Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

BERICHT

Arbeitsgemeinschaft über ganzzahlige Darstellungen
19. bis 25.4.1965

Die Tagung wurde von Prof. Dr. W. Gaschütz (Kiel) und Prof. Dr. W. Jehne (Heidelberg) geleitet. Die weiteren Teilnehmer waren:

Armbrust, Dr. M.	Köln
Behr, H.	Göttingen
Böge, Dr. S.	Heidelberg
Böge, Dr. W.	Heidelberg
tom Dieck, Dr. T.	Saarbrücken
Dress, Dr. A.	Kiel
Gross, Dr. F.	Kiel
Hoechsmann, K.	Tübingen
Huppert, Dr. B.	Mainz
Jacobinski, Dr. H.	Stockholm
Kegel, Dr. O.H.	Frankfurt/M.
Knebusch, Dr. M.	Hamburg
Kneser, Prof.Dr. M.	Göttingen
König, Prof. Dr. H.	Köln
Kunz, Dr. E.	Heidelberg
Kupisch, Dr. H.	Saarbrücken
Leptin, Dr. H.	Hamburg
Neubüser, Dr. J.	Kiel
Puppe, Prof.Dr. D.	Saarbrücken

Die Arbeitsgemeinschaft entwickelte auch diesmal die gewohnte anregende Atmosphäre. Man beschäftigte sich mit den mannigfachen Aspekten der Theorie ganzzahliger Darstellungen von Gruppen und Algebren, die in elf Vorträgen skizziert wurde. Besonders hervorgehoben wurden einige neuere Ergebnisse: Sätze von Heller-Reiner, Bass-Serre und Swan.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vorträge.

Knebusch, M.: Gitter über dedekindschen Ringen. (1)

Ein Modul M über einem kommutativen Ring R mit 1 heißt Gitter, wenn er endlich erzeugt und projektiv ist. Sei R ein Integritätsbereich, K sein Quotientenkörper. Ein R-Teilmodul von K heißt (gebrochenes) Ideal, wenn er $\neq 0$ ist, und seine Elemente einen gemeinsamen Nenner haben.
Ideale sind genau dann projektiv, wenn sie invertierbar sind; insbesondere sind sie dann auch Gitter. Sind alle endlich erzeugten Ideale von R Gitter (d.h., R prüferscher Ring), so gilt für endlich erzeugte R-Moduln M:
M projektiv $\Longleftrightarrow$ M torsionsfrei $\Longleftrightarrow$ M direkte Summe von Idealen.
Sind $M = \mathfrak{a}_1 x_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_n x_n$, $N = \mathfrak{b}_1 y_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{b}_n y_n$ Gitter in einem n-dimensionalen K-Raum V mit $M \supseteq N$ ($\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i$ Ideale), so ist

$$M = N \Longleftrightarrow \prod \mathfrak{a}_i = a \prod \mathfrak{b}_j ,$$

wobei $a = \det(a_{ij})$ mit $y_j = \sum x_i a_{ij}$. Ist R sogar dedekindsch, so gilt:

$$\mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_n \simeq \mathfrak{b}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{b}_n \Longleftrightarrow \prod \mathfrak{a}_i \sim \prod \mathfrak{b}_j .$$

Sei R dedekindsch. Man betrachte die Lokalisierungen $M_{\mathfrak{p}}$ eines R-Gitters M ($\mathfrak{p}$: Primideale von R). Es gilt der Satz: An endlich vielen Stellen lassen sich die Lokalisierungen eines Gitters beliebig vorgeben. Sei $K^*_{\mathfrak{p}}$ die Komplettierung von K bezüglich $\mathfrak{p}$, $R^*_{\mathfrak{p}}$ der Ring der ganzen Elemente von $K^*_{\mathfrak{p}}$.
Zu einem R-Gitter M kann man das $R^*_{\mathfrak{p}}$-Gitter $M^*_{\mathfrak{p}} = M \otimes_R R^*_{\mathfrak{p}}$ bilden; $M^*_{\mathfrak{p}}$ ist der topologische Abschluß von M in $V^*_{\mathfrak{p}} = M \otimes_R K^*_{\mathfrak{p}}$. Sei V ein K-Raum: Jedes $R^*_{\mathfrak{p}}$-Gitter von $V^*_{\mathfrak{p}}$ tritt als Komplettierung genau eines $R_{\mathfrak{p}}$-Gitters von V auf.

