to (\mathcal{C}\,\varepsilon\,\mathcal{N}_{P(D)}(\Lambda)) \check{\otimes}_\varepsilon E_1 \to (\mathcal{C}\,\varepsilon\,\mathcal{N}_{P(D)}(\Lambda)) \check{\otimes}_\varepsilon E_2 \to (\mathcal{C}\,\varepsilon\,\mathcal{N}_{P(D)}(\Lambda)) \check{\otimes}_\varepsilon E_3 \to 0$ ebenfalls exakt.

Auch für die Beschreibung des ε-Produktes gerichteter induktiver Limites von Funktionen in $\mathcal{F}$ mittels eines Produktsatzes kann man die Produktgarbe mit Vorteil verwenden.

(Gemeinsame Arbeit von K. Bierstedt, B. Gramsch und R. Meise; Vortrag von R. Meise)

(für R. Meise:) (Düsseldorf) K. Bierstedt (Mainz)

Minimale Fortsetzungen additiver Funktionale

Der Fortsetzungssatz von G. AUMANN für monotone additive Funktionale auf prägeordneten kommutativen Halbgruppen ist kürzlich von B. FUCHSSTEINER verallgemeinert worden. In der vorgetragenen Arbeit wird eine Version des Aumann-Fuchssteinerschen Satzes behandelt, die genau der von P.R. ANDENAES bewiesenen Variante des Satzes von Hahn-Banach entspricht:

Gegeben sei eine prägeordnete kommutative Halbgruppe E und eine beliebige Teilmenge S von E. p bzw. q seien numerische subadditive Funktionale auf Unterhalbgruppen P bzw. Q von E, f sei ein numerisches additives Funktional auf einer Unterhalbgruppe F von E. Dann ist eine (der Aumannschen Forderung entsprechende) einfache

Majorisierungsbedingung notwendig und hinreichend dafür, daß f sich zu einem isotonen monotonen additiven Funktional g auf E fortsetzen läßt, welches auf P von p majorisiert, auf Q von $-q$ minorisiert wird und auf S minimal ist.

Eine aus der Vektorraumsituation bekannte Kennzeichnung der Eindeutigkeit minimaler Fortsetzungen wird übertragen. Entsprechend den Anwendungen des Satzes von Andenaes in der CHOQUETschen Theorie für Vektorräume stetiger reeller Funktionen lassen sich die hier erzielten Ergebnisse auf Halbgruppen von nach unten halbstetigen Funktionen anwenden, die auf einem kompakten Raum definiert sind und Werte im Intervall $]-\infty, \infty]$ annehmen, sich also einer Behandlung im Rahmen der Vektorräume entziehen.

Bernd Anger (Erlangen)

Über zerlegbare Operatoren

Sei E ein (B)-Raum und $\mathcal{L}(E)$ die (B)-Algebra aller stetigen linearen Operatoren auf E. Ein abgeschlossener, unter $T \in \mathcal{L}(E)$ invarianter Teilraum E_1 von E heißt spektral maximal bzgl. T, falls E_1 alle abgeschlossenen, unter T invarianten Teilräume E_2 mit $\sigma(T|E_2) \subseteq \sigma(T|E_1)$ enthält. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt (schwach) m-zerlegbar, falls es zu jeder offenen Überdeckung $\{U_j\}_{j=1}^{m}$ von $\sigma(T)$ ein System $\{E_j\}_{j=1}^{m}$ zu T spektral maximaler Räume gibt mit (i): $\sigma(T|E_j) \subset U_j$ ($j = 1, \dots, m$) und (ii) $E = \sum_{j=1}^{m} E_j$ (bzw. $E = \overline{\sum_{j=1}^{m} E_j}$). T heißt (schwach) zerlegbar, falls T für alle $m \in \mathbb{N}$ (schwach) m-zerlegbar ist. Bekanntlich gilt (St. Frunză): zerlegbar $\Rightarrow$ 2-zerlegbar $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ schwach zerlegbar. Es wird gezeigt:

SATZ 1: Es gibt einen schwach zerlegbaren Operator, der nicht 2-zerlegbar ist.

SATZ 2 (in einer gemeinsamen Arbeit mit F.-H. Vasilescu bewiesen):

(a) Jeder 3-zerlegbare Operator ist zerlegbar.

(b) Jeder 2-zerlegbare Operator T mit $\dim(\sigma(T)) \leq 1$ ist zerlegbar.

Ernst Albrecht

Ein Satz über abstrakte analytische Funktionen

Es sei (X, Σ, m) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $H \subset L^\infty(m)$ eine $\sigma(L^\infty(m), L^1(m))$ abgeschlossene Teilalgebra mit $1 \in H$, so daß m auf H multiplikativ ist. Weiter sei m Szegö-Maß bezüglich H, das heißt, besteht für ein $V \in L^1(m)$, $V \geq 0$ die Relation $\int uV\,dm = \int u\,dm$ für alle $u \in H$, so folgt $V = 1$.

Gegenstand des Vortrages ist der folgende Satz:

Satz: Es seien $\varphi_n \in L^1(m)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ so daß $\lim_{n\to\infty} \int f\varphi_n\,dm$ existiert für alle $f \in H$.

Dann gibt es ein $\varphi \in L^1(m)$ so daß $\lim_{n\to\infty} \int f\varphi_n\,dm = \int f\varphi\,dm$ gilt für alle $f \in H$.

Klaus Barbey (Saarbrücken)

Cauchy problem for local operators.

We consider the Cauchy problem $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$, $u(0,.) = f(.)$, in a $C_0(V)$ setting, V an open subset of Ω locally compact Hausdorff, A being a local linear operator with domain in $C(\Omega)$ having abstract properties akin to "second order elliptic behavior". By solution of the Cauchy problem (in the C_0 setting) for a given V open $\subset \Omega$, is meant that there exists an appropriate semigroup corresponding to A and V, in $C_0(V)$. We describe, given A, all open σ-compact $V \subset \Omega$, for which the Cauchy problem has a solution (in the C_0 setting). We apply this to the singular multiplicative perturbations of time-change type, pA with $0 \le p \in C_b(\Omega)$, and discuss in particular $p\Delta$, for $\Omega = R^N$, Δ = the laplacian operator.

G. Lumer

Selections for the metric projection

Sei E metrischer Raum und G eine proximinale Teilmenge von E. Für alle x aus E sei $P_G(x) := \{g_0 \text{ aus } G : d(x,g_0) = d(x,G)\}$. Die dadurch definierte Abbildung von E in 2^G heißt (mengenwertige) metrische Projektion.

Ist E ein strikt konvexer normierter Raum und G eine nicht Tschebyscheffsche, proximinale Teilmenge von E, dann existiert kein stetiger Schnitt für P_G.

Ist $E = C(X)$ (X kp. zshgder Hausdorffraum) und G ein endlich-dimensionaler nicht Tschebyscheffscher Teilvektorraum von E (bzw. $E = L_1(X,S,\mu)$ ((X,S,μ) σ-endlich) und $G = \langle g_0 \rangle$ ein ein-dimensionaler, nicht Tschebyscheffscher Teilvektorraum von E und $\mathrm{supp}(g_0)$ nicht Vereinigung endlich vieler Atome), so existiert kein stetiger Schnitt mit der Nulleigenschaft.

Ist E ein metrischer Raum und G eine approximativ-kompakte, separable Teilmenge von E (bzw. G eine proximinale, σ-kompakte, separable Teilmenge von E), so existiert ein Borel-meßbarer Schnitt für P_G. Ist E ein normierter Raum und G ein separabler Teilvektorraum (G proximinal) und $P_G^{-1}(0)$ beschränkt-kompakt, so existiert ein Borel-meßbarer Schnitt für P_G.

Ist E ein Vektorraum, G ein Vektorraum (bzw. Teilvektorraum von E), $F : E \to 2^G$ homogen (bzw. quasi-additiv mit G als Fixpunktmenge), so existiert ein homogener (bzw. quasi-additiver) Schnitt für F. Ist E normierter Raum und G endlich-dimensionaler Teilvektorraum von E,

$F: E \to 2^G$ quasilinear mit G als Fixpunktmenge, $P_G(x)$ abgeschlossen, konvex für alle x aus E, so existiert ein quasi-linearer Schnitt mit der Sonneneigenschaft für F.

Günther Nürnberger (Erlangen)

Polynomial algebras of vector-valued functions

Let X be a completely regular Hausdorff space, and let E be a locally convex Hausdorff TVS, $E \neq \{0\}$. The vector space of all continuous functions $f: X \to E$ will be denoted by $\mathcal{C}(X; E)$ and it will be equipped with the compact-open topology. A vector subspace $W \subset \mathcal{C}(X; E)$ is called a <u>polynomial algebra</u> if, for every $\varphi \in E'$ (E' = topological dual of E), every $v \in E$, every integer $m \geq 1$, and every $f \in W$, $x \mapsto [\varphi(f(x))]^m v$ belongs to W.

<u>Theorem</u> ("Weierstrass-Stone") Let $W \subset \mathcal{C}(X; E)$ be a polynomial algebra such that $\{\varphi(g);\ \varphi \in E',\ g \in W\}$ is self-adjoint, and let $f \in \mathcal{C}(X; E)$. Then $f \in \overline{W}$ if, and only if the following conditions are true

(1) $\forall x \in X$, such that $f(x) \neq 0$, there exists $g \in W$ such that $g(x) \neq 0$;

(2) $\forall x, y \in X$, such that $f(x) \neq f(y)$, there exists $g \in W$ such that $g(x) \neq g(y)$.

Suppose that X is a real separable Hilbert space and that E is a real Banach space. The vector space of all functions $f: X \to E$ of class C^p will be denoted by $C^p(X; E)$, and will be equipped with topology τ_c defined by the family of seminorms of the type

$$f \longmapsto \sup\{\|D^k f(x) \cdot v\|;\ x \in K,\ v \in L\}$$

where $0 \leq k \leq m$, and K and L are compact subsets of X (if $m = \infty$, take $0 \leq k < m$)

<u>Theorem</u> ("Nachbin-Bernstein") Let $W \subset \mathcal{C}(X; E)$ be

a polynomial algebra such that

(1) for every $x \in X$, there exists $g \in W$ such that $g(x) \neq 0$;
(2) for every $x, y \in X$, with $x \neq y$, there exists $g \in W$ s.t. $g(x) \neq g(y)$;
(3) for every $x, v \in X$, with $v \neq 0$, there exists $g \in W$ s.t. $Dg(x) \cdot v \neq 0$;
(4) there exists an orthonormal basis $\{e_n\}$ for X such that $g \circ P_n \in W$ for all $g \in W$ and all $n \geq M$, for some fixed integer M.

Then W is dense in $C^p(X; E)$ in the τ_c topology.

(Remark: P_n denotes the orthogonal projection of X onto the span of $\{e_1, \dots, e_n\}$, for each $n = 1, 2, 3, \dots$)

João B. Prolla (Bonn)

Inverses and relative inverses of meromorphic operator functions

Let A be a meromorphic function with values in the space of all bounded linear operators between two complex Banach spaces. By the <u>inverse</u> A^{-1} of A we mean the function $\lambda \mapsto A(\lambda)^{-1}$ defined on the (possibly empty) set of all λ such that $A(\lambda)$ is bijective. Extending a well-known result from ordinary spectral theory, we give a characterization of the poles of A^{-1} in terms of ascent and descent. These extended integers are defined with the help of certain sequences of subspaces associated with A. We also define the reduced ascent and reduced descent, and use these numbers to obtain information about (the existence of) meromorphic relative inverses of A. Here a <u>relative inverse</u> of A is an operator function A^+ such that $A(\lambda) = A(\lambda)A^+(\lambda)A(\lambda)$ and $A^+(\lambda) = A^+(\lambda)A(\lambda)A^+(\lambda)$. The results on relative inverses <u>were</u> obtained in collaboration with M. A. Kaashoek (Amsterdam), W. Kaballo (Kaiserslautern) and D. C. Lay (College Park).

Harm Bart (Amsterdam)

Sei E ein Banachraum und F eine Banachverband. Auf $E\otimes F$ man kann die folgende Norm einführen:

$$m(u) = \inf\{\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, |y_i| \| \; ; \; u = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i \in E\otimes F\}$$

Wir untersuchen das folgende Problem:
Sei $1 \le p < \infty$, und $T_i : E_i \to F_i$ p-Integraloperatoren, E_2, F_2 Banachverbände. Ist $T_1 \otimes_m T_2 : E_1 \otimes_m E_2 \to F_1 \otimes_m F_2$ auch ein p-Integraloperator. Hier ist $T_1 \otimes_m T_2$ die stetige Fortsetzung, wenn sie gibt, auf $E_1 \otimes_m E_2$ des Operators $T_1 \otimes T_2$.
Wen $2 < p < \infty$ die Anwort auf dieses Problem ist negatif und sie ist positiv wenn $p = 1$ oder $p = 2$.
Wenn $1 < p < 2$ das Problem ist offen.

N. Popa (Bucarest).
(z. Zt. Saarbrücken)

Eine l.k. Vektorgruppe ist ein $\mathbb{K}$-linearer Raum X mit einer Gruppentopologie u (bezl. $+$), so daß die Homothetien $x \mapsto \lambda x$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ stetig sind, und der eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen hat.
Eine l.k. Vektorgruppe (X, u) heißt B-vollständig, wenn jede graphenabgeschlossene lineare Abbildung $f : X \to (Y, v)$ in eine l.k. Vektorgruppe (Y, v) offen ist, wenn sie fast offen ist.
Satz. Bezeichnet X' den $\mathbb{K}$-linearen Raum aller stetigen Linearformen auf (X, u), ~~und~~ ist (X, u) eine vollständige und metrisierbare l.k. Vektorgruppe, so ist $\tau(X', X)$ ein hypervollständiger l.k. Raum.
Als Folgerung hieraus ergibt sich, daß $\varphi\omega$ hypervollständig ist.

Satz Es sei (X, u) ein tonneliert l. k. Raum, $\mathfrak{M}$ eine Filterbasis aus abzählbar-kodimensionalen Teilräumen von X, $u_{\mathfrak{M}}$ sei die Vektorgruppentopologie mit Nullumgebungsbasis $\mathcal{V} = \{U \cap M;\ U \in \mathfrak{U}_0[u],\ M \in \mathfrak{M}\}$. Ist $(X, u_{\mathfrak{M}})$ B-vollständig, so ist auch (X, u) B-vollständig.

Als Folgerung gewinnt man hieraus, daß $\omega\varphi$ B-vollständig ist. Die beiden Sätze liefern auch weitere B-vollständige l. k. Räume.

Pawel Lurje (München)

Über Quotienten vollständiger lokalkonvexer Räume

Zu jedem lokalkonvexen Raum X wird ein tonnelierter Raum Y konstruiert, der X als abgeschlossenen linearen Teilraum enthält und der folgende Eigenschaft E_K besitzt:

Ist Z lokalkonvex, $f: Y \to Z$ linear, f/K stetig für alle $K \subset Y$ absolutkonvex und kompakt, so ist f stetig.

[Die schärfere Aussage: „Jeder lokalkonvexe Raum ist abgeschlossener linearer Teilraum eines ultra-bornologischen Raums" ist äquivalent mit: „Jedes Geradenprodukt ist bornologisch".]

Hieraus erhält man folgenden Satz:

Jeder lokalkonvexe Raum ist Quotient eines vollständigen halbreflexiven lokalkonvexen Raums.

(Vgl. Y. Komura: „On linear topological spaces", Kumamoto J. 5 (1962).)

Susanne Dierolf

Über die Gleichstetigkeit von Mengen von Abbildungen

Satz 1: Sei X ein topologischer Raum mit der folgenden Eigenschaft:

Ist $f: X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die auf jedem Teilraum M von X mit $M = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n}$, K_n kompakt, stetig ist, so ist f stetig.

(z. B. X metrisierbar oder lokalkompakt oder σ-kompakt oder separabel usw.)

Dann ist eine Menge von Abbildungen von X in einen uniformen Raum bereits dann gleichstetig, wenn jede ihrer abzählbaren Teilmengen gleichstetig ist.

<u>Satz 2</u>: Für jeden uniformen Raum X gilt

equicharacter $(X) \leq$ covering character (X)

(Def. s. das Buch von J. R. Isbell, Uniform spaces)

Helmut Pfister (München)

Holomorphe Systeme von Pseudodifferentialoperatoren

Es werden nicht notwendig quadratische, holomorph von mehreren komplexen Parametern abhängige, Systeme von Pseudodifferentialoperatoren auf $H_\infty(\mathbb{R}^n)$ und $H_\infty(E)$, E hermitesches Vektorraumbündel über einer kompakten C^∞-Mannigfaltigkeit, untersucht. Wenn die Parametermannigfaltigkeit Steinsch und das Symbol punktweise linksinvertierbar ist, so wird eine holomorphe Linksinverse modulo kompakten, im zweiten Fall sogar modulo glatten Operatoren mit C^∞-Kern konstruiert. Damit werden einige Störungsaussagen bewiesen, wovon hier folgende erwähnt werden soll: Es gibt eine analytische Menge S der Codimension ≥ 2, so daß außerhalb von S lokal holomorphe Projektorfunktionen $P(z)$ mit $R(P(z)) = N(A(z))$, falls z nicht in der analytischen Menge $\Sigma(A)$ der Sprungstellen von $\dim N(A(z))$ liegt, existieren ($A(z)$ bezeichnet die betrachtete ψdo-Funktion).

Winfried Kaballo (Kaiserslautern)

Spezielle ~~tonneliete~~ Räume im Zusammenhang mit Graphensätzen

Gegenstand der Untersuchungen sind diejenigen lokalkonvexen Räume E, für die jede graphenabgeschlossene lineare ~~Abbildungen~~ Abbildung in jeden metrisierbaren l.k.-Raum stetig ist. Auf Grund eines Ergebnisses von Mahowald sind solche Räume tonneliert. Besondere Eigenschaften: (1) Jeder dichte Teilraum von E ist tonneliert (2) Das schwache Dual von E ist ein nichtseparabler, unvollständiger Montelraum (~~und~~ der bei geeignetem E bornologisch ist).