Hoechsmann, K.: Das higmansche Ideal. (2)

Sei R ein Integritätsbereich, Γ eine R-Algebra mit Eins. M,N,X,Y seien Γ-Moduln. M,N,Γ seien als R-Moduln endlich erzeugt und torsionsfrei. Für $a \in R$ heißt M a-projektiv, wenn zu jedem Γ-Epimorphismus $\varepsilon : X \longrightarrow Y$ $a \cdot \mathrm{Hom}(M,Y) \subseteq \varepsilon(\mathrm{Hom}(M,X))$. Die Menge der $a \in R$ mit M a-projektiv ist ein Ideal d(M), für welches folgender Satz gilt: Sei $\mathfrak{N} \subseteq R$ eine multiplikative Halbgruppe ($0 \notin \mathfrak{N}$); dann ist $M_{\mathfrak{N}}$ projektiv

über $\Gamma_{\mathfrak{N}} \iff d(M) \cap \mathfrak{N} \neq \emptyset$ (dabei bedeutet $M_{\mathfrak{N}}$ das Tensorprodukt $M \underset{R}{\times} R_{\mathfrak{N}}$, $R_{\mathfrak{N}}$ den Quotientenring bezüglich $\mathfrak{N}$).
Ist R dedekindsch, so gilt $d(M) = \prod_{\mathfrak{p}} d(M_{\mathfrak{p}})$.

Γ heißt <u>separabel</u>, wenn Γ als Γ^e-Modul projektiv ist, wobei $\Gamma^e = \Gamma \underset{R}{\otimes} \Gamma^o$ und Γ^o die zu Γ anti-isomorphe Algebra bedeutet (Γ^e-Linksmodul = Γ-Bimodul). Ist Γ separabel, so ist jedes (R,Γ)-Gitter (Γ-Modul, welcher als R-Modul ein Gitter ist) voll-reduzibel. Die Menge der $a \in R$, für die Γ als Γ^e-Modul a-projektiv ist, heißt das <u>higmansche Ideal</u> von Γ und wird mit $i(\Gamma)$ bezeichnet. Es ist also $\Gamma_{\mathfrak{N}}$ separabel $\Leftrightarrow i(\Gamma) \cap \mathfrak{N} \neq \emptyset$.
Für einen Gruppenring $\Gamma = RG$ (G: endliche Gruppe) ist $i(\Gamma) = (G:1)\cdot R$.
$d(M)$ besteht aus allen $a \in R$, derart, daß $a \cdot \mathrm{Ext}_{\Gamma}(M,X) = 0$ für alle Γ-Moduln X. Ist R dedekindsch und $d(M) \neq 0$, so ist $\mathrm{Ext}^{\nu}_{\Gamma}(M,N)$ kanonisch isomorph zur direkten Summe über alle Primstellen $\mathfrak{p}$ der Lokalisierungen $\mathrm{Ext}^{\nu}_{\Gamma_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}},N_{\mathfrak{p}})$ für alle $\nu \geq 1$.
<u>Bemerkung:</u> In den Vorträgen 3 bis 7 ist R dedekindsch, Γ eine R-Algebra, die als R-Modul ein Gitter ist. M,N bezeichnen stets (R,Γ)-Gitter, d.h., Γ-Moduln, die als R-Moduln Gitter sind. Ferner ist $K = \mathrm{Quot}(R)$.

Jehne, W.: <u>Die lokale Theorie der (R,Γ)-Gitter.</u>

Vorangestellt wird die bekannte Beschreibung von Gittererweiterungen $0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ durch Derivationen ('Bindungsfunktionen') von Γ in $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. Die Gruppe $\mathcal{E}(M,N)$ der Erweiterungsklassen ist isomorph zu $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma^e}(\Gamma,\mathrm{Hom}_R(M,N))$.

Für den Rest des Vortrags sei R ein diskreter Bewertungsring mit Primideal $\mathfrak{p}$. Abkürzend schreiben wir $R_k = R/\mathfrak{p}^k$, $\Gamma_k = \Gamma/\mathfrak{p}^k\Gamma$, $M_k = M/\mathfrak{p}^k M$, usw. .
Ist $\mathfrak{a}$ ein im Jacobson-Radikal eines beliebigen Ringes A enthaltenes Ideal, so folgt aus dem Lemma von Nakayama für endlich erzeugte, projektive A-Moduln P und P', daß sich jeder Homomorphismus $\bar{\varphi} : P/\mathfrak{a}P \longrightarrow P'/\mathfrak{a}P'$ zu einem $\varphi : P \longrightarrow P'$ anheben läßt, wobei Sur- oder Bijektivität von $\bar{\varphi}$ jeweils die entsprechende Eigenschaft von φ nach sich zieht. Diese Bemerkung führt zu der Aussage: Sei $i(\Gamma) = \mathfrak{p}^{k_o}$, $k > k_o$, $\gamma : M_k \longrightarrow N_k$; dann läßt sich

der vergröberte Homomorphismus
$\overline{\varphi}: M_{k-k_0} \longrightarrow N_{k-k_0}$ zu einem $\varphi: M \longrightarrow N$ anheben. Es folgt ein Satz von Maranda: $M \simeq N \Leftrightarrow M_k \simeq N_k$ für ein $k > k_0$. Für den Fall $R = R^*$ (also R komplett) wird gezeigt, daß M reduzibel ist, falls M_k (als (R_k, Γ_k)-Gitter) für ein $k > 2k_0$ reduzibel ist. Dabei benutzt man die eingangs erwähnte Beschreibung von Gittererweiterungen. Aus dem Beweis ergibt sich der Zusatz:
M_k direkt zerlegbar für $k > 2k_0 \Longrightarrow M$ direkt zerlegbar.
Schließlich folgt (da Γ_k artinscher Ring) die Gültigkeit des Satzes von Krull-Schmidt für den Fall $R = R^*$.

Böge, S.: Geschlechter von Gittern. (4)

Sei K ein algebraischer Zahlkörper, R seine Maximalordnung, A eine separable K-Algebra und Γ eine R-Ordnung von A. Es werden (R,Γ)-Gitter M,N,... betrachtet, die in einem festen A-Modul V liegen. Das Geschlecht von M besteht aus allen N mit $M^*_{\mathfrak{p}} \simeq N^*_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p}$. Nach Vortrag 3 besteht diese Isomorphie automatisch für alle $\mathfrak{p} \nmid i(\Gamma)$, und da man nach Vortrag 1 endlich viele Komponenten beliebig vorschreiben kann, gilt für die Anzahl g der Geschlechter

$$g = \prod_{\mathfrak{p}} g_{\mathfrak{p}}$$

wobei $g_{\mathfrak{p}}$ die Anzahl der Isomorphieklassen in $V^*_{\mathfrak{p}}$ ist. Nach Vortrag 3 ist $g_{\mathfrak{p}} < \infty$, da die Ringe $R/\mathfrak{p}^k$ in unserem Falle endlich sind. Also ist $g < \infty$.
Zur Bestimmung der Anzahl der Isomorphieklassen im Geschlecht eines festen Gitters M sei V zunächst A-irreduzibel und D sein Endomorphismenschiefkörper. Man sieht leicht ein, daß N genau dann dem Geschlechte von M angehört, wenn es ein φ in der Idelgruppe I_D von D gibt mit $\varphi M = N$. Ferner ist $N \simeq M$ genau dann, wenn es ein entsprechendes Hauptidel ($\varphi \in D^x$) gibt. Die Anzahl der Isomorphieklassen im Geschlecht von M ist also gleich der Anzahl der Doppelnebenklassen $D^x \varphi U(M)$ $(\varphi \in I_D)$, wobei U(M) die (offene) Untergruppe derjenigen φ bedeutet, für die $\varphi M = M$. Aus der Kompaktheit von I^0/D^x (I^0 = Idele der Norm 1) folgt sogleich die Endlichkeit dieser Zahl. Allgemein folgt sie durch Induktion nach der Länge der Kompo-

sitionsreihe von V unter Berücksichtigung der Endlichkeit von $\mathfrak{X}(M,N)$.

Jacobinski, H.: <u>Darstellungen einer Gruppe von Primzahlordnung über Z. (5)</u>