Auf Grund einer bijektiven Beziehung zwischen den E's und lineartopologischen Räumen mit $\hat{\eta}$-stabilem Nullumgebungsfilter gelangt man zu einer expliziten Beschreibung (als tonnelierter Teilraum eines einfachen Raumtyps)

(Gemeinsame Arbeit mit W. Roelcke)

Eberhardt, Wolter

Call the pair $T = (T_1, T_2)$ of bounded operators LEFT-RIGHT INVERTIBLE (wrt $J: H \to H$) on the Hilbert space H if there is a pair $S = (S_1, S_2)$ for which

$$S_1 T_1 + T_2 S_2 = J ,$$

and LEFT-RIGHT NONSINGULAR (wrt J) if there is $k > 0$ such

$$(\forall x, y \in H) \quad \|T_1 x\| \, \|y\| + \|x\| \, \|T_2^* y\| \geq k |\langle Jx, y\rangle| :$$

then $\boxed{\text{PROBLEM}}$ does NONSINGULAR imply INVERTIBLE ?

YES if (a) T_1 and T_2 each have closed range (in which case $J(T_1^{-1} 0) \subseteq T_2(H)$ is sufficient for invertibility);

YES if (b) $T_1 = A_1 \otimes I_2$, $T_2 = I_1 \otimes A_2$ on $H = H_1 \otimes H_2$ (in a sense the motivating example).

The general problem is open: methods of MacNERNEY "HERMITIAN MOMENT SEQUENCES" T.A.M.S. 103 (1962) 45-81, Lemma 3, may well extend case (a) to the general case

Robin Harte (CORK)

Banachalgebren und Kategorien von Banachräumen:

Die formale Analogie zwischen Banachalgebren und ihren Darstellungen und Kategorien von Banachräumen und Funktoren darauf führt zum Begriff der Banachsemikategorien, einem gemeinsamen Oberbegriff; Konstruktionen für Banachalgebren und Moduln (Tensorprodukte, Einbettungen in Centralizeralgebren) werden kategorientheoretisch interpretiert und auf allgemeine Banachsemikategorien erweitert.

Peter Michor (Wien)

REMARKS ON FREE TOPOLOGICAL VECTOR SPACES

If X is a completely regular space, $\Lambda(X)$ the free vector space generated by X, then $(\Lambda(X), C(X))$ is a dual pair [$C(X)$ the space of the complex functions on X]. Katetov & Tomasek used this duality to define locally convex structures on $\Lambda(X)$ which induce the original topology on X. In this talk, we construct a large class of structures on $\Lambda(X)$ as solutions to universal problems. As an application, it is shown how various extensions of X (Stone Čech compactification, real compactification, completion) can be obtained as the closure of X in the completion of $\Lambda(X)$ under a suitable locally convex structure.

J. Hooper (Graz)

A representation of a radical Algebra

Definition: If $G \subset \mathbb{C}$, An ∞-dim. rad. Algebra $\mathfrak{A}$ with unit element is a G-Algebra if the diagram

$$\begin{tikzcd}
P(\bar{G}) \oplus P(G^c) \arrow[r] \arrow[drrrr] \arrow[ddrrrr] & P(O) \arrow[r] & \mathfrak{A} \arrow[r] & G_{\mathfrak{A}} \arrow[r, "c"] & R/Q \\
 & & & & R \arrow[u] \arrow[d, "\cap"] \\
 & & & & P(G) \oplus P(\bar{G})
\end{tikzcd}$$

is commutative and all mappings are continuous in the strong topology. R should be loc. convex subspace of $P(G) \oplus P(\bar{G}^c)$, Q is closed under mult. All mappings are

multiplicatiov if defined, and $(P(\bar{G}) \oplus P(G^c)) \cap Q = \{0\}$ and G_Q is an algebra in R/Q.
It can be shown, that all radical B-Algebras, which are generated by one element is a G_Q-Algebra

J. Michaliček

Zum Cauchy-Integral von Gleason

Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ und $A(\bar{\Omega})$ die Banachalgebra der auf $\bar{\Omega}$ stetigen und auf Ω holomorphen Funktionen. Gleason hat gezeigt (Pac. J. Math. 12, 511–525 (1962)), daß es eine holomorphe Abbildung $\mu: \Omega \longrightarrow \mathcal{C}(\check{S}h_A)'$ mit Werten im Raum der Radonmaße auf dem Shilovrand $\check{S}h_A$ gibt mit

$$f(x) = \int_{\check{S}h_A} f(\xi)\, d\mu_x(\xi)$$

für alle $f \in A$ und $x \in \Omega$.
Indem man beachtet a) eine scharfe Form eines Liftingsatzes von Bartle und Graves und b) die Existenz von Apriori-Abschätzungen, läßt sich zeigen, daß die holomorphe Selektion $\{\mu_x\}$ repräsentierender Maße so gewählt werden kann, daß $\|\mu_x\| \leq C \cdot [\operatorname{dist}(x, \text{Rand } \Omega)]^{-n}$, $x \in \Omega$, erfüllt ist. Die Methode kann auf allgemeine Funktionenräume mit Apriori-Ungleichungen (z.B. Lösungsräume hypoelliptischer Differentialoperatoren) übertragen werden.

Bernhard Gramsch

Ideals of algebraic elements in a complex Banach algebra.

We start with the simple hypothesis that F is any fixed 2-sided ideal which lies in the algebraic elements of a complex Banach algebra. Such ideals frequently occur in practice, the best known being the ideal of finite rank operators on a Banach space. Several authors, among them A.F. Ruston, T.T. West, D.C. Kleinecke, B.A. Barnes and L.D. Pearlman have written papers concerning such an ideal, although without exception in a much less general setting than our own. The object of this talk is to show how the main results of these papers can still be derived in the general context described above.

Roger Smyth (Belfast).

Vollständigkeit von Räumen linearer Abbildungen

Ein Raum $E(\mathfrak{T})$ heiße lokaltopologisch, falls jede lineare Abbildung A von E in einen anderen Raum $F(\mathfrak{T}')$, die eingeschränkt auf die kreisförmige beschränkte Mengen in 0 stetig ist, schon auf ganz E stetig ist. Ist $E(\mathfrak{T})$ lokaltopologisch so ist für jeden vollständigen Raum $F(\mathfrak{T}')$ auch $L_b(E,F)$ vollständig. Ob die "Umkehrung" hiervon gilt, scheint unbekannt zu sein. Man kann jedoch zeigen: Besitzt $E(\mathfrak{T})$ eine Fundamentalfolge beschränkter Mengen, und ist für jeden (F)-Raum $F(\mathfrak{T}')$ $L_b(E,F)$ vollständig, so ist $E(\mathfrak{T})$ lokaltopologisch.

Norbert Adasch (Frankfurt)   Bruno Ernst (Kaiserslautern)

Jordan-Algebren, die auf einem Hilbertraum operieren.

Ist $A/\mathbb{R}$ eine Jordan-Algebra, $H/\mathbb{R}$ ein Hilbertraum und gleichzeitig ein Jordan-Bimodul mit $(ah,k) = (h,ak)$ für $\forall a \in A$, $\forall h,k \in H$, dann existiert $\|a\| = \sup\{\|ah\| \mid h \in H, \|h\| \leq 1\}$ für $\forall a \in A$. Frage: Ist $A \times A \to A$, $a \times b \to ab$ stetig und gilt $\|a^2\| = \|a\|^2$? Die Antwort ist ja, wenn man noch $A \subset H$ voraussetzt. Hierunter fallen alle endlich-dim. formal-reellen Jordan-Algebren, $H(W)$ für W vom Typ II_1, oder W Operatoren der Spurklasse etc.

G. Janssen (Braunschweig)

Eine quantitative Verschärfung des Graphensatzes.

Pták beweist das folgende "Induction Theorem", das auf einem vollständigen metrischen Raum E spielt, das hinsichtlich der Einfachheit von Formulierung und Beweis an den Banachschen Fixpunktsatz (für kontrahierende Abbildungen) erinnert, aber offenbar wesentlich tiefer liegt: Es liefert als relativ schnelle Korollare z.B. das Closed-Graph Theorem.

SATZ: Sei $I \subset]0,\infty[$ und $Z(t) \subset E$ $\forall t \in I$.
Für eine Funktion $\varphi: I \to I$ mit $\hat{\varphi}: \hat{\varphi}(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varphi^{\ell}(t) < \infty$ $\forall t \in I$
gelte $Z(t) \subset V(Z(\varphi(t)),t)$ $\forall t \in I$. (φ^{ℓ} = ℓte iterierte Fu)

Dann gilt $Z(t) \subset V(Z(0),\hat{\varphi}(t))$ $\underline{\forall t \in I}$

für die Limesmenge $Z(0) := \bigcap_{t>0} \bigcup_{s \leq t,\, s \in I} Z(s)$.

Lit: V. Pták, manuscripta math. $\underline{13}$ (1974), 109-130

V. Pták (vorgetragen von H. König)

Symmetrische Banachsche Algebren.

Sei A eine symmetrische Banachsche $*$-Algebra ($\mathrm{Spec}\, a^*a \geq 0$ für alle $a \in A$) und $\mathbb{C}^{[n]}$ die Alg. der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$.
<u>Satz</u>. $A \otimes \mathbb{C}^{[n]} = A^{[n]}$ ist symmetrisch. <u>Folge</u>: Sei G eine endliche Erweiterung der lok. komp. Gruppe H. $L^1(G)$ ist genau dann symm., wenn $L^1(H)$ symm. ist.

P.S.: Eine Stunde nach dem Vortrag fand ich einen viel einfacheren Beweis für einen viel allgemeineren Satz: Enthält die B. Algebra B eine <u>dichte</u> Unteralgebra der Form $A \otimes \mathbb{C}^{[\infty]}$ mit symmetrischem A, so ist B symmetrisch.

H. Leptin (Bielefeld)

ARBEITSTAGUNG "MINIMALE MODELLE"

(13. Okt. - 19. Okt. 1974)

Cartier-Divisoren.

Ist X ein noethersches Schema mit der Strukturgarbe O_X, so gibt es eine Garbe $\mathcal{M}_X$ mit der Eigenschaft, dass für offene $U \subset X$ gilt $\Gamma(U, \mathcal{M}_X) =$ Quotientenring von $\Gamma(U, O_X)$. Betrachtet man die invertierbaren Elemente aus $\Gamma(U, O_X)$ bzw. $\Gamma(U, \mathcal{M}_X)$, so erhält man die Garbe O_X^* bzw $\mathcal{M}_X^*$. Die Faktorgarbe $\mathcal{M}_X^* / O_X^* = \mathrm{Div}_X$ heisst die Garbe der Divisoren auf X und die Schnitte heissen Cartier-Divisoren auf X. Zwei Cartier-Divisoren auf X, D_1 und D_2 sind gleich, wenn für alle $x \in X$ von der Codimension 1 gilt $D_{1x} = D_{2x}$. Ein Weil-divisor ist eine formale Summe $\sum n_x \{\bar{x}\}$ über Punkte x von der Codimension 1 ($n_x \in \mathbb{Z}$). Ist X ein reguläres Schema so fallen die 2 Begriffe Cartier- und Weil-divisoren zusammen. Mit anderen Worten, es gibt einen Isomorphismus von $\Gamma(X, \mathrm{Div}_X)$ auf $\Gamma(X, Z^1(X))$ (= Gruppe der Weil-divisoren). Lit.: EGA von Grothendieck IV § 21.

A. Nobs (Basel / I.H.E.S. Bures-s/Y)

Schnittzahl für Divisoren auf einem regulären 2-äquidimensionalen Schema X, das eigentlich über einem Basisschema B ist.

Für zwei Divisoren $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(X)$, die sich in einem abgeschlossenen Punkt x eigentlich schneiden wurde die Schnittvielfachheit $(D_1 . D_2)_x$ definiert. Damit erhält man für $D, D' \in \mathcal{D}(X)$, die sich überall eigentlich schneiden und von denen D in einer Faser liegt eine Schnittzahl

$(D . D') = \sum_{x \in D} |k(x) : k(b)| \, (D . D')_x$. Es gilt:

1. Zu jedem $D' \in \mathcal{D}(X)$ gibt es einen linear äquivalenten Divisor D'', der D überall eigentlich schneidet.
2. Für Hauptdivisoren $\mathrm{div}(f)$, die D überall eigentlich schneiden gilt: $(D.\mathrm{div}(f)) = 0$.

H. Reiter (Mainz)

Schnittvielfachheit für Divisoren aus einer Faser

[Lit.: Shafarevich: Lectures on minimal models. — Tata 1966, §6]

Sei $X \xrightarrow{\pi} B$ eigentlicher surjektiver Morphismus von noetherschen ~~…~~ äquidimensionalen, irreduziblen, regulären Schemata, $\dim X = 2$, $\dim B = 1$ od. 2.
Die Untergruppe $\mathcal{D}_b$ der Divisoren auf X mit Träger in $\pi^{-1}(b)$ (b abgeschlossener Punkt von B) ~~ist n~~ ist unter dem Schnittprodukt negativ-semidefinit. Im Fall $\dim B = 1$ hat das Radikal die Dimension: Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\pi^{-1}(b)$; im Fall $\dim B = 2$ ist das Radikal trivial.
Weiter gilt eine Projektionsformel.

S. Suchov (Mainz.)

Rationale Abbildungen auf Flächen, Unbestimmtheitspunkte

(nach Shafarevich: Lectures on min.... §1, 3)

Definition und Eigenschaften der rationalen Abbildungen auf Flächen, sowie ihres (maximalen) Definitionsbereiches. Ist $\varphi: X \to Y$ eine birationale Abbildung von regulären 2-äquidim. B-Schemata, Y eigentlich, so wird φ durch Komposition mit geeigneten endlich vielen Aufblasungen $\tilde{X} \to X$ überall regulär. Hierzu definiert man die Unbestimmtheitspunkte einer rationalen Abbildung und studiert ihr Verhalten bei Basiswechsel, Produkten, Überdeckungen und abgeschl. Immersionen. Damit ist es dann möglich, den Beweis des obigen Satzes auf den Fall einer rationalen Funktion zurückzuführen, was dann in einem späteren Vortrag nachgeholt wird unter Verwendung des Schnittverhaltens beim Aufblasen.

H. Kraft (Bonn)

Aufblasen eines abgeschlossenen Punktes eines Schemas
(nach Shafarevich, loc. cit., §2)

Seien X ein überall 2-dimensionales, lokal-noethersches separiertes Schema und $x \in X$ ein regulärer abgeschlossener Punkt. Ein Schema $\tilde{X}$ und ein eigentlicher Morphismus $\sigma : \tilde{X} \to X$ wurden konstruiert, so daß $\tilde{X} \setminus \sigma^{-1}(x)$ durch σ isomorph auf $X \setminus \{x\}$ abgebildet wird und $\sigma^{-1}(x)$ isomorph zum $\mathbb{P}^1_{k(x)}$ ist als Schema über dem Restklassenkörper $k(x)$. Außerdem sind alle Punkte der Faser $\sigma^{-1}(x)$ wieder regulär (in $\tilde{X}$). Es wurde nachgewiesen, daß beim "Aufblasen" Eigenschaften wie "reduziert" und "irreduzibel" erhalten bleiben, und daß das Ergebnis bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

W. Borho (Bonn)

Verhalten von Divisoren beim Aufblasen (Shafarevich, loc. cit.)

Es wurde das Verhalten von Divisoren unter dem im Vortrag von Herrn Borho definierten Dilatations-Morphismus $\sigma : \tilde{X} \to X$ betrachtet. Die Divisorengruppe von $\tilde{X}$ geht aus der von X durch Hinzunahme der Vielfachen von $L = \sigma^{-1}(x)$ hervor. Das "eigentliche Urbild" $\sigma'(D)$ eines Divisors D auf X entsteht aus $\sigma^*(D)$ durch Entfernung der Komponenten L. Die Beziehung zwischen der lokalen Schnittzahl von D_1 und D_2 in x und den lokalen Schnittzahlen von $\sigma'(D_1)$ und $\sigma'(D_2)$ in Punkten $z \in L$ wurde schließlich benutzt, um den im

Vortrag von Herrn Kraft begonnenen Beweis über die Elimination der Unbestimmtheitsstellen einer rationalen Funktion zu Ende zu führen.

E. Oma (Wuppertal)

Der Zerlegungssatz (loc. cit. Lecture 4)

Es handelt sich um die folgende Tatsache: jeder eigentliche birationale Morphismus zwischen Flächen im Sinne der Tagung ist ein Kompositum von Aufblasungen in abgeschlossenen Punkten.

Als Hilfsmittel geht ein allgemeiner Satz ein, der sich in Mumfords Introduction to Algebraic Geometry findet: $f: X' \to X$ sei von endlichem Typ, X, X' integer und separiert. Ist f birational und X faktoriell, so gibt es eine offene Menge $U \neq \emptyset$ in X mit:
(i) $f^{-1}U \to U$ ist isomorph (ii) Für die irreduziblen Komponenten E_i von $X' - f^{-1}U$ gilt: $\operatorname{codim} E_i = 1$, $\operatorname{codim} \overline{fE_i} \geq 2$.
Dieser Satz ist völlig elementar und impliziert offenbar das "Main Theorem" im faktoriellen Fall.

J. Gamst (Bremen)

Kohomologie der Schemata

Ausgehend von der allgemeinen Charakterisierung eines abgeleiteten Funktors wurden die wichtigsten Eigenschaften der Kohomologiegruppen von Garben auf einem noetherschen Schema und der höheren direkten Bilder R^q_* eines Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ zwischen noetherschen Schemata erläutert. Insbesondere wurde die Kohomologie affiner Schemata genauer betrachtet und der Kohärenzsatz für eigentliche

Morphismen behandelt.

U. Köpf (Münster)

Verhalten der Kohomologie bei Aufblasen

Für eine Aufblasung $\sigma: X' \to X$ einer Fläche in einem regulären Punkt wurde folgendes gezeigt:

I. $H^p(X, \mathcal{O}_X) \cong H^p(X', \mathcal{O}_{X'})$

II. Wenn X eigentlich über einem Körper k ist, gilt: $\dim_k H^1(X, \Omega^1_X) < \dim_k H^1(X', \Omega^1_{X'})$ (wobei Ω^1 die Differentialgarbe bezeichnet.)

Fischbach, Münster

Hilfsmittel für den Existenzbeweis für relativ minimale Modelle

Für die Anwendung im anschließenden Vortrag werden folgende Sätze und die in ihnen auftretenden Begriffe erläutert:

1. Ist $f: X \to Y$ ein dominanter Morphismus von endlichem Typ zwischen noetherschen, irreduziblen Schemata, so gibt es eine offene Menge $U (\neq \emptyset)$ in Y, so daß die irreduziblen Komponenten der Faser über jedem Punkt von U dieselbe Dimension haben wie die generische Faser.
2. Ist $f: X \to Y$ ein ~~do~~ Morphismus von endlichem Typ zwischen noetherschen, irreduziblen Schemata und ist die generische Faser geometrisch irreduzibel, so gibt es in Y eine offene Menge $(\neq \emptyset)$ über der sämtliche Fasern geometrisch irreduzibel sind.
3. Jedes noethersche Schema von endlichem Typ über einem Basisschema B kann offen eingebettet werden in ein über B eigentliches Schema (Einbettungssatz von Nagata).