Hier ist $R = Z$, G eine Gruppe der Ordnung p, und Γ der Gruppenring ZG. Sei K_p der Körper der p-ten Einheitswurzeln, $\mathfrak{v}$ seine Maximalordnung und $\mathfrak{p}$ das über p liegende Ideal von $\mathfrak{v}$. Identifiziert man die Gruppenalgebra QG mit $Q \oplus K_p$, so findet man Γ in der Maximalordung $B = Z \oplus \mathfrak{v}$ wieder und zwar als Urbild der Diagonalen unter der kanonischen Abbildung $B \longrightarrow Z/p \oplus Z/p = \tilde{B}$ (man beachte, daß $\mathfrak{v}/\mathfrak{p} \simeq Z/p$ kanonisch). Die Diagonale von $\tilde{B}$ heiße k ($k \simeq Z/p$), der Kern $Zp \oplus \mathfrak{p}$ der Abbildung $B \longrightarrow \tilde{B}$ werde mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet.
Die (Z,B)-Gitter sind leicht zu klassifizieren. Ist L ein solches, so zerlegt es sich entsprechend der Zerlegung von B in $L_o \oplus L_1$. Reduktion modulo $\mathfrak{f}L$ liefert einen $\tilde{B}$-Modul $\tilde{L}_o \oplus \tilde{L}_1$. L ist durch die Invarianten $\mu = \dim_k \tilde{L}_o$, $\nu = \dim_k \tilde{L}_1$ und die Steinitz-Invariante $c(L_1)$ des $\mathfrak{v}$-Gitters L_1 eindeutig festgelegt.
Einem (Z,Γ)-Gitter M ist auf natürliche Weise ein (Z,B)-Gitter $L = BM$ zugeordnet. Man hat also (Z,Γ)-Teilgitter M von L zu untersuchen, die L über B erzeugen. Das Bild $\tilde{M}$ in $\tilde{L}$ ist durch die Zahlen $r = \dim_k(\tilde{L}_o \cap \tilde{M})$, $s = \dim_k(\tilde{L}_1 \cap \tilde{M})$ und $t = \dim_k \tilde{M} - (r+s)$ bis auf Automorphismen von $\tilde{L}$ eindeutig bestimmt. Es gilt nun der Satz, daß r,s,t und die Idealklasse $c(L_1)$ von K_p ein vollständiges und bis auf die Bindung "$s = t = 0 \Longrightarrow c(L_1) = 1$" unabhängiges Invariantensystem der Isomorphieklasse von M bilden.
Es gibt $2h + 1$ Isomorphieklassen unzerlegbarer (Z,Γ)-Gitter, wobei h = Klassenzahl von K_p.

Behr, H.: <u>Unzerlegbare Moduln über einem Gruppenring.</u> (6)

Sei G eine endliche Gruppe, R der Ring der ganzen Zahlen in einem algebraischen Zahlkörper K. Wir bezeichnen mit $n(RG)$ die Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer (R,RG)-Gitter. Entsprechend: $n(R_{\mathfrak{p}}G)$, $n(R^*_{\mathfrak{p}}G)$ usw. . Für Primzahlen p bedeute G_p eine p-Sylowgruppe von G.

<u>Satz:</u> $n(R_{\mathfrak{P}} G_p) < \infty$ $(\mathfrak{P}|p)$ für alle $p \Rightarrow n(RG) < \infty$.
Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.
I. Sei $R' = \{r \in K | \; r$ ganz für alle $\mathfrak{P} \; |(G:1)\}$. Dann gilt: $n(RG) < \infty \Leftrightarrow n(R'G) < \infty$. Dabei wird die Tatsache ausgenutzt, daß für einen Ring S mit $R \subseteq S \subseteq K$ jedes SG-Gitter durch Koeffizientenerweiterung aus einem RG-Gitter entsteht.
II. $n(R'G) < \infty \Leftrightarrow n(R_{\mathfrak{P}}G) < \infty$ für alle $\mathfrak{P} \; |(G:1)$. Sind M,N R'G-Gitter, so ist N genau dann direkter Summand von M, wenn jeweils $R_{\mathfrak{P}}$ N direkter Summand von $R_{\mathfrak{P}}$ M ist für alle $\mathfrak{P} \; |(G:1)$. Teil (=>) von Aussage II ist trivial, da jedes $R_{\mathfrak{P}}$ G-Gitter aus einem R'G-Gitter "entsteht".
III. $n(R^*_{\mathfrak{P}} G) < \infty \Rightarrow n(R_{\mathfrak{P}} G) < \infty$. Man schließt wie in (II) mit Hilfe des Lemmas, daß N genau dann direkter Summand von M ist (M,N $R_{\mathfrak{P}}$G-Gitter), wenn dies für $R^*_{\mathfrak{P}}$N und $R^*_{\mathfrak{P}}$M gilt. Der Schluß in umgekehrter Richtung funktioniert nicht mehr.
IV. $\mathfrak{P} \,|p$, $n(R^*_{\mathfrak{P}} G_p) < \infty \Rightarrow n(R^*_{\mathfrak{P}} G) < \infty$. Für den Fall R = Z folgt aus dem hier bewiesenen Satz Teil (<=) des Satzes von Heller-Reiner-Jones: $n(ZG) < \infty \Leftrightarrow G_p$ zyklisch der Ordnung $\leq p^2$ für alle p.

Kneser, M.: <u>Der Satz von Heller-Reiner-Jones,</u> (7)

Sei R lokaler Ring zu einem Primideal $\mathfrak{P}$ eines algebraischen Zahlkörpers. Es wird hier bewiesen, daß
<u>Satz:</u> $n(RG) < \infty \Rightarrow n(K^*G_p) \leq 3$ $(\mathfrak{P} \,|p)$.
Falls es sich um den rationalen Zahlkörper handelt, folgt hieraus der noch fehlende Teil des Satzes von Heller-Reiner-Jones. Um die Äquivalenz der in (I) bis (IV) des letzten Vortrages gemachten Endlichkeitsaussagen auch für den allgemeinen Fall zu beweisen, müßte noch gezeigt werden, daß $n(K^*G_p) \leq 3 \Rightarrow n(R^*G_p) < \infty$. Ob dies stimmt, ist (bis auf den rationalen Fall) noch unbekannt.
Zum Beweise des obigen Satzes, sei $n^*(RG)$ die Anzahl der unzerlegbaren RG-Gitter, die auch beim Übergang zur Komplettierung R^* unzerlegbar bleiben. Ein Standardargument mit dem Satz von Krull-Schmidt für R^* zeigt, daß $n(RG) < \infty \Rightarrow n^*(RG_p) < \infty$.
Der Rest des Beweises stützt sich auf folgenden Satz von Dade (in leichter Abwandlung): Sei G eine abelsche p-Gruppe mit $\mathfrak{P} \,|p$, und sei $n(K^*G) \geq 4$. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl n ein unzerlegbares R^*G-Gitter M mit $K^*M \simeq n(K^*G)$

(freier Modul mit n Erzeugenden). Hieraus folgt nun, daß $n(K^*G_p) \geq 4 \Rightarrow n^*(RG_p) = \infty$. Die Voraussetzung "$G_p$ abelsch" ist für uns unwesentlich, da man im nicht-abelschen Fall zur maximalen abelschen Faktorgruppe übergehen kann, welche dann nicht zyklisch ist und deshalb mindestens 4 unzerlegbare Darstellungen über K^* hat. Der Satz von Dade gilt übrigens auch für R,K anstelle von R^*, K^*.

Kunz, E.: Der Satz von Bass-Serre. (8)

In diesem Vortrag ist R noethersch, Γ eine endlich erzeugte R-Algebra, M ein endlich erzeugter Γ-Modul. Wir betrachten das Spektrum X der maximalen Ideale von R. Der f-Rang f(M) von M ist das Maximum der Zahlen n, derart, daß $n\Gamma_x$ (frei vom Range n über Γ_x) direkter Summand der Lokalisierung M_x für alle $x \in X$ ist.

Satz (Bass-Serre): Ist der f-Rang von M größer als die Dimension von X, so ist Γ direkter Summand von M.

Ein System $S = \{s_1, \ldots, s_h\} \subseteq M$ heißt frei und direkt im Punkte x, wenn der von ihnen erzeugte Teilmodul von M_x frei und direkter Summand von M_x ist. Die Menge H(S) derjenigen $x \in X$, in denen S frei und direkt ist, ist offen in X, und ist genau dann gleich X, wenn S einen freien, direkten Summanden von M erzeugt. Ist S frei und direkt in x und S' ein zweites System derselben Länge h und mit denselben Werten (Restklassen mod xM) $s'_i(x) = s_i(x)$ in x, so ist auch S' frei und direkt in x. Alle maximalen, in x freien und direkten Systeme haben die gleiche Länge. Durch Induktion nach $k \geq 0$ wird nun der folgende Satz bewiesen: Sei $F \subseteq X$ abgeschlossen, $\{s_1, \ldots, s_h\} \subseteq M$ frei und direkt auf dem Komplement C(F), und sei k eine Zahl zwischen 0 und f(M)-h einschließlich. Dann gibt es zu vorgegebenen Punkten $x_1, \ldots, x_n \in F$ und Werten $v_1, \ldots, v_n$ $(v_i \in M/xM)$ ein $s \in M$ und eine abgeschlossene Menge $F' \subseteq X$ mit

(a) $\{s_1, \ldots, s_h, s\}$ frei und direkt auf $C(F \cup F')$,

(b) $s(x_i) = v_i$,

(c) $\operatorname{codim} F' \geq k$.