U. Orbanz (Paderborn)

Existenz relativ minimaler Modelle.

Ein Schema X von endlichem Typ über dem noetherschen Schema B heißt relativ minimales Modell (über B), wenn jeder eigentliche, birationale B-Morphismus $\varphi: X \to Y$ ein Isomorphismus ist. Für reguläre zweidimensionale Schemata wird gezeigt: Zu jedem X gibt es ein relativ minimales Modell Y und einen eigentlichen birationalen ~~Abbil~~ Morphismus $X \to Y$. Als Hilfsmittel dient der Satz: Zu $X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots$ gibt es i_0 so, daß für $i \geq i_0$ alle φ_i Isomorphismen sind (φ_i eigentlich, birational).

K. Kiyek (Paderborn)

Satz von Castelnuovo:

Sei B ein lokal noethersches Präschema und X' ein projektives B-Schema mit Strukturmorphismus $\pi': X' \longrightarrow B$.
Sei b ein abgeschlossener Punkt von B und $\mathcal{J}$ eine invertierbare Idealgarbe von $\mathcal{O}_{X'}$, so daß
(i) das abgeschlossene Unterschema L definiert durch $\mathcal{J}$ ist enthalten in der Faser $\pi'^{-1}(b)$ und ist isomorph zu einer projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(K)$ über einer Erweiterung K von $k(b)$.
(ii) Die Restriktion $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2/L$ von $\mathcal{J}$ auf L ist die eindeutig bestimmte invertierbare Garbe auf $\mathbb{P}^1(K)$ vom Grad 1.

Dann gibt es ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges projektives B-Schema X und einen projektiven B-Morphismus $\sigma: X' \longrightarrow X$, so daß $\sigma(L)$ ein abgeschlossener Punkt x von X mit dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$, der regulär, 2-dimensional ist und den Restklassenkörper $k(x) = K$ besitzt, und σ induziert einen Isomorphismus von $X' - L$ auf $X - \{x\}$.

H. Lange (Göttingen)

Relativ-minimale Modelle, die nicht minimal sind (arithmetischer Fall)

I Fundamentallemma: $f: X \longrightarrow B$ eigentlich, X regulär, irreduzibel, 2-dimensional, relativ-minimal und <u>nicht</u> minimal $\Longrightarrow$ $\exists$ abgeschlossenes irreduzibles Unterschema L von X mit:
i) $L \subset \varphi^{-1}(b)$ $\quad b \in B$ abgeschlossener Punkt
ii) $(L^2) \geq 0$, > 0 wenn L nicht regulär
iii) L birational äquivalent zu $\mathbb{P}^1(K)$, $[K : k(b)] < \infty$

<u>II</u> Satz: $f: X \to B$ wie in I und zusätzlich: B regulär, 1-dimensional, irreduzibel, alle $k(b)$ vollkommen ($b \in B$, abgeschlossener Pkt), $R(X)/R(B)$ separabel
$\Longrightarrow$ $X \times_B R(B)$ ist reguläre Kurve vom Geschlecht 0.

R. Berndt (Hamburg)

Relativ minimale Modelle, die nicht minimal sind (geometrischer Fall).

I. Albanesevarietät von X nichttrivial: man erhält sämtliche lokal trivialen Faserungen mit vollständiger nichtsingulärer als Basis, typischer Faser $\mathbb{P}^1$ und Strukturgruppe $PGL(1)$. Die Basis C ist die Normalisierung des Bildes von X (notwendig eindimensional) in seine Albanesevarietät. Klassifikation: Sei L fester 1-Vektorbündel vom Grad 1 über C, S_0 die Menge der 2-Vektorbündel auf C mit det trivial, S_1 die Menge der 2-Vektorbündel auf C mit $\det = L$: dann operiert die Gruppe der Elemente der Ordnung 2 der Jacobischen von C auf S_0, S_1 durch Tensorieren, und die Quotientenmenge von $S_0 \cup S_1$ für die Wirkung von $\Pi \simeq$ Menge der Regelflächen über C.

<u>II</u>. Albanese trivial $\Rightarrow$ X rationale Fläche. Rel. minimale Modelle: $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, F_n ($n > 1$).

(Nach Šafarevič) M. Becker (Erlangen)

Analytische Konstruktion von Kurven samt ihrer Jacobischen nach Mumford (Comp. Math. 24) und Manin-Drinfeld (Crelle 1973).

Man betrachtet über dem nicht archimedisch diskret bewerteten und vollständigen Körper K mit dem Bewertungsring R die Klassen der 2-dimensionalen freien R-Moduln M mit der üblichen proj. Äquivalenzrelation. Zu je zwei Klassen kann man sich Vertreter in „Standardposition" wählen, mit deren Hilfe eine Distanz eingeführt wird. Auf diese Weise erhält man einen Baum Δ, auf dem $PGL(2,K)$ operiert, und dessen Enden kanonisch den Punkten aus $\mathbb{P}^1(K)$ entsprechen. Sei $\Gamma \subset PGL(2,K)$ eine Schottky-Gruppe mit n Erzeugenden, Δ_Γ der Unterbaum von Δ, der mit Hilfe der Punkte aus $\Sigma = \mathrm{Fix}(\Gamma) \subset \mathbb{P}^1(K)$ gebildet wird. Dann wird auf natürliche Weise Δ_Γ ein formales Schema zugeordnet, dessen Quotient mod Γ die formale Komplettierung einer algebraischen Kurve C über K mit dem Geschlecht n und semi stabiler ausgearteter Reduktion ist. Δ_Γ / Γ kann als Graph der speziellen Faser des minimalen Modells von C/R interpretiert werden. Falls $\Omega = \mathbb{P}^1(K) \setminus \Sigma$ ist, bekommt man durch die Quotientenbildung mod Γ eine natürliche Abbildung von Ω auf $\mathbb{P}^1(K)$. ~~Im dem Falle~~ Falls K ein p-adischer Körper ist, konstruiert man sich nach Manin-Drinfeld Weierstraß-Produkte auf Ω, mit deren Hilfe analog zu der Theorie über $\mathbb{C}$ die Jacobische J von C und die Abbildung von C in J explizit konstruiert werden. Die Algebraizität der auftretenden Objekte ergibt sich nach Gerritzen-Mumford, indem man explizit (mit Hilfe der graphentheoretischen Deutung) die Riemann'sche Form ihrem v-Wert nach bestimmt.

G. Frey (Erlangen)

Eigenschaften minimaler Modelle von Kurven im Fall $g \geq 2$

R sei ein kompletter diskreter Bewertungsring mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper k. $\pi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ sei eine lokale Familie von Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$ (d.h. Γ ist 2-dim., irreduzibles, noethersches, reguläres Schema, frei von exzeptionellen Geraden, π ist eigentlich und surjektiv und $\Gamma_a = \Gamma \times_R K$ ist eine glatte geometrisch irreduzible Kurve vom Geschlecht g über Quot(R)).

Problem a): Welche speziellen Fasern $\Gamma_s = \Gamma \times_R k$ kommen vor?

Für die Anwendung auf die Untersuchung „globaler" Familien von Kurven ist eine Art der Beschreibung der Fasern notwendig.

Problem b): Wie kann man lokale Familien von Kurven durch Invarianten beschreiben, sodaß man aus diesen Invarianten ein vollständiges Invariantensystem für die auftretenden speziellen Fasern erhält?

Zu a): Γ_s kann aufgefaßt werden als Divisor auf Γ, $\Gamma_s = \sum m_i C_i$. Mit Hilfe der Schnitt-Theorie können Bedingungen angegeben werden, die die irreduziblen Komponenten C_i und ihre Vielfachheit m_i erfüllen müssen. Dies ermöglicht die „numerische Klassifikation" der Fasern, die für $g = 2$ von A. P. Ogg durchgeführt wurde.

Zu b): Dieses Problem wird mit Hilfe der Theorie der stabilen Kurven und der „stabilen Reduktionstheorem" beantwortet. Im zweiten Teil des Vortrages wurde ein vollständiges Invariantensystem angegeben und an Beispielen erläutert, wie man für $g = 2$ aus diesem eine Tabelle der auftretenden Fasern erhält.

Eckart Viehweg (Mannheim)

ALGORÍTHMEN UND KOMPLEXÍTÄTSTHEORÍE

27.10. – 2.11. 74

Complexity of monotone networks for Boolean matrix products.

Theorem. The obvious algorithm (i) for Boolean matrix product (ii) is uniquely (iii) optimal (iv) in monotone algorithms (v).

(i) Performs all IJK $\wedge$'s, and then $I(J-1)K$ $\vee$'s.

(ii) $C = A.B$ where $c_{ik} = \bigvee_{1 \le j \le J} a_{ij} \wedge b_{jk}$ for $\begin{matrix} 1 \le i \le I \\ 1 \le k \le K \end{matrix}$

(iii) To within commutativity & associativity of $\wedge$ & $\vee$.

(iv) Uses IJK $\wedge$'s and $I(J-1)K$ $\vee$'s.

(v) Straight-line programs using only the monotone operations, $\wedge, \vee$.

M.S. Paterson (Warwick)

On the complexity of quaternion-multiplication

Let K be a real field and $\mathbb{H}(K)$ the division-algebra of quaternions over K. Then both products uv and vu of the quaternions $u = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, $v = x_5 + x_6 i + x_7 j + x_8 k \in \mathbb{H}(K)$ can be computed by an algorithm which contains only the following ten products:

$p_1 = x_1 x_5$, $p_2 = x_2 x_6$, $p_3 = x_3 x_7$, $p_4 = x_4 x_8$, $p_5 = (x_1 + x_2)(x_5 + x_6)$,

$p_6 = (x_1+x_3)(x_5+x_7)$, $p_7 = (x_1+x_4)(x_5+x_8)$, $p_8 = (x_3-x_4)(x_7+x_8)$,
$p_9 = (x_2-x_4)(x_6+x_8)$, $p_{10} = (x_2-x_3)(x_6+x_7)$.

Furthermore it was ~~sh~~ own that this algorithm is optimal in the following sense:

Theorem: Every algorithm which computes both products $u \cdot v$ and $v \cdot u$ of quaternions $u, v \in \mathbb{H}(K)$ requires ten essential multiplications.

H.F. de Groote (Tübingen)

On the computational complexity of some matrix iterative algorithms

The importance of iterative methods in practical problems seems not to be appreciated enough. Such algorithms are simple in construction, can be interrupted when the demanded accuracy is reached, and for important classes of problems – as discretized selfadjoint elliptic partial differential equations – they are even faster than commonly used direct (factorization) methods. The demand of memory is kept to a minimum – in the simplest version, only the matrix coefficients or a procedure for generating them, is needed.

An upper bound of the computational complexity of such algorithms for the solution of the linear problem $Ax = f$, A a Hermitian, positive definite matrix, is directly proportional to the square root of the spectral condition number and to the complexity of the product of the matrix and a vector.

An application in connection with rational approximations of the exponential matrix function is given.

O. Axelsson (Göteborg)

- Optimum computation of certain set of bilinear forms -

K is an infinite field - $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ is the space of $m \times n$ matrices over K. $f_1, \dots, f_p$ are p bilinear forms of a commutative ring $K[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$. We answer the following question for certain particular set of bilinear forms: what is the minimum number ($C(f_1, \dots, f_p)$) of non-scalar multiplications necessary to compute the p bilinear forms given $K \cup \{x_i\} \cup \{y_j\}$. Let $Rt(V)$ denote the tensorial rank of the space V generated by the n matrices $B_1, \dots, B_p$. We have:

$$\left\lceil \frac{Rt(V)}{2} \right\rceil \leq C(f_1, \dots, f_p) \leq Rt\,V.$$

As in the non-commutative case, $C(f_1, \dots, f_p) = Rt\,V$, if the space V has a tensorial base ($Rt\,V = \dim V$).
The space of Toeplitz and Hankel $n \times n$ matrices, and also the space of cyclique $n \times n$ matrices are shown to have tensorial bases. (The base being unique in the case of the cyclique matrices of $\mathcal{M}_{n,n}(C)$). Consequently, the minimum number of non scalar multiplications necessary to compute the coefficient of the polynomial product of two polynomial of degree n is shown to be $2n+1$. Optimal algorithms are given. In the same manner, the minimum number of multiplications necessary to perform the convolution of two vectors of dimension n is shown to be n. The unique optimal algorithm is given. The inversion of a triangular Toeplitz matrix is also shown to require less than $4n-3$ multiplications-divisions. Finally, the quotient and the remainder in the division of a polynomial of degree $2n$ by a polynomial of degree n is shown to require only $8n+3$ multiplications-divisions.

J.C. LAFON (Grenoble)

On the Number of Additions and Arithmetic Complexity

We investigate the maximum number, $\rho(k)$, of distinct real zeros of any polynomial over the reals which can be computed in k $\pm$ operations. Thus far, we can only show $3^k \leq \rho(k) \leq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ (a tower of k 2's) whereas we hope $\rho(k) \leq c^k$ for some c

A. Borodin, S. Cook

Some practical aspects of matrix multiplication.

The improvements in operation time for multiplication of (m,n) by (n,p) matrices given by the algorithms of Winograd and Strassen are considered. If the condition $\frac{1}{5} > \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ holds one "Strassen-step" reduces the number of arithmetic operations. A quite realistic computer model shows that even for small square matrices of order ≥ 36 an improvement in operation speed can be obtained. It is shown that the Strassen-algorithm for square matrices (n,n) needs $2\cdot(n/2)^2$ additional storage cells for one iterative step. Rekursiv application needs at most $2\cdot[(\frac{n}{2})^2 + (\frac{n}{4})^2 + \dots] = \frac{2}{3}n^2$.

Jürgen Spieß

High Precision Calculation of Real Algebraic Numbers

An algorithm is described which, given as inputs an arbitrary polynomial $A(x)$ of positive degree with integer coefficients and any integer k, produces as its output a list $((I_1, e_1), \dots, (I_r, e_r))$ such that r is the number of distinct real roots of A, each I_j is a closed finite interval $[a_j, b_j]$ with binary rational endpoints and with length $b_j - a_j \leq 2^{-k}$, and I_j contains a unique root α_j of A. It is shown that the computing time of this algorithm is dominated by $n^7 L(d)^3 + n^3 k^2 + n^2 L(d) k$, where n is the degree of A, and $d \geq |B|_1$ for all factors B of A, A' and A''. Here $|B|_1 = \sum_{i=0}^{m} |b_i|$ if $B(x) = \sum_{i=0}^{m} |b_i|$, and $L(d)$ is the number of digits in the integer d. The algorithm first computes a factorization $A = \prod_{i=1}^{t} A_i^{e_i}$ where each A_i is squarefree and satisfies $\gcd(A_i, A_i'') = 1$ or else $\deg(A_i) \leq 1$. The roots of each A_i are calculated using Sturm's theorem and interval bisection to isolate the roots, followed eventually by an interval version of the Newton-Raphson method for which the interval length converges quadratically to zero. Between each Newton iteration an interval transformation is used which shortens the numerators and denominators without increasing the interval length very much. Empirical observations of an implementation of the algorithm within the SAC-1 system on a TR-440 computer are given. For example, the ten real roots of the tenth degree Chebyshev polynomial T_{10} were computed to 160 binary places in 148 seconds.

George E. Collins

Some results on algebraic complexity

Lower bounds that follow from the "degree method" are surveyed. We treat the following problems: Elementary symmetric functions, evaluation of a polynomial at many points, interpolation, euclidean representation. The results complement the algorithms of Horowitz, Fiduccia - Borodin - Moenck - Sieveking, Lehmer - Knuth - Schönhage. Finite ground-fields are specifically discussed.

Volker Strassen

Wette

Zwischen Ernst Specker und Volker Strassen, beide Zürich, wird eine Wette um folgende Aussage A abgeschlossen:

Die Menge der Primzahlen ist in $\mathcal{P}$

d.h. es gibt eine deterministische Turingmaschine im Sinne von Turing, welche für jede dezimal codierte Eingabe n, $n \in \mathbb{N}$, die Primheit von n in einer Schrittzahl entscheidet, welche durch ein Polynom in $\log n$ nach oben beschränkt ist.

Volker Strassen gewinnt die Wette, falls bis zum 1. November 1984 ein Beweis für A publiziert ist, oder im Prinzip in ZF durchführbar ist. Andernfalls ist Ernst Specker Gewinner.
Der Verlierer lädt den Gewinner alsbald zu einer Ballonfahrt ein oder entschädigt ihn durch fünfzig Gramm Gold.

Oberwolfach, den 31. Oktober 1974

Volker Straßen Ernst Specker

W. Oberschelp
(Protokollant)

Combinational Complexity of Symmetric Transitive Closure

<u>Theorem 1</u> (Fischer, Paterson). Let M be a symmetric $n \times n$ Boolean matrix. M^* can be computed by a logical network of size $O(n^2 \log^2 n)$.

The proof is by finding a Turing machine to compute M^* in time $O(n^2 \log n)$, and then converting it to a logical network using the general method of Fischer and Pippenger (reported at Oberwolfach, 11/73).

An important step in the Turing-machine construction uses a solution to the postman problem which we formulate as follows:

"Given n houses with addresses $1-n$ to which mail is to be delivered. The postman visits the houses in turn. At each house, he delivers the mail for it and then picks up letters for later houses. He carries a fixed number of mailbags which he uses as pushdown stacks.

Problem: Deliver the letters properly and keep small the number of times letters are handled."

Theorem 2. There is a solution to the postman problem for n houses such that each letter is handled only $O(\log n)$ times.

Michael J. Fischer (Cambridge, Mass.)

The Complexity of Arbitrary Precision Arithmetic on Real Algebraic Numbers

Theorem

Let be $A = a_m \prod_{i=1}^{m} (x-\alpha_i)$, $B = b_n \prod_{j=1}^{n} (x-\beta_j) \in I[x]$, I an integral domain, α_i, β_j indeterminates, $m = \deg(A)$, $n = \deg(B)$. Then

$$r(y) = \mathrm{res}_x(A(x), B(y-x)) = a_m^n b_n^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (y-(\alpha_i+\beta_j))$$

$$t(y) = \mathrm{res}_x(A(x), x^n B(y/x)) = a_m^n b_n^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (y-\alpha_i\beta_j).$$

A real algebraic number is represented by an isolating rational interval, a primitive squarefree polynomial over the integers, and a procedure to refine the interval to any given precision. Using the resultant relations of the Theorem, exact interval arithmetic, Sturm sequences, and interval bisection the maximum computing time to compute $\gamma = \alpha + \beta$ or $\gamma = \alpha * \beta$ for real algebraic numbers $\alpha = (I, A)$, $\beta = (J, B)$, $\gamma = (K, C)$ is dominated by $n^{17}(n + L(d))^3$. The complexity of γ is given by $n_C \le n_A n_B$, $L(d_C) \le n^2 + nL(d)$, $L_K \le n^4 + n^3 L(d)$. (Notation: $n = \max(n_A, n_B)$, $n_A = \deg(A)$, $d = \max(d_A, d_B)$, $d_A = \sum |a_i|$, $A = \sum a_i x^i$, $L(d) = [\log_2(|d| + 1)]$, $L_K = \max(L(i), L(j), L(k), L(\ell))$, $K = (\frac{i}{j}, \frac{k}{\ell}]$. The algorithm is implemented in Collins' SAC-system.

Rüdiger Loos, Kaiserslautern.

$\exists^\infty$-speed-up of Program Complexity

Let $A: X^* \times N \to X^*$ be any partial recursive function ("algorithm"). We consider x in $A(x,n)$ as a program that yields (possibly) the output $A(x,n) \in X^n$ on input n. If $A(x,n)$ converges, we call x a description of $A(x,n)$.

For any recursive function t and any finite binary sequence x we define $K^t(x)$ to be the length of the shortest program for x (with respect to the universal algorithm A) with running time $\le t|x|$.

There are infinite binary sequences z with the following property. For any rec. function t there is a rec. fctn. t' such that: $\forall q<1: \exists^\infty n: K^{t'}(z(n)) + q\cdot n \le K^t(z(n))$.

(where $z(n)$ denotes the initial segment of z of length n).

This result seems to be dual to the results of M. Blum: He gets shorter running time by taking larger programs, we get much shorter programs by allowing ~~faster~~ larger running times.

We call an infinite binary sequence 'learnable' iff there is a computation resource bound t which is best, i.e. no linear $\exists^\infty$-speed-up is possible by taking a bigger computation resource bound.

Learnable sequences are representative for some recursive distribution; the nonlearnable sequences form a set of measure 0 with respect to any recursive distribution.

Let μ be any computable product measure. If z hurts no μ-law of exponential order, then we have

$$\exists t \text{ rec}: \lim \frac{K^t(z(n))}{n} = H(\mu) \;\wedge\; \neg\left[\exists t' \text{ rec}: \underline{\lim} \frac{K^{t'}(z(n))}{n} < H(\mu)\right].$$

Peter Fuchs, Ffm.

Lower bounds on the complexity of monotone rational computations

We prove a general lower bound on the minimal number of additions in monotone rational computations. This bound implies that $\binom{n}{k}-1$ additions are necessary in any monotone computations of the rational polynomial that is associated with the k-clique-problem for graphs with n nodes. This lower bound determines the +-complexity of convolution and matrix multiplication as well.

C.P. Schnorr

On Finding all Solutions of Polynomial Complete Problems

Given a polynomial complete problem with input size n, and L_0 the set of all solutions. To find L_0 in time $p(n)\cdot \mathrm{card}(L_0)$ with polynomial p is equivalent to the problem of finding any of these solutions in a time bounded by $p(n)$. Therefore the complexity $p(n)\cdot \mathrm{card}(L_0)$ is possible iff the P-NP-problem is solvable in a positive sense.
Here especially for the partition problem an algorithm is presented, which in special cases works proportionally – $p(n)=n+1$ – to the number of solutions:

$$C = (n+1)\cdot \mathrm{card}(L_0),$$

In the other cases the algorithm works in a similar way proportionally to the number of solutions and to the cardinalities of sets L_i, which in a certain sense can be interpreted as sets of "quasi solutions" - depending on the given problem structure:

$$C = \sum_{i=0}^{n} (n-i+1)\cdot \mathrm{card}(L_i)$$

F. [illegible], Berlin

p-Verifiable Proof Systems for the Propositional Calculus

An equational proof system, PV, for number theory is presented in which the formulas are of the form $t = u$, where t, u are terms with free variables, constant symbols, and function symbols ranging over functions in Cobham's class $\mathcal{L}$ of functions computable in polynomial time. The axioms and rules are the usual ones for equality, together with substitution of terms for variables, "induction on notation" and introduction of new function symbols by p-limited recursion on notation. This system PV is the analog for $\mathcal{L}$ of Skolem's equational theory of primitive recursive functions. PV has the property that a proof of $f(x) = g(x)$ gives a uniform way of verifying in time bounded by a polynomial in ~~the length of the proo~~ n that ~~given n~~ $f(n) = g(n)$ for an arbitrary given n. A proof system for tautologies is defined abstractly as a function $F : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{onto}} \{\text{codes for tautologies}\}$ with $F \in \mathcal{L}$. We say F is p-verifiable iff $\vdash_{PV} Tr(F(x), y) = 1$, where $Tr(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \text{ codes a truth assignment satisfying formula coded by } x \\ 0 & \text{if truth assignment } y \text{ fails to satisfy } x \end{cases}$

System F_2 p-verifiably simulates system F_1 iff $\exists f \in \mathcal{L}$ so ~~$F_1(x)$~~ $\vdash_{PV} F_1(x) = F_2(f(x))$. THEOREM. A system F is p-verifiable iff resolution with extension p-verifiably simulates F. (The extension rule was suggested by Tseitin as a way of making resolution more powerful).

Stephen A. Cook

Toronto

Lower Bound Theorems and Open Problems in Analytic Computational Complexity

A central problem in analytic complexity concerns the solution of the non-linear operator equation $f = 0$. Here we deal only with the case where f is a non-linear scalar function. Let α be a zero and approximate α by a sequence x_i generated by ϕ. The total cost, C_T, of approximating α to within ϵ is $C_T = \log\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\left(\frac{c}{\log p}\right)$ where c is the cost of computing x_{i+1} from x_i and p is the order of ϕ. Let ϵ be fixed. To obtain lower bounds on cost we need upper bounds on p.

Kung and Traub [1973] have conjectured that for all multipoint iterations based on n evaluations, the order is bounded by 2^{n-1}. The conjecture has been affirmatively settled for $n=2$ (Kung and Traub [1973]), $n=3$ (Wozniakowski [1974]), and for any iteration using Hermitian information (Wozniakowski [1974]). The conjecture is open for non-Hermitian information with $n > 3$.

The use of only restricted information (one f, n f') and extended information ($\int f$) is discussed and open problems stated.

J. F. Traub
Pittsburgh

Random-Access-Maschinen mit assoziativem Speicherzugriff

Eine Random-Access-Maschine mit assoziativem Speicherzugriff (RAS) wird definiert als eine RAM (mit +1, -1 als einzigen arithmetischen Operationen) mit zusätzlichen Operationen für assoziativen Speicherzugriff.

Operationen der RAM:

$X_i \leftarrow X_j$ — X_i, X_j direkt adressierbare Register

$X_i \leftarrow R_{X_0}$ $R_{X_0} \leftarrow X_j$ — R_i, R_j indirekt adressierbare Register

$X_i \leftarrow X_j + 1$ $X_i \leftarrow X_j \dot{-} 1$ — X_0 "Adreßregister"

TRA m if $X_j > 0$

Read X_i Print X_i

Zusätzliche Operationen der RAS:

$X_i \leftarrow ASSL_{X_j}$ (d.h. $X_i \leftarrow r$ mit $r = \max(l \mid l \leq X_0$ und $R_l = X_j)$)

$X_i \leftarrow ASSR_{X_j}$ (d.h. $X_i \leftarrow r$ mit $r = \min(l \mid l \geq X_0$ und $R_l = X_j)$)

$ASSL_{X_i} \leftarrow X_j$ $ASSR_{X_i} \leftarrow X_j$ (analog)

Es wird gezeigt, daß es zu jeder RAS mit Zeitbeschränkung $T(n)$ eine äquivalente RAM mit Zeitbeschränkung $T(n) \cdot (\log T(n))^2$ gibt. Ein ähnliches Resultat (mit einem Faktor $(\log T(n))^3$) gilt auch, wenn für den assoziativen Speicherzugriff nur die Übereinstimmung von X_j mit einem Präfix von R_l gefordert wird, z.B.

$X_i \leftarrow PASSL_{X_j}$ d.h. $X_i \leftarrow r$ mit $r = \max(l \mid l \leq X_0$ und $R_l = 2^k \cdot X_j + z_k,\ z_k < 2^k$ für ein $k \geq 0)$

Die Resultate gelten auch für Maschinen mit stärkeren arithmetischen Operationen solange die Zahlen, die im Verlauf von $T(n)$ Schritten berechnet werden, nicht größer als $(T(n))^c$ werden.

Reinhold Weicker (Hamburg)

Über eine untere Schranke für die Operationszeit bei Parallelverarbeitung. Mit Hilfe der Wortalgebra W_Δ über einem Typ $\Delta = (\Omega, \mathrm{I}, q, z)$ wurden in Analogie zu Strassen, Berechnungs- & Programm zur Darstellung von Berechnungen Δ-Mengen eingeführt. Die Parallelverarbeitung durch ein Prozessorsystem $(P_\varkappa)$, $\varkappa \in K$ wurde erfaßt durch eine Zerlegung $W_\Delta = \bigcup W_\varkappa$, wobei angenommen wurde, daß eine Operation ω eines $\omega\vec{w} \in W_\varkappa$ vom Prozessor $P_\varkappa$ ausgeführt werden kann. Es wurde dann für eine Δ-Menge die maximale bzw. mittlere Operationszeit (L_K bzw. M_K) eingeführt und die Operationszeit einer endlichen Teilmenge F der Vereinigung der Trägermengen einer Δ-Teilalgebra definiert. Die Funktionen M_K bzw. L_K genügen den Ungleichungen

$$M_K(F \cup \{\omega_0 \vec{a}_0\}) \leq t(\omega_0)/\#K + M_K(F \cup \mathrm{IM}\vec{a}_0), \quad \#K < \infty,$$

und

$$L_K(F \cup \bigcup_{i=1}^{j} \{\omega_i \vec{a}_i\}) \leq \max_i t(\omega_i) + L_K(F \cup \bigcup_i \mathrm{IM}\vec{a}_i),$$

sofern die ω_i von verschiedenen Prozessoren ausgeführt werden können. Jede Funktion $\lambda_K : F \longmapsto [0,\infty]$, die der letzten Ungleichung genügt, ist unter einer Zusatzvoraussetzung eine untere Schranke für L_K.

Brosowski (Göttingen)

Reducibility of complexity problems to problems concerning automata.

The following relations are proved

$$\exists j: P_1^{un} \subset D_j \qquad\qquad \exists j: N_5^{un} \subset D_j$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$TAPE(n) = TIME(Exp(n)) \Longrightarrow TAPE(n) = NTAPE(n)$$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$TAPE(\log n) = TIME(Pol(n)) \Longrightarrow TAPE(\log n) = NTAPE(\log n)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\exists j: P_1 \subset D_j \qquad\qquad \exists j: N_2 \subset D_j .$$

where $(N)\,{}^{TAPE}_{TIME}(f(n))$ are the families of all languages acceptable by (nondeterministic) Turing machines with $\substack{\text{tape}\\\text{time}}$ bound $f(n)$ and P_k (D_k, N_k) are the families of all languages acceptable by k-head 2-way deterministic pushdown automata (deterministic, nondeterministic finite automata). P_k^{un}, N_k^{un} are the corresponding families with unary input.

B. Monien (Hamburg)

Heuristics for Constructing Binary Search Trees

We discuss heuristics for constructing binary search trees. Given are n names $B_1, \ldots, B_n$ from a linearly ordered set and $2n+1$ probabilities $\alpha_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_n$. Here β_i is the probability of encountering name B_i and α_j is the probability of encountering a name between B_j and B_{j+1}. The problem is to find ~~the~~ a tree which minimizes the average number of comparisons needed to locate an element. Let P_{opt} be that number. Consider the following heuristics.

Heuristics: Choose the root as to equalize the total weight of the left and right subtree as much as possible.

Let $P_{heuristics}$ be the weighted path length of the tree yielded by the heuristics.

Thm 1: $P_{heuristics} \leq 2 + 1.8 \cdot P_{opt}$

Thm 2: $0.6\, H \leq P_{opt} \leq 1.2\, H + 2$

where H is the entropy of the frequency distribution

Kurt Mehlhorn
Saarbrücken

An automata-induced complexity measure for simple regular sets

Given: an alphabet V, $|V| = r < \infty$; a set $\mathcal{H} = \{h: V^* \to [r]^*\}$ of homomorphisms; a class $\mathfrak{A}$ of (finite or infinite) state machines A with common input alphabet $[r]$ and cost-functions $k_A: Q \times [r] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, associating some costs with each state transition. A measure $C_{A,h}(\mathcal{L})$, $\mathcal{L} \subset V^*$, based on the cost of processing strings $h(w)$ ($w \in \mathcal{L}$, $h \in \mathcal{H}$) by some machine $A \in \mathfrak{A}$, is defined. Problem: Given $\mathcal{L} \subset V^*$; find $A' \in \mathfrak{A}$, $h' \in \mathcal{H}$ such that $C_{A',h'}(\mathcal{L}) = \inf\{C_{A,h}(\mathcal{L}) \mid A \in \mathfrak{A}, h \in \mathcal{H}\}$. This is solved for simple regular sets (representing "loops" and "loop chains") with respect to a class of "rearrangement machines" and extensions of partitions of V. The definitions try to meet the situation present in a real computing system whose central processing unit has access to a limited-size buffer that can be loaded blockwise.

Hans-Georg Stork (Darmstadt)

Inherently Difficult Computational Problems: A Summary

A large number of decidable problems in logic and automata theory have been shown to be inherently difficult in the sense that any decision algorithm requires a number of steps growing exponentially or more in the size of inputs to the algorithm. The proofs resemble classical proofs of undecidability. Moreover, implicit in the proofs are concrete constants which provide lower bounds on the size of computational networks for finite functions.

For example, the weak monadic second order theory of successor (WS1S) is decidable. Expressing sentences in the language of WS1S in an alphabet of 63 characters (standard logical connectives, decimal digits, parenthesis, etc.), and coding each character into a six bit binary word, the true sentences of length n correspond to a set of binary words of length 6n. Let $\mathcal{C}_n$ be the smallest loop-free logical circuit (equivalently, straight-line program) with 6n binary inputs and one output using two-argument Boolean operations as primitives to recognize the code words of true sentences.

Theorem (with L. Stockmeyer). $\mathcal{C}_{616}$ contains at least 10^{123} primitive operations.

We remark that 10^{123} protons suffice to densely fill the known universe.

Albert R Meyer (Cambridge, Mass.)

Complexity of finite problems.
Constructive information processing substantially involves transforming, shifting, copying, describing etc. of finite objects. By means of binary encoding a considerable portion of this activity can be converted into computation of boolean functions. Their complexity is thus substantial for estimating complexity of (large) finite or infinite problems. Several of the following measures of complexity of boolean functions are discussed: combinational c., syntactical (formula) c., finite automaton c., Turing machine c., Markov algorithm c., program c., decision algorithm c., generative c. (i.e., vector of values

of the function is generated by a finite automaton, Yamada real-time generator, or general Turing generator).

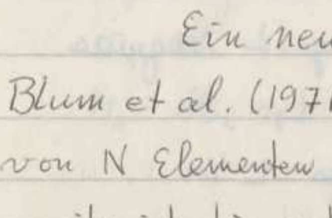
Combinational and program complexity of boolean functions have appeared in inequalities involving, in addition, e.g. computational time and space (various authors, especially Savage, Schnorr, Sholomov, Zhuravlev, M. Fischer & Pippenger). Continuing in this direction, one has to expect the development of putting quantitative computational characteristics into such relations which would be invariant within certain classes of situations; and, further, to link, if possible, various such classes together in a way which would yield analogy of conservation laws for some (combined) quantitative characteristics.

J. Bečvář (Prague)

Ein neuer Median-Algorithmus

Blum et al. (1971) haben gezeigt, daß der Median einer geordneten Menge von N Elementen in $\leq 5{,}43\,N$ Paarvergleichen gefunden werden kann. Andererseits ist die untere Schranke $1{,}75\,N$ bekannt (Pratt & Yao).
Hier wird ein neuer Algorithmus (Paterson, Pippenger, Schönhage) beschrieben, der auf folgender stufenweisen Prozedur beruht: Zuerst werden Hyper-Paare (z.B.) gebildet, aus denen dann durch Abschneiden unbrauchbarer Teile Figuren der Form (z.B. X) entstehen. Diese kosten ca. 2,5 Vergleiche pro Element, wenn die übrigen Teile wiederbenutzt werden. Zusätzliche Verfeinerung dieser Ideen erlaubt es, die Kosten auf 1.75 pro Element zu senken. Dann sortiert man solche Figuren X zu Ketten der Form (*), und hierin lassen sich schließlich die Teile (V) (Λ) eliminieren, da sie den Median sicher nicht enthalten. Iterative Verwendung dieser Schlußweise führt so schließlich zu einer Zahl von Vergleichen $\leq 3N + O(N^{3/4} \lg N)$.

(*)



A. Schönhage (Tübingen)

/

Probabilistic Turing Machines and Computational Complexity

Probabilistic Turing machines are Turing machines with the ability to make decisions based on the outcomes of fair coin tosses. For a probabilistic Turing machine M and an input x, M(x) is the output (a random variable). The function f computed by M is the majority output; that is, M computes f iff $P\{M(x) = f(x)\} > \frac{1}{2}$ for all x.

The error probability function is $\epsilon(x) = P\{M(x) \neq f(x)\}$. We insist that $\epsilon(x) \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ for all x.

Proposition 1: Only partial recursive functions are computed by PTMs.

Proposition 2: Every PTM with average running time T can be simulated by a deterministic TM in time $2^{O(T)}$.

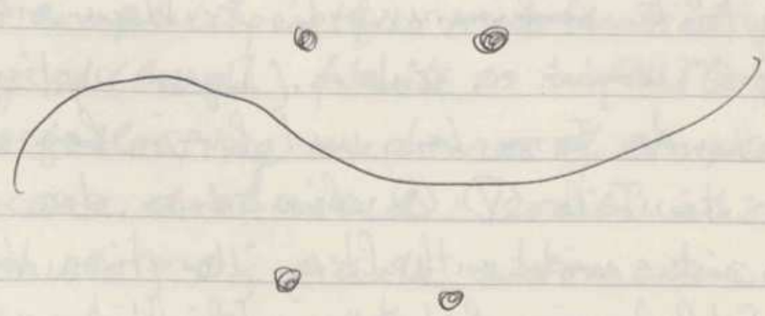
Proposition 3: There is a language $L \subset \{0,1\}^*$ and a sublanguage $L_1 \subset L$ such that

(i) Every 1-tape deterministic TM recognizing L requires time $O(n^2)$ for ∞ many inputs of length n in L_1;

(ii) Some 1-tape deterministic TM recognizes L in time $O(n \log n)$ on inputs of L_1.