Der eingangs erwähnte Satz folgt als Spezialfall: $F = \emptyset$, $h = 0$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Armbrust, M.: Projektive Moduln - lokal. (9)

R sei ein kompletter, diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Γ sei R-Ordnung in einer separablen K-Algebra, M ein projektives (R, Γ)-Gitter.
Dann ist $M \simeq \dot{n}_1(\Gamma e_1) \oplus \dots \oplus \dot{n}_r(\Gamma e_r)$ mit geeigneten Vielfachheiten n_i, wobei $\{e_i\}$ minimale orthogonale Idempotente von Γ bedeuten. Dies Ergebnis folgt sofort aus dem Satz von Krull-Schmidt, es wurde jedoch auch ein Beweis skizziert, der ohne diesen Satz auskommt.

Puppe, D.: Projektive Moduln - global. (10)

Ist Λ ein artinscher Ring mit Radikal $\mathfrak{w}$, so besteht eine eindeutige Beziehung zwischen den unzerlegbaren projektiven Λ-Moduln $P_1,\dots,P_n$ (direkte Summanden von Λ) und den irreduziblen Λ-Moduln $\overline{P}_1,\dots,\overline{P}_n$: es ist $\overline{P}_i = P_i/\mathfrak{w}P_i$. Bei dieser Basiswahl für die Grothendieckgruppe $P(\Lambda)$ der (endlich erzeugten) projektiven Λ-Moduln bzw. für die Grothendieckgruppe $G(\Lambda)$ aller (endlich erzeugten) Λ-Moduln, wird die kanonische Abbildung $P(\Lambda) \longrightarrow G(\Lambda)$ gerade durch die klassische Cartan-Matrix $c(\Lambda)$ gegeben. Ist $\det c(\Lambda) \neq 0$, so folgt für projektive Moduln P und P': P' und P sind genau dann isomorph, wenn sie dieselben Kompositionsfaktoren haben.
Seien R, K, Γ, X wie in Vortrag 8, Γ außerdem noch R-projektiv, P und P' endlich erzeugte Γ-projektive Γ-Moduln.

I. R lokal mit maximalem Ideal x. Es sei $\det c(\Gamma/x\Gamma) \neq 0$.
   Dann gilt: $K \otimes_R P \simeq K \otimes_R P' \Rightarrow P \simeq P'$.
   Also: $K \otimes_R P$ frei vom Range n über $K\Gamma \Rightarrow P$ frei vom Range n über Γ.

II. R noethersch, $\det c(\Gamma/x\Gamma) \neq 0$ für alle $x \in X$. Ist $K \otimes_R P$ frei vom Range n über $K\Gamma$, so ist P_x frei vom Range n über Γ_x für alle $x \in X$.

III. Dies setzt man mit dem Satz von Bass-Serre zu folgendem Satz über Gruppenringe RH (H: endliche Gruppe) zusammen:
   $K \otimes_R P$ frei vom Range n über $K\Gamma$ mit $n > \dim X \Rightarrow \Gamma$ ist direkter Summand von P.

N.B.: Nach Brauer-Nesbitt ist $c(\Lambda)$ nicht singulär, wenn Λ Gruppenalgebra über einem Körper ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

tom Dieck, T.: Gruppenringe über Dedekindschen Ringen. (11)

Hier ist R wieder dedekindsch. Es sei H eine endliche Gruppe, P endlich erzeugter, projektiver RH-Modul. Es wird vorausgesetzt, daß K die Charakteristik 0 hat.

Satz: Ist 1 das einzige Element von H, dessen Ordnung Einheit in R ist, so gibt es eine Zerlegung $P \simeq F \oplus P_0$ mit F frei über RH und P_0 projektives Linksideal von RH.

Mit Hilfe der Ergebnisse von Vortrag 10 folgt dies aus dem Satz, daß (unter denselben Voraussetzungen über Einheiten) $K \otimes_R P$ über KH frei ist. Dieser folgt wiederum aus einem Satz über die kanonische Abbildung $\lambda : P(RH) \longrightarrow G(KH)$ der projektiven Grothendieckgruppe von RH in die volle Grothendieckgruppe von KH (N.B.: alle unsere Moduln sind endlich erzeugt). Es gilt nämlich für KH-Moduln M mit zugehörigem Charakter χ_M : $M \in \mathrm{Bild}(\lambda) \Leftrightarrow \chi_M(g) = 0$ für alle $g \in H$, deren Ordnungen Nichteinheiten von R sind. Es wurde nur Teil (=>) dieses Satzes bewiesen, da er ja zum Beweis der obigen Sätze ausreicht.