Proposition 4: Every nondeterministic linear-bounded automaton can be simulated by a probabilistic linear-bounded automaton.

John Gill (Stanford, California)



ASYMPTOTIC METHODS IN STATISTICS

10.11.74 – 16.11.74

Von Mises-Smirnoff in two dimensional case with given margin.

Using anterior results, the characteristic function of the Von Mises Smirnoff integral $\iint [H_2(x,y) - F(x,y)]^2 dF(x,y)$ will be given ~~[illegible]~~ in the case when the margin is known. The result is:

$$\varphi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{\frac{2it}{k^2\pi^2}}}{\sin\sqrt{\frac{2it}{k^2\pi^2}}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

The result is gote through the Riemannian approximation of the integral and the general expression of the characteristic function of a quadratic form. In this case the matrix generating the quadratic function has a very simple form.

$$B_s \otimes B_s \cdot \left[I_s - \frac{1}{s} M_s\right] \otimes \left[I_s - \frac{1}{s} M_s\right].$$

B_s being the $s \times s$ matrix where $b_{ij} = \min[s-i+1, s-j+1]$

I_s the $s \times s$ identity matrix

M_s the $s \times s$ matrix whose all terms are 1.

David Dugué

(Daniel DUGUE Paris)

Martingales, Rank Statistics and limit Theorems.

Let $\{X_i, i \geq 1\}$ be independent random variables with a continuous distribution function (df) $F(x)$, $x \in R$. For testing H_0: $F(x) + F(-x) = 1$, $\forall x \geq 0$, one considers
$$T_n^+ = \sum_{i=1}^n \operatorname{Sgn} X_i \cdot a_n(R_{ni}^+),$$
where $R_{n1}^+, \ldots, R_{nn}^+$ are the ranks of ~~the~~ $|X_1|, \ldots, |X_n|$ and $a_n(i) = E\phi(U_{ni})$, $1 \leq i \leq n$, $U_{n1} < \cdots < U_{nn}$ are ordered random variables of a sample of size n from the rectangular $[0,1]$ df. Let $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\underset{\sim}{S}_n, \underset{\sim}{R}_n)$ be the σ-field generated by $(\operatorname{Sgn} X_1, \ldots, \operatorname{Sgn} X_n)$, $(R_{n1}^+, \ldots, R_{nn}^+)$, when H_0 holds. Then (1) $\{T_n^+, \mathcal{B}_n, n \geq 1\}$ is a martingale, and (2) by defining $W_n(\frac{k}{n}) = n^{-1/2} T_k$, $0 \leq k \leq n$, $T_0 = 0$ and completing the definition of $W_n(t)$, $0 \leq t \leq 1$, by linear interpolation, we have $W_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$, where W is a standard Brownian motion. Similar results hold for the linear rank statistics and for rank statistics for testing the hypothesis of bivariate independence. The case of progressively censored linear rank Statistics is also considered and similar martingale properties are used to prove weak convergence results. Applications to sequential tests are stressed

P. K. Sen

Chapel Hill + Frieburg. i Br.

Limiting Results for Multidimensional Empirical Processes. 11/11/74

For $X_1, X_2, \cdots, X_n$, the empirical process $W_n^F(A) := \sqrt{n}\{F_n(A) - F(A)\}$ is defined for $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}^k$ in the case the r.v.'s are IID with common d.f. F. Elementary properties of W_n^F were reviewed with a discussion of their more difficult 'uniform' versions; e.g. the Glivenko-Cantelli theorems, weak convergence and Strassen-type L.I.L. The emphases here is upon the definition of W_n^F as a set function process indexed by a sufficiently 'smooth' class of subsets $\mathcal{A}$. The limiting process related to W_n^F would be 'tied-down' Brownian ~~Sheet~~ Sheet W defined on $\mathcal{A}$ by $W(A) = Z^F(A) - F(A) Z^F(I)$ where Z^F is a Brownian sheet with covariance $E\{Z^F(A), Z^F(B)\} = F(A \cap B)$. When F is uniform on I^k, write Z for Z^F. Then this Z ~~may~~ may be constructed from the Haar orthonormal functions on I^k for all $A \in \mathcal{B}^k$. If the index set is restricted to $\mathcal{A}_\varphi = \{A \in \mathcal{B}^k : |A^\varepsilon \setminus A| < \varphi(\varepsilon)\ \forall \varepsilon\}$ with $\varphi \downarrow 0$ then the sample functions of Z are continuous with respect to the Hausdorff metric on $\mathcal{A}_\varphi$.

The appropriate analogue of the inverse empirical process was discussed for $k=2$. For any d.f. on I^2, say G, define $G^{-1}(t) = \{(x_1, x_2) \in I^2 : G(x_1, x_2) \le t\}$. Thus the inverse is a subset of I^2. Consider the boundaries of such sets as seen along a 45° line, by defining $G^{-1}(t,u) = \sup\{x \in R : G(x, x+u) \le t\}$. Define the inverse empirical process by

$$V_n^F(t,u) = n^{1/2}\{F_n^{-1}(t,u) - F^{-1}(t,u)\}.$$

Theorem: If F is abs. ctn with ctn density bounded away from 0. Then $V_n^F \xrightarrow{L} \Delta W^F \circ \varphi$ where

$$\Delta(t,u) = 1/f_u \circ F_u^{-1}(t) \quad , \quad \varphi(t,u) = (F^{-1}(t,u),\ u + F^{-1}(t,u))$$

and

f_u ~~$(F_u^{-1}(t))$~~ is the density of $F_u := F(\cdot, u + \cdot)$.

Ron Pyke (Seattle, USA)

Note on Chernoff's theorem about probabilities of large deviations.

The following generalization of Chernoff's theorem about probabilities of large deviations is proved:
Let φ_n denote ~~the~~ a most powerful test at level α_n for $H: \{P_1^n, \dots, P_k^n\}$ against $K: \{P_0^n\}$, then for the probability error of the second kind it holds $[E_0(1-\varphi_n)]^{1/n} \to \max\limits_{1 \le l \le k} \exp(-I(P_l : P_0))$ ~~if~~ for $n \to \infty$, if $\alpha_n^{1/n} \to 1$ and $(1-\alpha_n)^{1/n} \to 1$ and $I_t(P_l : P_0) < \infty$ for some $t > 1$ for all $l \in \{1, \dots, k\}$, where I denotes the measure of information introduced by Kullback and Leibler and I_t is the measure of information of order t introduced by Renyi.

D. Plachky (Münster)

Convergence of rank order statistics for the test of independence.

Let $W_n = (X_n, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$ be random variables with continuous d.f.. Then convergence results are derived for the rank statistics $T_n^c(u,v) = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} \{ I(R_{ni} \le nu, Q_{ni} \le nv) \}$ ~~$- F(G^{-1}(u), H^{-1}(v)) \}$~~ where R_{ni} (Q_{ni}) is the rank of X_i (Y_i) under $X_1, \dots, X_n$ ($Y_1, \dots, Y_n$) and furthermore for general linear rankstatistics $S_n^c = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} \varphi_n\left(\frac{R_{nj}}{n}, \frac{Q_{nj}}{n}\right)$.
For the proof we use a approximation by ~~the~~ a functional of the multidimensional empirical process. So the proof does not use independence of $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and stationarity of $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

L. Rüschendorf (Hamburg)

New results on maximum probability estimators

It is shown how the results on asymptotic distributions of Ibragimov and Hasminski (Teoriya Veroyatnostey, 1972 and subsequent papers in T.V, Mathematicheski Sbornik, 1972) can be extended to yield asymptotic efficiency. The tool used is ~~th~~ a theorem on the asymptotic efficiency of maximum probability estimators, e.g., Annals, Inst. Stat. Math. (Tokyo) 1967, or the monograph on asymptotic methods in statistics about to be issued by Springer Verlag, both by L. Weiss and J. Wolfowitz.

J. Wolfowitz
University of Illinois
Urbana, Illinois
USA

On the Kesten's modification of the Robbins-Monro method

Let $M(x)$ be a monotonically increasing function having a root θ and let X_1 be an arbitrary real number. Define the sequence $\{X_n\}$ by $X_{n+1} = X_n - a_n(M(X_n) + Y_n)$ $(n=1,2,\dots)$ where $\{Y_i\}$ is a sequence of i.i.d. r.v.'s and $\{a_n\}$ is a sequence of positive numbers with $\sum a_n = \infty$, $\sum a_n^2 < \infty$. $\{X_n\}$ is called a Robbins-Monro process. It is known that (under some conditions) $P(X_n \to \theta) = 1$. For sake of simplicity suppose that $a_n = 1/n$. In this case one can prove the following theorem:

$$\overline{\lim} \sqrt{\frac{(2\alpha-1)\,n}{2\log\log n}}\,|X_n - \theta| = 1 \quad \text{a.s} \qquad \text{if } M'(\theta) = \alpha > 1/2$$

$$\overline{\lim}\sqrt{\frac{n}{2\log n\log_2\log\log n}}\,|X_n-\theta| = 1 \quad \text{a.s} \quad \text{if } M'(\theta)=\alpha=1/2$$

there exists a r.v. Z such that

$$P\{n^\alpha(X_n-\theta)\to Z\}=1 \quad \text{if } M'(\theta)<1/2.$$

Kesten proposed the following modification of the Robbins-Monro method: let K_1 be a real number and $\mu_1=1$ and define

$$K_{n+1}=K_n-\frac{1}{\mu_n}(M(K_n)+Y_n)$$

$$\mu_{n+1}=\begin{cases}\mu_n & \text{if } (M(K_n)+Y_n)(M(K_{n-1})+Y_{n-1})\geq 0\\ \mu_n+1 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

The process $\{K_n\}$ will be called Kesten process. Our main theorem states (under some conditions) that the limit properties of the Kesten process are the same as that of the Robbins-Monro if $a_n=\frac{2}{n}$ in the definition of the Robbins-Monro process.

P. Révész
Mathematical Institute
Budapest.

<u>The optimal ratio of sample sizes in comparing two distributions</u>

Let $X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n$ be independent random variables, the X_i all having distribution P_θ, the Y_j all having distribution $P_{\tilde\theta}$, where $\theta,\tilde\theta\in\Theta\subset R^1$ and $P_\theta, P_{\tilde\theta}$ are lattice distributions. A possible way to compare θ and $\tilde\theta$ is to test $H_0:\theta=\tilde\theta$ against $H_1:\theta>\tilde\theta$ by rejecting H_0 for large values of $\sum_{i=1}^m X_i$, conditionally given $\sum_{i=1}^m X_i+\sum_{j=1}^n Y_j$. Usually the test is performed with equal sample sizes $m=n$. Denote $m+n$ as N. For the case of contiguous alternatives $\theta-\tilde{\theta}=O(N^{-\frac{1}{2}})$ we investigate which choice of the ratio $\gamma=\frac{m}{N}$ is optimal, given N, as $N\to\infty$. The criterion of optimality is the unconditional power $\pi(\gamma,N)$ of the test. The optimal value γ_0 is determined to $o(N^{-\frac{1}{2}})$. This enables us to find the deficiency d_N, where d_N is ~~determined~~ defined by $\pi(\frac{1}{2},N+d_N)=\pi(\gamma_0,N)$, i.e. d_N is the additional number of observations which is needed for the equal-sample-size test to reach the same power as the optimal test. It appears that $\lim\limits_{N\to\infty} d_N$ is finite and typically rather small.

W. Albers
Technical University Twente
Enschede, The Netherlands

A heuristically motivated rank test (in the two-sample case)

In the two-sample case we compare the adaptive distribution-free test of location proposed by Randles and Hogg (1973) with a (non-linear) rank test proposed in this talk. While the performance of both tests is comparable under exact shift alternatives, it is shown in the more realistic situation of stochastically larger observations of the first sample that the Randles-Hogg test may perform poorly whereas the latter test behaves quite well. The test statistic of the (non-adaptive) rank test proposed here is the supremum of all standardized and centered simple linear rank statistics (cf. Hájek + Šidák (1967), p. 61) having non-decreasing scores. Because of the results of Behnen (1972) the proposed test is "approximately" a maximum likelihood test with respect to a large class of local alternatives which contain local shift alternatives in an asymptotic sense, and it is an unbiased test. Critical values of the test are tabulated for (pooled) sample sizes from 12 to 20, and some results on the asymptotic behavior are presented.

K. Behnen
Freiburg

Asymptotic Expansions in Nonparametric Statistics

A review of asymptotic expansions in nonparametric statistics is given with special emphasis on the results obtained in the last three years by Albers, Bickel, Bjerve and the author. The study of such expansions is motivated by the need for better approximations and by the desire to evaluate the asymptotic deficiency (in the sense of Hodges and Lehmann) of nonparametric procedures. The discussion centers on tests for the one- and two-sample problems and the associated estimators, and on linear combinations of order statistics.

W. R. van Zwet (Leiden).

On the histogram estimator based on order statistics

Let $Z_{1:n} < \dots < Z_{n:n}$ denote the order statistics for the sample size n. The histogram estimator proposed by van Ryzin (1970) has the form

$$f_n(x) = \frac{m_n}{n(Z_{S_{j+1,n}:n} - Z_{S_{j,n}:n})} \quad \text{for } x \in [Z_{S_{j,n}:n}, Z_{S_{j+1,n}:n})$$

where $S_{1,n} = 1$ and $S_{j+1,n} = S_{j,n} + m_n$ (if $S_{j+1,n} + m_n \le n$). m_n, $n = 1, 2, \dots$, is a predetermined sequence of integers converging to infinity.

It is proved that the maximal deviation of f_n from the underlying density function on a quantile interval has asymptotically the extreme value distribution.

To make the result applicable to confidence procedures the unknown quantile interval is replaced by an interval determined by appropriately chosen order statistics

Rolf Reiß (Cologne)

A Law of the iterated logarithm for linear combinations of functions of order statistics

For the uniform empirical process U_n we have $P\left(\sup_{0\le t\le\theta} |U_n(t)/q(t)| \geq 4\lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\int_{[|T_n|\geq\lambda]} |T_n|\,dP$ where $T_n = n^{-1/2}\sum_1^n Y_i$ with iid Y_i having mean 0 and Variance $\leq 2\int_0^\theta q^{-2}(t)\,dt$.
From this the theorems of Chung and Finkelstein can be extended from the ρ-metric to the ρ_q-metric. From this a LIOL for $T_n = \sum_1^n c_{ni} X_{ni}$ follows easily.

Galen R Shorack (Seattle)

On the speed of convergence of empirical distributions

Let $x_1, x_2, \ldots$ be i.i.d. random variables uniformly distributed (μ) on the unit cube I^k in $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$. Let μ_n^ω be the empirical p-measure pertaining to $x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega)$ and consider the empirical process with respect to some subclass $\mathcal{A}$ of the class $\mathfrak{B}_k$ of all Borel sets in $\mathbb{R}^k$ defined by $W_n(A) := \sqrt{n}\{\mu_n(A) - \mu(A)\}$, $A \in \mathcal{A}$. As we have learned from the talk of Professor Ronald Pyke it is true that for $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varphi := \{A \text{ closed} \subset I^k : |A^\varepsilon \setminus A| < \varphi(\varepsilon) \downarrow 0\}$ the process $W \equiv \{W(A) : A \in \mathcal{A}_\varphi\}$ he considered has continuous sample paths but it is an open problem whether $W_n \xrightarrow{L} W$.
Looking into a paper of A. de Hoyos published in Z. Wahrsch. (1972) one is tried to believe that there was made an attempt to give an answer for a similar question since it was stated there that choosing for $\mathcal{A}$ the class $\mathcal{C}_k^c$ of all compact convex subsets of I^k, then $W_n \xrightarrow{L} W$, where W is a continuous Gaussian process parametrized by $\mathcal{C}_k^c$ with mean zero and $\operatorname{cov}(W(C_1), W(C_2)) = |C_1 \cap C_2| - |C_1|\cdot|C_2|$.
It is shown that this result cannot be true for dimension $k > 3$ since it is in conflict with a theorem of W. Stute (Bochum). As to the rate of almost sure convergence of the socalled isotrope discrepancy $D_n(\omega) := \sup_{C \in \mathcal{C}_k} |\mu_n^\omega(C) - \mu(C)|$

with $\mathcal{C}_k$ being the class of all convex measurable subsets of $\mathbb{R}^k$ the following theorem holds

<u>Theorem (W. Stute)</u>. Let $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be i.i.d. random variables on some p-space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with values in $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, and distribution μ fulfilling the following condition:

there exist nonatomic finite μ_i on the linear Borel sets, $i = 1, \ldots, k$ such that $\mu \ll \nu := \bigotimes_{i=1}^{k} \mu_i$ and $\| \frac{d\mu}{d\nu} \|_\infty < \infty$.

Then for each $\beta > 3/k$

$\lim_{n\to\infty} \{ n^{1/k} (\log n)^{-3/k} (\log\log n)^{-\beta} D_n(\omega) \} = 0$ for $\mathbb{P}$-a.a. ω.

PETER GAENSSLER
RUHR-UNIVERSITY BOCHUM

Asymptotic expansions related to the limiting process from the Binomial- to the Poisson distribution.

If we have to approximate the binomial distribution, then there are cases where a Poisson approximation may be more convenient than a normal approximation. Asymptotic expansions to the limiting process from the binomial to the Poisson distribution give more detailed informations about such approximations. We give different expansions (three nontrivial terms in each case) and point out, that the expansions of the binomial confidence limits lead to a useful approximation formula for practical purposes.

Leo Knüsel
Universität München

A note on the breakdown points of some means with rejection rule.

The use of a rejection rule for throwing away outliers, followed by taking the arithmetic mean of the remaining values, is one of the oldest and most frequently used classes of robust estimation procedures. However, a Monte Carlo study of some such methods at Princeton yielded several surprising, and surprisingly bad, results. It turned out that a simple and striking explanation of these empirical findings can be given by means of the asymptotic concept of the breakdown point, which is essentially the smallest amount of free contamination that can carry the value of the estimate over all bounds. Procedures based on the Shapiro-Wilk test, as well as Huber-type skipped means, are safe and good; less so are those methods based on the 4th moment. Those procedures based on the largest studentized residual and on Dixon's rule can only tolerate (about) 2 outliers out of 20; and those based on the studentized range cannot even reject a single distant outlier.

F. Hampel (ETH Zürich)

Asymptotic comparison of maximum likelihood estimate with a rank estimate in simple linear regression model.

For $N=1,2,\dots$, let $X_{N1},\dots,X_{NN}$ be independent observations such that X_{Ni} has the cdf $G(x_i - \sum_{j=1}^{p} \Delta_j^0 c_{ji})$, $i=1,\dots,N$ where G is unknown, $\underset{\sim}{C}_N = [c_{ji}]_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,p}}$ is a given design matrix and $\underset{\sim}{\Delta}^0 = (\Delta_1^0,\dots,\Delta_p^0)$ is a parameter. Let $\hat{\underset{\sim}{\Delta}}_1$ be the maximum likelihood estimate of Δ^0 established under the assumption that, instead of G, F is the basic distribution and let ~~be~~ $\hat{\Delta}_2$ be the rank estimate proposed by the author in (1971), established under the same assumption. Then, under some assumptions on $\underset{\sim}{C}$ and on F, G, the asymptotic distribution of $(\hat{\underset{\sim}{\Delta}}_1 - \hat{\underset{\sim}{\Delta}}_2)$ is derived. The proof is based on a lemma stating that the right-hand sides of likelihood equations are asymptotically uniformly linear in $\underset{\sim}{\Delta}$. The result also yields the asymptotic distribution of maximum likelihood estimate under the corresponding assumptions

Jana Jurečková
Charles University, Prague

Error bounds for linear combinations of order statistics

A Berry-Esseen bound is obtained for trimmed linear combinations of order statistics. These linear combinations are written as a sum of a linear and a quadratic combination of order statistics from the exponential distribution plus a remainder term. The remainder term is shown to be of negligible order and ~~a~~ Berry-Esseen's lemma is then employed to handle the linear and quadratic terms. Classical results give the necessary bounds for the linear term. Bounds on the moments of order-statistics from the exponential distribution are crucial in obtaining a bound on the difference between the characteristic functions of the linear term and the quadratic term

Steinar Bjerve
University of Oslo

A note on contiguity, Hellinger distance and asymptotic normality

Consider sequences of product probability measures $P_N^{(N)} = \prod_{n=1}^N P_{Nn}$ and $Q_N^{(N)} = \prod_{n=1}^N Q_{Nn}$ defined on the same measurable spaces for $N = 1, 2, \ldots$. It is shown that the one-sided contiguity of $Q_N^{(N)}$ with respect to $P_N^{(N)}$ can be easily expressed in terms of the marginal probability measures with the aid of the Hellinger distances between these marginal probability measures. In fact, the boundedness of $\sum_1^N \delta^2(P_{Nn}, Q_{Nn})$ and another weak condition is equivalent to $Q_N^{(N)} \triangleleft P_N^{(N)}$.

Of course two-sided contiguity of the product probability measures ~~impl~~ is implied by the asymptotic normality of the log likelihood ratio Λ_N. It is shown that a set of conditions slightly stronger than the previous conditions is equivalent to asymptotic normality of Λ_N.

J. Oosterhoff
University of Nijmegen

A note on the Increase of Risk due to inaccurate models

Let $(P_\theta : \theta \in \Theta)$ and $(P_{\theta,n} : \theta \in \Theta)$ be experiments on a polish space $\mathcal{X}$, $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ precompact with respect to L^1-norm. For each bounded continuous function g let $\int g \, dP_{\theta,n} \to \int g \, dP_\theta$ uniformly in θ as $n \to \infty$. Then there exist Markov kernels H_n such that $\| H_n P_{\theta,n} - P_\theta \| \to 0$ uniformly in θ. If $\mathcal{X}$ is a k-dimensional Euclidian space, $\mathcal{E} = (P_\theta : \theta \in \Theta)$, $\mathcal{F} = (Q_\theta : \theta \in \Theta)$, $\eta(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \sup_\theta \| P_\theta - Q_\theta \|_{BL}$, $\Phi(\gamma) := \inf\{ r \geq 0 : \exists$ prob. ms. m s.t. $\sup_\theta \inf_{f \, Lip(r)} \| P_\theta - f \cdot m \| \leq \gamma \}$,

then there exists constants C_k ($\sim \sqrt{2k/\pi}$ as k becomes large) such that for the deficiency $\delta(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ the inequality $\delta(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \leq 2 \inf_\gamma \sqrt{C_k \Phi(\gamma) \eta(\mathcal{E}, \mathcal{F})} + \gamma$ holds, where the inf is taken over $\gamma: 0 \leq \eta \leq C_k \Phi(\gamma)$. Examples show that this estimate yields the best speed of convergence as $\eta \to 0$.

D. W. Müller,
University of Heidelberg

A simple proof for a Central-Limit-Theorem under contiguous alternatives

A simple truncation method is presented for proving the following

Theorem: Let independent real rv's $Z_{ni}, i=1,\dots,n$, be given, such that under the null-hypothesis $H_0: \mathcal{L}(Z_{ni}) = P_{ni}$ (given) one has $E(Z_{ni} \mid P_{ni}) = 0$, $Var(Z_{ni} \mid P_{ni}) = 1$. Then statistics $S_n = \sum_{i=1}^n \sigma_{ni} Z_{ni}$ with $\sigma_{ni} \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^2 = 1$ are considered under H_0 as well as under contiguous alternatives $K: \mathcal{L}(Z_{ni}) = Q_{ni}$, i.e. $\{Q_n \equiv \times_{i=1}^n Q_{ni}\} \lhd \{P_n \equiv \times_{i=1}^n P_{ni}\}$.

Under the assumptions

(i) $\max_i \sigma_{ni} \to 0$ for $n \to \infty$ and (ii) $\max_i \int_{\{|x| > M_n\}} x^2 \, dP_{ni}(x) \to 0$ for $M_n \to \infty$

one concludes a) $\mathcal{L}(S_n \mid P_n) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

b) $\mathcal{L}(S_n - a_n \mid Q) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ for some centering sequence $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$.

The sequence $\{a_n\}$ is necessarily bounded.

J. Neuhaus (combined work with K. Behnen)
Univ. Gießen

A note of the MPE in the i.i.d. case

Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. r.v.'s defined on the prob. space $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$, an open subset of $\mathbb{R}$, let X be a r.v. distributed as the X's and let Q_θ be the distr.

of X under P_θ. Let $Q_\theta \ll \mu$, a σ-finite measure on $\mathcal{B}$, and let $f(\cdot;\theta) = \frac{dQ_\theta}{d\mu}$ a specified version of the R-N derivative involved. Set $Y_n = (X_1, \ldots, X_n)$, y_n for the observed value of Y_n and $Z_n(Y_n;\theta) = \int_{\theta-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\theta+\frac{1}{\sqrt{n}}} \prod_{j=1}^{n} f(X_j;t)\,dt$. Then any $\hat{d}_n = \hat{d}_n(Y_n)$ which maximizes $Z_n(Y_n;\theta)$ w.r.t. θ is a MPE of θ. The following main result is established:

Theorem: Under regularity conditions which are somewhat weaker than the ones usually employed, it is shown that: with P_θ-probability $\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ and all sufficiently large n, the equation:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} Z_n(Y_n;\theta) = 0$$

has at least one root $\hat{d}_n = \hat{d}_n(Y_n)$ which is:

(i) A $\sqrt{n}$-consistent estimate of θ in the probability sense.

(ii) A MPE.

(iii) Asymptotically normal when properly normalized.

George Roussas
Univ. of Wisconsin, Madison, U.S.A.
Univ. of Patras, Patras, Greece

A generalization of some theorems of J. Hájek on asymptotic admissibility.

Let Θ be a set and let $\{\mathcal{E}_n\}$ be a sequence of experiments $\mathcal{E}_n = \{P_{\theta,n} ; \theta \in \Theta\}$. Let $\mathcal{F} = \{Q_\theta ; \theta \in \Theta\}$ be another such experiment. Say that $\mathcal{E}_n$ converges to $\mathcal{F}$ if for every finite set $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\} \subset \Theta$ the joint distributions (under $S_n = \sum_{i=1}^{k} P_{\theta_i,n}$) of the likelihood ratios $\{dP_{\theta_j,n}/dS_n ; j = 1, \ldots, k\}$ converge to the distributions of $\{ dQ_i / dS \, ; \, i = 1, \dots, k \}$, $S = \sum_{j=1}^{k} Q_{\theta_j}$, all distributions being taken for the denominator measures.

Let (Z, Γ, W) be a decision space formed by a set Z, a uniform lattice Γ and a loss function W subject to the condition $\inf_z W_\theta(z) > -\infty$ for each θ. Let $\mathcal{D}(\mathcal{E}_n)$ be the set of all decision procedures from $\mathcal{E}_n$ to (Z, Γ, W). If $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_n)$ let $W_\theta \rho P_{\theta,n}$ be its risk at θ.

Call a loss function V on $\Theta \times Z$ special if for each θ the function of z $V_\theta(\cdot)$ belongs to Γ.

One proves the following:

Theorem Let $\sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ be admissible non randomized with risk function $W_\theta \sigma Q_\theta = f(\theta)$. Assume that σ is the only element of $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ with this risk function.

For each n let $\rho_{n,i} \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_n)$, $i = 1, 2$. Assume that $\mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{F}$ and that for every special loss function $V \leq W$ one has

$$\limsup_n V_\theta \rho_{n,i} P_{\theta,n} \leq f(\theta)$$

for all θ and $i = 1, 2$.

Then $\lim_n |\gamma \rho_{n,1} - \gamma \rho_{n,2}| P_{\theta,n} \longrightarrow 0$ for all $\theta \in \Theta$.

This extends a theorem of J. Hájek (Proc. 6th Berkeley Symp Math Stat. Prob. Vol 1 (1972) pages 175-194). Hájek's theorem is relative to the case where Θ is the line, $\mathcal{F}$ is a Gaussian shift experiment and the problems are estimation problems with loss $W_\theta(z) = h(|\theta - z|)$, $h \uparrow$.

Lucien Le Cam
University of California
Berkeley Calif 94720.

A variant of the Bayes-decision function with asymptotic optimality properties

In the situation $(X, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta}, A, \mathbb{L})$ with $0 \le \mathbb{L} \le 1$, we assume the existence of a prob. measure μ in $(\Theta, \mathcal{B})$. Given a $\delta > 0$, one can search a decision function (= d.f.) d_0, which satisfies

(1) $\sup_d \int_\Theta \{R(d_0,\theta) - R(d,\theta)\} f_0(\theta)\,\mu(d\theta) \le \delta$

for any set of prob. density functions f_0.

If $\theta_0 \in \Theta$ is the "true" parameter, a decision f. satisfying (1) for $f_0 d\mu \approx \delta_{\theta_0}$ would be very desirable. But the consideration of such a set of densities is absurd, because the elements prefer a certain part of Θ; the "variation" of these densities is too big. The only reasonable possibility is to restrict the "variation" $|f_0(\theta) - f_0(\theta')|$. Now it's an obvious idea, to have this variation depend on how good a test can divide the two measures P_θ and $P_{\theta'}$, i.e. on the Hellinger-distance $h(\theta,\theta')$ between P_θ and $P_{\theta'}$. Therefore, we consider sets of densities of the form

(2) $V(\beta') := \{ f \text{ d.f. with respect to } \mu : |f(\theta) - f(\theta')| \le \beta' h(\theta,\theta') \text{ for all } \theta, \theta' \in \Theta \}$

and search for a decision function d_1, which satisfies (1) for all $f \in V(\beta')$ with β' as large as possible. We call d_1 δ-admissible, the largest $\beta' := \beta'(\delta)$.

For any $x \in X$ (= observation), we can make analogous considerations, replacing the risk by the loss and μ by the posterior-distribution P_x. The decisions, which now replace the δ-admissible d.f.'s, will be called δ_x-admissible. ($\beta'_x(\delta)$ replace $\beta'(\delta)$.)

It is easy to see, that a d.f. d_1 is δ-admissible, if and only if $d_1(x)$ is δ_x-admissible for (except zero-sets) all $x \in X$.

In the i.i.d.-case, one obtains the following asymptotic results using a theorem of Lucien LeCam (1973):

(3a) $\lim P^n_{\theta_0} \{ \beta^n_x(\delta) \ge \rho_n \sqrt{n} \} = 1$ for all $\delta > 0$ and all $\rho_n \to 0$,

(3b) $\beta^n(\delta)\, n^{-1/2} \rho_n^{-1} \to \infty$ " " " " " " ", and

for all (d_n) with

(4) $\sup \{ |R_n(d_n,\theta) - R_n(d_n,\theta_0)| : h(\theta,\theta_0) \le \frac{1}{\rho_n^* \sqrt{n}} \} \to 0$, where $\rho_n^* = o(\rho_n)$

(5) $\lim R_n(d_{1n}, \theta_0) \le \underline{\lim}\, R_n(d_n, \theta_0)$ holds,

if (d_{1n}) is δ_n-admissible (with $\delta_n \to 0$ suitable chosen) and $\lim R_n(d_{1n}, \theta_0)$ exists.
Without the i.i.d.-restriction, but assuming the existence of a uniformly consistent (for the Hellinger-dist.) sequence T_n ($T_n : X_n \to \Theta$), (3a), (3b) and (5) holds, if on replace $\frac{1}{\delta_n \sqrt{n}}$ by the rate of consistence of (T_n).
Finally we remark, that the δ-admissible d.f.'s have a robustness property and can be applied in nonparametric situations. (An example is given).

Uwe Kuß
University of Mainz
(D 6500) Mainz

Application of contiguity to the existence of limit envelope power functions.

As defined by Hajek, the limit envelope power function of an asymptotical problem of test characterizes, when it exists, how difficult it is to distinguish between the hypothesis H_0 and the alternative hypotheses, each of them being represented by a sequence of probabilities, indexed respectively by sequences of parameters converging towards the boundary between H_0 and H_1.

Existence conditions for limit envelope power functions can be given, using as main tool the Lebesgue decomposition of sequences of ~~measures~~ probabilities: given two sequence of probabilities, let (Q_n) and (P_n), we say that (Q_n) is Lebesgue-decomposable with respect to (P_n) iff it exists two sequences, (Q'_n) and (Q''_n), such that $Q_n = Q'_n + Q''_n$ (for each n), (Q'_n) is contiguous to (P_n), and (Q''_n) is "asymptotically orthogonal" to (P_n). A sufficient condition for existence of the limit envelope power function for sequence (Q_n) with respect to (P_n) is then some regularity (called equi-uniform parojectivity) of sequences (Q'_n) and (P_n). ~~La sequen~~ Two examples are given, for location alternatives; for exponential distributions, the conditions for existence of the limit envelope power function which have been presented here are satisfied, but for uniform distributions they are not (and however a direct study proves the existence of the limit envelope power function.

Jean-Pierre RAOULT
Université de Rouen
F-76130 MONT-SAINT-AIGNAN

Asymptotic Multiple Matching

Consider s i.i.d. random variables, distributed according to a discrete equidistribution with masses $\frac{1}{n!}$, whose values are the numbers $1, \dots, n$. Write them under each other in the form

$$\begin{matrix} p_1(1) \cdots p_1(n) \\ \vdots \\ p_s(1) \cdots p_s(n) \end{matrix} \qquad (1)$$

Define a number d to be a σ-fixpoint in column j, $1 \le j \le n$, of (1), if d occurs exactly σ times in the j-th column. Let f_σ be the number of σ-fixpoints, then the fixpoint situation of a column is completely described by the vector $\mathfrak{F} = (f_\sigma, \sigma \ge 2)$, which is called a fixpoint-structure. Denote by $X^{(s,n)}(\mathfrak{F})$ the number of columns of (1) having exactly fixpoint-structure $\mathfrak{F}$. The limiting-distribution of $X^{(s,n)}(\mathfrak{F})$ is considered as $n \to \infty$ and s is allowed to be an adequate function of n. In general, a Poisson-law is obtained as limiting distribution. It can be shown, that the asymptotic behaviour of ~~a cert~~ the moments of a certain class of random-permanents can be computed by application of these results.

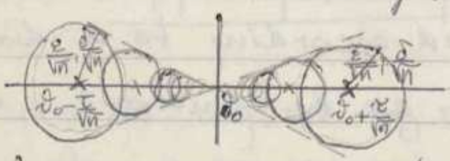
W. Sendler
Abt. Statistik, Uni Dortmund
D-46 Dortmund-Hombruch, Postf. 500

Asymptotic Study of Robust Tests

Robust tests in the sense of minimaxtests are studied for classes $\mathcal{P}_j$ of distributions defined by $\mathcal{P}_j = \{Q \mid Q \in \mathcal{M}^1(\mathcal{B}), Q(B) \geq (1-\varepsilon_j)P_j(B) - \delta_j \text{ , all } B\}$, given $P_j \in \mathcal{M}^1(\mathcal{B})$, $0 \leq \varepsilon_j, \delta_j \leq 1$, $j = 0,1$. Special cases have been considered by Huber (1965 AMS, 1968 ZWT). Using capacity-like functions $v_j(B) := ((1-\varepsilon_j)P_j(B) + \varepsilon_j + \delta_j) \wedge 1 \quad (B \neq \emptyset)$, $v_j(\emptyset) := 0$, we can derive the robust test statistic Δ^* , a suitably truncated version of $\frac{dP_1}{dP_0}$, by minimizing $t \cdot v_0 - u_1$ (u_1 the conjugate to v_1 , for all $t > 0$). Once Δ^* is given, the definition of a least favorable pair $(Q_0, Q_1) \in \mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_1$ (with likelihood ratio Δ^*) appears to be quite canonical.

The case of n-fold independent repetition ~~of trials~~ is reduced to $n = 1$ by establishing $(Q_0^{\otimes n}, Q_1^{\otimes n})$ as least favorable pair for the classes $\mathcal{P}_j^{\otimes n} = \{ \bigotimes_{i=1}^{n} R_i \mid R_i \in \mathcal{P}_j \text{ , all } i \}$.

Since the general n case is hard to compute one takes an asymptotic point of view which is illustrated by the following picture:



The centres $P_{\vartheta_0 \pm \frac{\tau}{\sqrt{n}}}$ of the neighborhoods with parameters $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ and $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$ coming from some one parameter family $\{P_\vartheta , \vartheta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathring{\Theta}$, of nice distributions on the real line. Generalizing Huber-Carol (1970 thesis, ETH Zürich, where $\varepsilon = 0$) limit normal distributions of the robust test statistic under least favorable sequences are obtained by approximation. The test defined by the approximating statistic is also seen to be asymptotically equivalent with the robust test under all sequences of the neighborhood modell.

For comparison we also investigate those tests in the neighborhood modell which are optimal in parametric modells (test statistic $\sum \Lambda(x_i)$, Λ the logarithmic derivative of the P_ϑ's densities in ϑ_0). If Λ is unbounded (e.g. the Gausstest) both kinds of error equal 1. With decreasing total variation of Λ the parametric test – first biased, then unbiased – competes with the robust test.

The squared ratio of the minimum standardized shifts of two test statistics is proposed as a measure for efficiency (ARE_{mx}) – in consistency with the minimax principal and the usual ARE. If ARE_p denotes the ARE of the robust test with respect to the parametric test in the parametric modell, it can be shown that $ARE_{mx} < ARE_p$, preferring the robust test as the most efficient on the whole.

Helmut Rieder
Freiburg

Asymptotic theory of Sequential tests for regular functionals of distribution functions.

Let $\{X_i, i \geq 1\}$ be a sequence of i.i.d.r.v. with a d.f. $F(x), x \in R^p$, $p \geq 1$. Consider a functional

$$\theta(F) = \int \cdots \int \phi(x_1, \ldots, x_m)\, dF(x_1) \cdots dF(x_m), \quad F \in \mathcal{F} = \{F: |\theta(F)| < \infty\}.$$

Let F_n be the sample d.f. and $\theta(F_n)$ be the von Mises' differentiable statistical function. We also denote by U_n, the U-statistic which unbiasedly estimates $\theta(F)$.

Sequential tests for $H_0: \theta(F) = \theta_0$ vs. $H_1: \theta(F) = \theta_1 = \theta_0 + \Delta$, $\theta_0, \Delta (>0)$ known, having prescribed strength (α, β) are proposed. These tests are based on $\{\theta(F_n)\}$ and $\{U_n\}$. The proposed tests terminate with probability one. Under local alternatives and for comparatively more stringent regularity conditions, the OC and ASN functions are studied and it is shown that asymptotically (as $\Delta \to 0$), these are comparable to those for the Wald sequential probability ratio test.

P. K. Sen.
Freiburg.

An asymptotic expansion for the distribution of asymptotic maximum likelihood estimators of vector parameters

Let $(X, \mathcal{A})$ be a measurable space; $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ open; $P_\vartheta | \mathcal{A}$, $\vartheta \in \Theta$, a family of probability ~~ests~~ measures; and $T_n, n \in \mathbb{N}$, a

sequence of asymptotic maximum likelihood estimators of order s.
It is shown that

$$P_\vartheta^{\mathbb{N}}\{\underset{\sim}{x}\in X^{\mathbb{N}}: n^{1/2}(T_n(\underset{\sim}{x})-\vartheta)\in E\}$$
$$=\int_E \varphi_{\Gamma(\vartheta)}(t)\Big(1+\sum_{k=1}^{s} n^{-k/2}P_k(t,\vartheta)\Big)dt + o(n^{-s/2}),$$

where $\Gamma(\vartheta)=\Big(\int \frac{\partial}{\partial\vartheta_i}\log p(x,\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\log p(x,\vartheta)\,P_\vartheta(dx)\Big)_{i,j=1,\dots,p}$

$\varphi_{\Gamma(\vartheta)}$ is the density of the multivariate normal distribution with mean 0 and covariance-matrix $\Gamma(\vartheta)$, and $P_k(\cdot,\vartheta)$, $k=1,\dots,s$ are polynomials.
The error term $o(n^{-s/2})$ is uniform for all convex Borel set and for all ϑ lying in a compact subsets of Θ.

R. Michel
Cologne

Regularity of minimax test selection criteria

If $\mathcal{F}=\{(\Lambda_i,\mathcal{D}_i,R_i)\}_{i\in I}$ is a set of statistical problems with risk function R_i defined on $\Lambda_i\times\mathcal{D}_i$, a test selection criterion on $\mathcal{F}$ is an element of $\prod_i \mathcal{D}_i$. If there exist metric spaces (Λ,ρ_1) and $(\mathcal{D},\rho_2)$ with $\Lambda_i\subset\Lambda$ and $\mathcal{D}_i\subset\mathcal{D}$ for all $i\in I$ then let ρ be the product metric on $E:=\Lambda\times\mathcal{D}\times R^1$. Denote the graph of R_i, considered as a subset of E, by graph (i). Then dist(i,j) denotes the Hausdorff distance between graph(i) and graph(j).

Def I $\mathcal{F}$ is statistically regular at $(\Lambda_0,\mathcal{D}_0,R_0)\in\mathcal{F}$ if, for any $\epsilon>0$ and $\delta_0\in\mathcal{D}^0$, $\exists\ \Delta>0$ s.t.

$$\left.\begin{array}{l}\text{dist}(i,0)<\Delta\\ \rho_1(\lambda,\lambda')<\Delta\\ \rho_2(\delta,\delta_0)<\Delta\end{array}\right\}\Longrightarrow |R_i(\lambda,\delta)-R_i(\lambda',\delta)|<\epsilon$$

whenever meaningful

Theorem I a) $\mathcal{F}$ statistically regular at $(\Lambda_0, \mathcal{D}_0, R_0) \in \mathcal{F}$

b) $\{(\Lambda_i, \mathcal{D}_i, R_i)\}$, $dist(i,0) \to 0$, $(\Lambda_i, \mathcal{D}_i, R_i)$ strictly determined with minimax values V_i $(i \geq 0)$

$$\Rightarrow \limsup_i V_i \leq V_0$$

Def II $\mathcal{F}$ is opponent regular at $(\Lambda_0, \mathcal{D}_0, R_0) \in \mathcal{F}$ if, for any $\epsilon > 0$, $\lambda_0 \in \Lambda$, $\exists\, \Delta > 0$ s.t.

$$\left.\begin{array}{l} dist(i,0) < \Delta \\ \rho_1(\lambda, \lambda_0) < \Delta \\ \rho_2(\delta, \delta') < \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow |R_i(\lambda,\delta) - R_i(\lambda,\delta')| < \epsilon$$

whenever meaningful

In theorem I, statistical regularity together with opponent regularity imply $\lim_i V_i = V_0$.

Theorem II a') $\mathcal{F}$ opponent regular at $(\Lambda_0, \mathcal{D}_0, R_0) \in \mathcal{F}$

Let $dist(i,0) \to 0$. If δ_i is minimax for $(\Lambda_i, \mathcal{D}_i, R_i)$ $(i > 0)$ and if $\limsup_i V_i \leq V_0$, then every $\delta_0 \in \mathcal{D}_0$ which is a cluster point of $\{\delta_i\}$ is minimax for $(\Lambda_0, \mathcal{D}_0, R_0)$

Corollary If a), b), a') and $\mathcal{D}_0$ compact in $\mathcal{D}$, then the uniqueness of the minimax for $(\Lambda_0, \mathcal{D}_0, R_0) \in \mathcal{F}$ implies that every minimax criterion on $\mathcal{F}$ is continuous at $(\Lambda_0, \mathcal{D}_0, R_0)$

Application: Let $(\Lambda_0, \mathcal{D}_0, R_0)$ be one of the following:

i) Monotone likelihood ratio

ii) Exponential family

iii) Exponential family with free nuisance parameters

$\mathcal{F}_0 := \{(\Lambda_i, \mathcal{D}_0, R_i)\}_{i \in I}$ with Λ_i convex $\subset \Lambda_0$ and $R_i = R_0|_{\Lambda_i \times \mathcal{D}_0}$ for all $i \in I$.

$\Lambda_0 := \Theta_0^*$ with metric ρ_4 (A. Wald)

$\mathcal{D} := \{\int \phi P_\theta \mid \phi$ critical function$\}$ with the topology of pointwise convergence on Θ.

Theorem For i) ii) iii), every admissible minimax criterion Φ defined on $\mathcal{F}_0$ is continuous at $(\Delta_0, \mathcal{J}_0, R_0)$.

C. C. Brown Erlangen

Asymptotic Sufficiency of Rank Statistics

Consider i.i.d. r.v. X_i, $i \in \mathbb{N}$, with d.f. $P(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Let $L_{(n)} = (\varepsilon_{(n)}(X_{(n)}), R^+_{(n)}(|X_{(n)}|))$ be the rank statistik containing the vector of signs $\varepsilon_{(n)}$, and the vector of ranks $R^+_{(n)}$ of the absolut values of $X_{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$. Furthermore let F be the d.f. from a distribution symmetric with respect to zero. P_S denotes the symmetrization of P with resp. to zero, and $P^n = \overset{n}{\underset{1}{\times}} P$.
The problem of proving asymptotic sufficiency (Le Cam, Univ. of Cal. Publ. in Stat. (1960)) of $L_{(n)}$ for "global" subclasses of $\mathcal{P}_n = \{P^n \mid P_S = F\}$ is reduced to the "lokal" problem of approximating statistics of the form $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum g(X_i)$ by rank statistics. Statistics $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum g(X_i)$ occur in expansions of the log likelihood ratio of contiguous sequences taken from $\mathcal{P}_n$. Approximations of the form

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum g(X_i) - T_{1n}(L_{(n)}) - T_{2n}(|X_{(n)}|_{[\cdot]}) \xrightarrow{q.m.} 0$$

are proofed. In gen. T_{2n} cannot be substituted by improving the rank approximation T_{1n}.
Thus asymptotic sufficiency of $L_{(n)}$ can only be proofed for a relatively small subclass of $\mathcal{P}_n$, e.g. for global classes formed by piecewise constant densities with resp. to F or for lokal subclasses

of R_n containing contiguous points with resp. to F.

M. Heisterkamp (Freiburg)

Weakening the regularity conditions for some asymptotic expansions

The problem of obtaining the asymptotic expansions for distributions of some statistics is reduced to that for r.v.'s of form ~~$Z_n = S_{n1} + n^{-1/2} S_{n2} + \dots + n^{-k/2} S_{n,k+1}$ where $S_n = (S_{n1}, \dots, S_{n,k+1})$~~

$$Z_n = S_{n1} + n^{-1/2} h_1(\underline{S}_n) + \dots + n^{-k/2} h_k(\underline{S}_n)$$

where $S_n = (S_{n1}, \dots, S_{np})' = n^{-1/2} \sum_1^n \underline{Y}_i$, $\underline{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{ip})'$, $i = 1, \dots, n$, being independent identically distributed random vectors. The asymptotic expansion for the distribution of Z_n was obtained earlier under the conditions that $E\underline{Y}_i = 0$, $E|Y_{ij}|^r < \infty$, $h_j(\cdot)$ are polynomials, and distribution of S_n contain an absolutely continuous component for large enough n (then the expansion is up to $o(n^{-(r-2)/2})$). The following result has been obtained for the particular case of $k=1$.

Theorem. Let (1) $E\underline{Y}_i = 0$, $E|Y_{i1}|^3 < \infty$, $EY_{ij}^2 < \infty$, $j = 2, \dots, p$, $E|Y_{i1}|^2 = 1$

(2) $h(\cdot)$ is a continuous function, $|h(\underline{x})| \le K(1 + \|\underline{x}\|^2)$ for some $K > 0$

(3) The distribution of Y_{i1} is non-lattice.

Then

$$P\{Z_n < x\} = \Phi(x) - n^{-1/2}\left[\frac{\alpha_3}{6}(x^2-1) + E(h(\underline{S}) \| S_1)\right]\varphi(x) + o(n^{-1/2})$$

where $\Phi(x)$ and $\varphi(x)$ are the d.f. and density of the normal distribution $N(0,1)$, $\alpha_3 = EY_{i1}^3$, $\underline{S} = (S_1, \dots, S_p)'$ is a random vector with the normal distribution $N(0, \Sigma)$, $\Sigma = E\underline{Y}_i\underline{Y}_i'$

D. Chibisov (Moscow)

Asymptotic Relations between Bayes and Maximum Likelihood Estimators.

Let $(X, \mathcal{A})$ be a measurable space, $\{P_\vartheta\}_{\vartheta \in \Theta}$ a family of p-measures on $(X, \mathcal{A})$, $(\Theta, \mathcal{B})$ being an open interval of real numbers with the σ-algebra of Borel sets. λ denotes a prior distribution over $(\Theta, \mathcal{B})$ and $R_{n,\underline{x}}$ is a regular version of the posterior distribution being defined as the conditional distribution of R_n given $\mathcal{A}^n$ (R_n denotes the mixture between $\{P_\vartheta^n\}$ and λ). Under certain regularity conditions it may be proved that for every compact $K \subseteq \Theta$ there exists c_K such that

$$\sup_{\vartheta \in K} P_\vartheta^n \{ \underline{x} \in X^n : \| R_{n,\underline{x}} - Q^\vartheta_{n,\underline{x}} \| \geq c_K \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2} \} = o(n^{-1/2})$$

where $\|.\|$ denotes the variational norm and $Q^\vartheta_{n,\underline{x}}$ denotes the normal distribution with mean $\vartheta_n(x)$ (maximum likelihood estimate) and variance $a(\vartheta)/n$. From this theorem one obtains results on the asymptotic behaviour of Bayes estimates the most important one being the following: Let (T_n) be a sequence of Bayes estimates for a sufficiently regular loss function $L : \Theta \times \Theta \to \mathbb{R}$. Then for every compact $K \subseteq \Theta$ there exists c_K such that

$$\sup_{\vartheta \in K} P_\vartheta^n \{ \underline{x} \in X^n : | T_n(\underline{x}) - \vartheta_n(\underline{x}) | \geq c_K \frac{\log n}{n} \} = o(n^{-1/2}).$$

Helmut Strasser (Vienna)

Asymptotically complete classes.

A complete-class theorem based on $f(x,\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{\frac{p(x,\vartheta)}{p(x,\vartheta_0)} - 1}{\vartheta - \vartheta_0} & \vartheta \neq \vartheta_0 \\ \ell^{(1)}(x,\vartheta) & \vartheta = \vartheta_0 \end{cases}$

is stated and applied for a family P_ϑ^n, $\vartheta \in \mathbb{R}$. It yields an asymptotically complete class of critical regions of order $o(n^{-1})$

$$\{(x_1,\dots,x_n): n^{-1/2}\sum_{\nu=1}^{n} \ell^{(1)}(x_\nu, \vartheta + n^{-1/2}t) > r\} \qquad t, r \in \mathbb{R}$$

for the testing problem $H: \vartheta \leq \vartheta_0$, $K: \vartheta > \vartheta_0$.

This theorem is applied to obtain a complete class of confidence procedures which yield confidence rays. Finally, the asymptotically complete class of confidence rays is used to obtain an asymp. complete class of estimators

J. Pfanzagl (Köln)

Optimierungstheorie und optimale Steuerungen

17. Nov. – 23. Nov. 1974

Konvexe Optimierung in Dualräumen

Unter einer üblichen Regularitätsvoraussetzung (Slater-Bedingung) wird gezeigt, daß auf einer durch stetige konvexe und lineare Restrikt. bestimmten beschränkten Teilmenge eines reellen Banachraumes X, jedes stetige konvexe Funktional genau dann ein Minimum besitzt, wenn X reflexiv ist. Die für reflexive Räume gültige universelle Existenzaussage ~~wird~~ ist als Spezialfall einer entsprech. Existenzaussage in bel. Dualräumen zu betrachten, auf die sich ein großer Teil der in der konvexen Optimierungstheorie bekannten Existenzsätze zurückführen läßt

J. Knell
München

Exakte Penalty-Funktionen und infinite Optimierung

In dieser Arbeit zeigen wir die wesentlichen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lokale Exaktheit. Unseren Ausführungen liegt dabei ein Problem der infiniten Optimierung zugrunde. Zum einen ergibt sich lokale Exaktheit als Folge eines Satzes über implizite Funktionen. Dadurch werden die bekannten hinreichenden Bedingungen von Pietrzykowski, Evans, Gould und Tolle verallgemeinert, zum anderen zeigen wir eine Verallgemeinerung eines Resultats von Howe und beweisen darüber hinaus die Gültigkeit eines Minimumprinzips, falls lokale Exaktheit vorliegt.

Hans Czap, Göttingen.

MINKOWSKI Matrices and the Linear Complementarity Problem

After a brief survey of how the class of MINKOWSKI matrices can be characterized in terms of the linear complementarity problem and the parametric linear complementarity problem the following problem is considered:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \alpha \\ &\text{subject to } \quad q + \alpha p + Mx \geq 0 \\ &\qquad\qquad\qquad 0 \leq x \leq a \\ &\qquad\qquad\qquad x^T[q + \alpha p + Mx] = 0 \end{aligned}$$

where $q \geq 0$, p, and $a > 0$ are given n-vectors, M is a given $n \times n$ matrix with positive principal minors, and α is a scalar. In order to give sufficient conditions under which a modified linear programming method will solve this problem, one is led to asking for conditions on M under which the set

$$R(a,M) := \{ r \mid 0 \leq x \leq a,\ r + Mx \geq 0,\ x^T[r+Mx] = 0 \text{ has a solution} \}$$

is convex. The answer is given here in the THEOREM: Under the hypotheses stated above, $R(a,M)$ is convex if and only if M is a MINKOWSKI matrix.

Richard W. Cottle, Zürich
and Stanford, Ca.

Der Sattelpunktsatz von Kuhn und Tucker in geordneten Vektorräumen

Es sei D konvexe Teilmenge eines reellen Vektorraumes X, Z ein geordneter Vektorraum und Y ein archimedisches ordnungsvollständiger Vektorverband; ferner seien $f: D \to Y$ und $g: D \to Z$ konvexe Funktionen. Betrachtet wird das verallgemeinerte konvexe Programmierungsproblem in Y mit Nebenbedingungen in Z

$$\min \{ f(x) \mid x \in D,\ g(x) \leq 0 \}. \qquad \text{(MP)}$$

Zu (MP) wird die "Lagrangefunktion" $\Phi(x,T) := f(x) + Tg(x)$, definiert auf $D \times L_+$, zugeordnet; hierbei steht L_+ für die positiven linearen Operatoren von Z nach Y. Es gilt dann folgende Verallgemeinerung des Sattelpunktsatzes von Kuhn-Tucker/:

<u>Satz:</u> Es gebe ein $\bar{x} \in D$ derart, daß $-g(\bar{x})$ Ordnungseinheit in Z ist. Dann ist x_0 Lösung von M.D. genau dann, wenn es ein $T_0 \in L_+$ gibt, derart daß für alle $T \in L_+$ und $x \in D$ gilt

$$\phi(x_0, T) \le \phi(x_0, T_0) \le \phi(x, T_0).$$

Jochem Zowe

Über ein parabolisches Rand-Kontrollproblem

Es wird ein Kontrollproblem behandelt, das bei der optimalen Steuerung von Wärmeleitungsvorgängen auftritt. Für diese Aufgabe läßt sich die Existenz einer Optimallösung nachweisen; weiter erhält man einen Eindeutigkeitssatz und eine genaue Charakterisierung der optimalen Steuerung (verschärftes Bang-Bang-Prinzip). Es werden einige verwandte Kontrollprobleme diskutiert und ein numerisches Verfahren (Ritz-Methode) untersucht.

Klaus Glashoff (Darmstadt)

Eine Relaxations-Strategie für das modifizierte Newton-Verfahren

Bei der Behandlung von Zwei-Punkt-Randwertaufgaben mit der Mehrzielmethode ergeben sich in den Anwendungen häufig hoch-nichtlineare, numerisch sensitive Gleichungssysteme. Sie werden mit dem modifizierten Newton-Verfahren (auch Newton-Verfahren mit Unterrelaxation) gelöst. In manchen Beispielen jedoch führt die übliche empirische Wahl des Relaxationsfaktors ("λ-Strategie") entweder zu Exponentenüberlauf während der

Iteration (und damit zum Abbruch der Rechnung) oder zu schleppender Konvergenz.
Der Vortrag stellt eine neue Relaxations-Strategie vor, die sich aus lokalen und globalen Konvergenzsätzen des modifizierten Newton-Verfahrens herleiten läßt. Im gleichen Zusammenhang ergibt sich auch eine einfache Bedingung für die alternative Anwendung von Rang-1-Approximationen der Jacobi-Matrix. Anhand von numerischen Beispielen wird die Effizienz und Verläßlichkeit der vorgeschlagenen Methoden belegt.

P. Deuflhard (TU München)

Kombinatorische Optimierung in Halbgruppen

Bei einer großen Klasse kombinatorischer Optimierungsprobleme, die Zuordnungsprobleme, Transportprobleme, Flußprobleme in Netzwerken u.a. enthält, läßt sich die kombinatorische Struktur des Problems von der algebraischen Struktur der Zielfunktion trennen. Es wurde die algebraische Struktur dieser Probleme weiter untersucht. Dabei ergibt sich im wesentlichen, daß die Koeffizienten der Zielfunktion aus einer beliebigen totalgeordneten, kommutativen Halbgruppe gewählt werden können, deren Ordnungsrelation und innere Verknüpfung durch ein starkes Verträglichkeitsaxiom und ein Teilbarkeitsaxiom miteinander verknüpft sind. Als Spezialfälle dieses allgemeinen Modells treten Summenzielfunktionen und Bottleneckzielfunktionen auf. Anhand des linearen Zuordnungsproblemes wurde exemplarisch ein Algorithmus zur Lösung derartiger verallgemeinerter Probleme aufgezeigt.

Rainer E. Burkard (Köln)

Optimale Steuerungen für Gleitflugbahnen beim Eintritt in Planetenatmosphären

Die kommende Generation von Raumfahrt-Trägersystemen wird rückführbare Oberstufen haben, die ähnlich wie Segelflugzeuge gleitend zur Erde zurückkehren. Die Häufigkeit der Rückkehrmöglichkeit zu einem gegebenen Landepunkt hängt dabei von der erzielbaren seitlichen Reichweite ab, die von den beiden Steuerfunktionen aerodynamischer Anstellwinkel α und Auftriebsquerneigungswinkel μ entscheidend beeinflußt wird. Die Flugbahnauslegung ist dabei durch Zustandsraumbegrenzungen infolge kinetischer Aufheizung eingeengt.

Das Rückkehrmanöver wird mathematisch modelliert. Unter vereinfachenden Annahmen wird eine analytische Näherungslösung für die Steuerfunktionen $\alpha(t)$ und $\mu(t)$ zur Maximierung der seitlichen Reichweite abgeleitet. Sie dient als Ausgangspunkt für numerische Iterationen zur Lösung des vollständigen Randwertproblems.

Numerische Ergebnisse werden für aufheizungsbeschränkte Bahnen maximaler Seitenreichweite und den von vorgegebenen Eintrittsbedingungen in die Atmosphäre maximal erreichbaren Landebereich ("footprint") angegeben. Charakteristiken der optimalen Steuerungen werden diskutiert.

E. D. Dickmanns, DFVLR Oberpfaffenhofen

Das Pontryaginsche Maximumprinzip für Probleme mit Zustandsbeschränkungen.

Betrachtet werden Kontrollprobleme, die durch folgende Daten charakterisiert sind 1) $\dot{x} = f(x,u)$, 2) Kontrollbereich U, 3) Phaseneinschränkung $g(x) \leq 0$, 4) Vorgabe von Randbedingungen. Es wird ein System von notwendigen Bedingungen angegeben, denen eine (bezüglich eines durch ein Integral gegebenes Funktional) optimale Lösung $(u(t), x(t))$ zu genügen hat. Diese Be-

dingungen unterscheiden sich von den in der Literatur üblichen in zweifacher Hinsicht: Die Hamiltonfunktion hat die gleiche Gestalt wie für Probleme ohne Zustandsbeschränkungen, enthält insbesondere keinen, die Nebenbedingung $g(x) \leq 0$ berücksichtigenden, Lagrangeschen Multiplikator. Auch hängen die adjungierten Zustandsvariablen nicht von einem solchen Multiplikator ab. Dafür nimmt dann das Maximumprinzip über Verweilintervallen – das sind solche t-Intervalle, für die die Trajektorie ganz der Menge $\{x \mid g(x) = 0\}$ angehört – eine von der üblichen abweichende Form an.
Die Methode ist geometrisch-analytisch und basiert auf einer verfeinerten Analyse der lokalen Struktur der erreichbaren Menge und benutzt insbesondere einen Erreichbarkeitskegel, der die gleichen Approximationseigenschaften in Bezug auf die erreichbare Menge besitzt wie der Pontryaginsche Kegel im Falle von Problemen ohne Zustandsbeschränkung.

H. W. Knobloch, Würzburg.

Explizite Approximation optimaler Prozesse

Zu einem vorgegebenen Problem der optimalen Steuerung von Prozessen werden unter Verwendung eines allgemeinen Diskretisierungsverfahrens endlichdimensionale, explizit gegebene Probleme definiert, deren Extremalwerte gegen den Extremalwert des Originalproblems konvergieren.

Michael Köhler, Zürich

Über ein Optimierungsproblem, das bei der Diskretisierung von Minimalflächenproblemen mit freiem Rand auftritt

Wenn man das PLATEAUsche Problem diskretisiert, dann erhält man eine Aufgabe, die auch bei anderen Problemstellungen eine Rolle spielt. Besonders interessant wird diese Aufgabe, wenn man noch Ungleichungsnebenbedingungen zuläßt, so daß man auch noch gewisse Minimalflächenprobleme mit freiem Rand numerisch behandeln kann. Die Lösung des diskreten Problems läßt sich – in Verallgemeinerung eines Verfahrens von Weiszfeld zur Weglängenoptimierung – durch eine Folge von Lösungen quadratischer Optimierungsaufgaben approximieren.

Ulrich Eckhardt, KFA Jülich

Optimization in an Industrial Environment

During the presentation a number of optimization projects are sketched with particular emphasis on the managerial issues (data collection, model formulation, interpretation, implementation). Attention is primarily given to the organisational differences between some linear-programming and nonlinear-programming projects, and to the concept of a solution to the project (organisational embedding). A major stumbling block for the application of nonlinear programming (as opposed to linear programming) seems to be the absence of general, thoroughly tested computer programs.

Hence, the design of such a program is briefly sketched, and some computational results are demonstrated. Some possible guidelines for the comparison of algorithms and computer programs are discussed at the end of the presentation.

F. A. Lootsma

Numerical treatment of a parabolic boundary-value control problem by means of semi-infinite programming

We consider a control problem governed by a parabolic partial differential equation. Initial value, corresponding to the time t=0, are prescribed. The task is to regulate the boundary-values in such a manner that at the fixed time T the solution as closely as possible approximates a given function in the uniform norm. Industrial applications of this problem are discussed by Butkovskiy. After discretizing in the time domain we arrive at the task to approximate the given function with a linear combination of certain functions with a fairly general character. Further, bounds on the admissible values of the coefficients also appear. The solution is constructed by means of semi-infinite programming, for which computer codes have been written

Sven-Åke Gustafson in Stockholm

Diskrete rationale Approximation mit im Stützstellenintervall polfreier Funktion

Die unrestringierte rationale Ausgleichung führt unter Umständen zu Approximations=funktionen, die im Stützstellenintervall Pole aufweist. Pomentale hat gezeigt, daß man sich bei der restringierten Minimierung auf Approximationsfunktionen beschränken muß, bei denen das Nennerpolynom auf dem Stützstellenintervall gleichmäßig über einer positiven Schranke ε bleibt. Es entsteht eine Aufgabe der nichtkonvexen semiinfiniten Optimierung. Es wird hier ein Algorithmus der zulässigen Richtungen angegeben, der ohne eine Diskretisierung der Nebenbedingungen auskommt. In jedem Teilschritt ist eine lineare Ausgleichsaufgabe (ev. mit linearen Gleichungen als Nebenbedingungen) und eine unimodale Optimierung zu lösen. Unter sehr schwachen Bedingungen kann gezeigt werden, daß der Algorithmus für jeden zulässigen Startwert eine gegen ein strenges lokales Minimum konvergierende Folge zulässiger Näherungen erzeugt. Die praktische Erprobung zeigt, daß der Algorithmus sehr zuverlässig arbeitet und auch unter schwierigen Bedingungen genaue Resultate liefert.

Peter Spellucci
Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz.

Penalty-Methoden für Kontrollprobleme und Open-Loop-Differentialspiele

Wir betrachten ein System (Spiel), dessen Verhalten beschrieben ist durch ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem $\dot{x} = f(t, x, u, v)$, $x(0)=a$, $0 \le t \le 1$, welches eindeutig lösbar sei. Dabei sind $u \in U \subset L_2^m[0,1]$ und $v \in V \subset L_2^n[0,1]$. Für $p: U \times V \to \mathbb{R}$ bezeichne (U, V, p) ein 2-Personen-0-Summen-Differentialspiel. Sind nun zusätzliche Nebenbedingungen zu berücksichtigen, $u \in U_0 \subset U$, $v \in V_0 \subset V$, so lösen wir das Spiel $G = (U_0, V_0, p)$ mittels der Penalty-Spiele $G_n = (U, V, p_n)$, wobei $p_n = p + r_n(P_V - P_U)$, $r_n \to \infty$, $P_U \ge 0$, $P_V \ge 0$ sind P_U, P_V auf U_0 bzw. V_0 verschwinden. Unter geeigneten Voraussetzungen konvergieren Lösungen von G_n gegen eine Lösung von G und entsprechend die zugehörigen Spielwerte. Für Minimum-Kontrollprobleme lassen sich einige Konvergenzaussagen noch verschärfen.

Joachim Hartung, IAMI, Universität Bonn

Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen

Die notwendigen Bedingungen für Steuerprozesse werden diskutiert. Man erhält verschiedene Bedingungen, je nachdem ob die Steuerung nichtlinear oder linear auftritt. Im Falle einer linear auftretenden Steuerung werden Beziehungen für die Schaltfunktion an den Nahtstellen von inneren Extremalenbögen und Randextremalenbögen angegeben. Damit kann eine Charakterisierung der Nahtstellen hergeleitet werden, welche dual ist zu einem Ergebnis aus der Theorie singulärer Steuerungen. Dieses Resultat gestattet eine Klassifizierung des Lösungsverhalten der optimalen Trajektorie in Abhängigkeit von der Ordnung der Zustandsbeschränkung und ermöglicht die Auswahl des passenden numerischen Algorithmus

Helmut Maurer, Köln

OPTIMIZATION ALGORITHMS AND POINT-TO-SET MAPPING

Nonlinear programming has at present many optimization methods, and the basic ideas on which they are grounded appear to be quite varied. This diversity is pointed out by many survey papers.
To the end of synthesis, and with the use of point-to-set mapping, we describe two general algorithms which regroup most of the conventional methods said to be "feasible methods", i.e. generating a sequence of feasible solutions that converge to an optimal solution. Some applications are given, where we again encounter well-known methods.

P Huard

PIERRE HUARD, PARIS (E.D.F.)
LILLE (Univer...)

Zur Störungstheorie bei Variationsungleichungen

Differenzierbare nichtlineare Optimierungsaufgaben und Minimumprobleme können auf die Lösung von Variationsungleichungen des Typs

(U) $\langle A(u), v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle$

auf einer konvexen, abgeschlossenen Teilmenge $C \subset E$, E ein reeller B-Raum und $u, v \in C$, $f \in E^*$, $A: E \to E^*$, zurückgeführt werden. Man approximiert nun $\langle E, E^* \rangle$ im Sinne der Stummel'schen diskreten Approximation durch $\langle E_\iota, E_\iota^* \rangle$, $\iota \in \Lambda_0$, und studiert die Ungleichungen

(U_ι) $\langle A_\iota(u_\iota), v_\iota - u_\iota \rangle \geq \langle f_\iota, v_\iota - u_\iota \rangle$, $\iota \in \Lambda$,

wobei $C_\iota \subset E_\iota$, $v_\iota, u_\iota \in C_\iota$, $f_\iota \in E_\iota^*$, $A_\iota: E_\iota \to E_\iota^*$, $\iota \in \Lambda_0$.
Unter Zuhilfenahme von Monotonieeigenschaften von A, A_ι und einer Folge von Penalty-Operatoren werden Bedingungen angegeben, unter denen aus der Lösbarkeit von (U_ι) die Existenz einer Lösung von (U) geschlossen werden kann. Es ergibt sich die schwache Konvergenz von Teilfolgen von Lösungen der gestörten Probleme. Projektionsmethoden zur Approximation von Lösungen sollen zur Verdeutlichung dienen.

Hansgeorg Jeggle, TU Berlin

Ein Approximationssatz und seine Anwendung in der Kontrolltheorie.

Wir betrachten ein Kontrollproblem, dessen dynamisches System durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben wird. Für eine geeignete Diskretisierung der Differentialgleichung und der Menge der Kontrollfunktionen beweisen wir eine asymptotische Fehlerabschätzung. An verschiedenen gerechneten Beispielen prüfen wir ihre Genauigkeit.

K.-H. Hoffmann, München.

Sur un algorithme dual pour calculer la distance entre deux convexes.

Étant donnés deux convexes $C_1 = \{x \mid \langle x, a(t)\rangle \le b(t)\ \forall t \in T_1\}$

$C_2 = \{x \mid \langle x, a(t)\rangle \le b(t),\ \forall t \in T_2\}$ $\quad C_1 \cap C_2 = \emptyset$

On cherche $\bar{x}_1 \in C_1$ et $\bar{x}_2 \in C_2$ tels que $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| = \min\limits_{\substack{x_1 \in C_1 \\ x_2 \in C_2}} \|x_1 - x_2\|$.

L'algorithme consiste à calculer la distance de 0 à $C_1 - C_2$ en exprimant $C_1 - C_2$ comme une intersection de demi-espaces. Si $S \subset T_1 \cup T_2$ tel que $0 \in \mathrm{Co}(a(s), s \in S)$, $S \cap T_1 \neq \emptyset$, $S \cap T_2 \neq \emptyset$, avec $\mathrm{Card}(S) \le n+1$, on a $0 = \sum_{s \in S} \rho_S(s) a(s)$. $C_{S\cap T_1} = \bigcap_{t \in S \cap T_1} C_t$ $\quad C_{S \cap T_2} = \bigcap_{t \in S \cap T_2} C_t$

$C_{S\cap T_1} - C_{S \cap T_2} = D_S = \{y \mid \langle y, \alpha(S)\rangle \le \beta(S)\}$ avec $\alpha(S) = \sum_{s \in S \cap T_1} \rho_S(s) a(s)$

et $\beta(S) = \sum_{s \in S} \rho(s) b(s)$. Si $\mathcal{S}$ est la collection de tous ces S, on a (avec les hypothèses convenables)

$C_1 - C_2 = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} D(S)$. On peut alors expliciter un algorithme dual qui consiste à manipuler un demi-espace et l'un seulement des $D(S)$ à chaque itération. On démontre la convergence.

Pierre-Jean Laurent (Grenoble)

Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit in der Kontrolltheorie

Die Eindeutigkeit des Cauchy-Problems (Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit) für partielle Differentialgleichungen ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Auswertung des Pontrjaginschen Maximumprinzips im Zusammenhang mit Kontrollproblemen bei partiellen Differentialgleichungen. Dies wird an zwei Beispielen illustriert. Es zeigt sich, daß die bekannten Sätze über eindeutige Fortsetzbarkeit verschärft werden müssen, damit das Maximumprinzip die optimale Steuerung eindeutig festlegt und damit „bang-bang-Sätze" gelten. Diese Verschärfung ist im Falle des elliptischen Operators zweiter Ordnung möglich.

N. Weck (TH Darmstadt)

Nonlinear Least Squares and Matrix Differentiation

In many applications, nonlinear least squares problems have a special structure. For example, a familiar problem is that of fitting sums and exponentials. In this talk, we consider various specialized problems and show that after some manipulation, it is necessary to differentiat various matrix functions in order to implement the Gauss-Newton method. Examples from the physical sciences and econometric problems will be given.

gehalten von: GENE H. GOLUB

Application of Dubovitskii-Milyutin theory to optimal settling problem. ~~with~~

A problem of optimal control ~~to~~ for timelag systems with control and phase constraints is considered on the basis of Dubovitskii-Milyutin theory. A necessary condition is derived for the case when the boundary conditions are given as function space elements. Relation to other necessary conditions without phase constraints is discussed.

P C Das. Berlin (Kanpur)

Held on 22/11/74.

Nonlinear Least Squares and Matrix Differentiation

In many applications, nonlinear least squares problems have a special structure. For example, a familiar problem is that of fitting sums and exponentials. In this talk, we consider various specialized problems and show that after some manipulation, it is necessary to differentiate various matrix functions in order to implement the Gauss - Newton method. Examples from the physical sciences and econometric problems will be given.

gehalten von: GENE H. GOLUB

Application of Dubovitskii Milyutin theory to optimal settling problem.

A problem of optimal control is for [illegible] heating system with control on a plane [illegible] is considered on the basis of Dubovitskii Milyutin theory. A maximum condition is derived for the case when the boundary conditions are given as function space elements. Relation to other necessary conditions [illegible] is discussed.

[illegible]

[illegible]

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Inhaltsverzeichnis zum Vortragsbuch Nr. 28

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft