Mathematisches Forschungsinstitut Cberwolfach



14

Tagungsbericht

Funktionalgleichungen

vom 5. - 10. Juli 1965 (3. Tagung)

1) Vom 5. bis 10. Juli 1965 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Öberwolfach die dritte Tagung über Funktionalgleichungen unter der Leitung der Professoren J. AZÉL (Debrecen-Köln), O. HAUPT (Erlangen) und A.OSTROWS-KI (Basel) statt.

Eröffnet wurde die Tagung mit der Begrüßung durch Herrn Professor HAUPT. Sodann nahm Herr OSTROWSKI den 70. Geburtstag von Herrn MAIER zum Anlaß, um kurz auf das bisherige Werk dieses Gelehrten insbesondere aus dem Gebiet der speziellen Funktionen und Funktionalgleichungen hinzuweisen. Anschließend begannen die Vorträge.

Wie bei der letzten Tagung kam zunächst wieder der Problemkreis der Abelschen Funktionalgleichung zur Sprache: diesmal aber handelte es sich vor allem um die Frage der Eindeutigkeit der Lösung sowie um die damit zusammenhängenden Probleme der stetigen Iterierten. Letztere Probleme wurden in einigen späteren von der Abelschen Gleichung unabhängigen Vorträgen weiter verfolgt. Ein Leitmotiv anderer Vorträge kann durch die Stichworte Funktionalgleichungen über Vektorräumen und Algebren gekennzeichnet werden. Daneben kamen diesmal auch Funktionaldifferentialgleichungen und Funktionalgleichungen für Distributionen und Mengenfunktionen zur Sprache. Andere Vorträge legten erneut beredtes Zeugnis ab von der Fülle der Beziehungen, die sich von der allgemeinen Fragestellung der Tagung zu den verschiedensten anderen Gebieten spannen.

Bei der Tagung von 1963 waren ungelöste Probleme in einer Liste zusammengefaßt worden. Erfreulicherweise konnte diesmal einem Bericht über den Stand dieser Probleme entnommen werden, daß eine ganze Anzahl von ihnen inzwischen teilweise oder vollständig gelöst worden sind und zu neuen Problemstellungen Anlaß gegeben haben.

2) Die diesjährige Tagung wurde auch deshalb für die Teilnehmer eine Quelle reicher Anregungen, weil eine Reihe neuer Fragenkreise zur Behandlung kamen. Auch für das nächste Jahr ist schon mit vielen neuen Ergebnissen und



Ta the term of the second of t

1) The state of the Matter County of the State of the State of the Server of the State of the St

in the second of the edging mit our Begrateming dered to see desired F. F. . Indemn the configuration for the second form of the second management of the second desired of the special feature and Fundament for the second management that summing the second management that seed the second management that summing the second management that seed the second management that second management that seed the second management that seed the

we distoll to the EMA unëdhat di der di dovedide di det di tadhënu the property of the Cambridge of the Cam sch vi Furl tion i iller of the Friedrich and the state of t in cinigo colter — ob do — cohen gleichee - per de la la la la la compania de la compania del compania del compania de la compania del compania del compania de la compania de la compania de la compania de la compania del compania ngarth - Herrichte attender bei betrev bil lurch dis stief bern Bunk-Janalgietchussys War schurzu. Od 20 society school de character of the contract of the contrac cueben kamen dien in tentral oldin ette et en en et einen. gleichtungen für Dietu und and Ikongen der der ihreit undere Vouträge lette er et berøde regnicable of the deal Book and deal of sich der eine einer einer eine der Engung en den erhiedensten. onnege to the transfer

ed o gun de de la lance de la completa del completa de la completa de la completa del completa de la completa della completa de la completa del la completa de la completa del la completa de la completa

ture i ante protectio. To the character of the character of the comment is the comment of the co

Methoden auf unserem Gebiet zu rechnen; daher ist auf unsere Anregung hin von der Institutsleitung für Juni 1966 die vierte Tagung über Funktionalgleichungen vorgesehen.

3) Es ist erfreulich, daß so viele der Eingeladenen trotz mancher administrativer Schwierigkeiten kommen konnten. Insgesamt waren 18 Teilnehmer anwesend, davon 14 aus dem Ausland, und zwar 2 Amerikaner, 1 Franzose, 1 Israeli, 1 Jugoslave, 1 Kanadier, 2 Polen, 1 Schweizer und 5 Ungarn. Die Teilnehmer waren die folgenden:

Teilnehmer:

₩

Aczél, J. Debrecen, Ungarn; z. Zt. Köln) Coifman, R. Tel Aviv, Israel, Genf, Schweiz Eichhorn, W., Würzburg Fenyó, I., Budapest, Ungarn; z. Zt. Rostock Haupt, O., Erlangen Henney, D., Washington, USA Hosszú, M., Miskolc, Ungarn Kárteszi, F., Budapest, Ungarn Kiesewetter, H., Rostock Kucharzewski, M., Katowice, Polen Kuczma, M., Katowice, Polen Kurepa, S., Zagreb, Jugoslawien Maier, W., Jena M^cKiernan, M.A., Waterloo, Canada Meynieux, R., Clamart, Frankreich Ostrowski, A., Basel, Schweiz Thiesman, H.P., Alexandria, USA Vincze, E., Miskolc, Ungarn

4) Kurzfassungen der Vorträge sowie die Problemstellungen und Bemerkungen folgen (getrennt voneinander) in chronologischer Reihenfolge.

A Vortragsauszüge:

MAIER, W.: Abbau singulärer Linien.

Für abc \neq 0, s \neq 1, 2, ∞ bilde man mit Riemann's ζ -Funktion die Lösung des Systems

(1)
$$V(a,b) = e^{S} V(ca,cb) = V(b,a) =$$

(?) =
$$V(a, a+b) + V(b, a+b) + (a+b)^{-S} \zeta(s)$$
.

Mit b/a = ω und | arc ω | < π ist $V(1,\omega)$ in ω analytisch und in s meromorph. Die Halbachse ω < o ist dann eine singuläre Linie von $V(1,\omega)$ = $V(\omega)$ und das Näherungsverhalten bei rationalen p/q < o kann nach Kluyver analysiert werden. Es müssen dazu außer $V(\omega)$ weitere analytische Funktionen und





Madaden a service the entrept of readhert dates our auf pose of a raway him a war to read the service of the se

.) enth of the document of the himselettern trots madeling educitions alvertive to the enth of the control of the contr

Element T

erdi, T. Debruer , Ungarne Zt. Költt Laimar, i. Tel Aviv, Israel, saf, Scrweiz almera, V., Maraburg Sund L. Padapent, Therem: v. Zt. Cartoci mora mil ... D de n'E More great and that the protected Karrenne II., Judapeut, bas. : polani. Li pomensi Cook out of the Kenty of the Lorenteen Transport of the Control of the Control $\alpha \otimes$ many that they will wien $\operatorname{pro}_{\mathbb{R}^{n}}(A, X_{n}^{n}, X_{n}^{n})$ shere's codesasWille. All wise of Wats memorial type and the programmed · 中国的一位,"辩论"。这一点是一种形

-morano S ban applicational con Foreign of the Market and Same un-

in in the second section in the section in the

MATERIAL CONTRACTOR OF THE STREET

$$\gamma_{A} \gamma_{A} \gamma_{A$$

if we provide a sum of the state of the sta





deren Funktionalgleichungen berücksichtigt werden. Während $V(\omega)$ in einer geschlitzten Ebene existiert, können ihr eindeutig automorphe Funktionen einer ω -Halbebene zugeordnet werden, mit $\omega < \infty$ als natürlicher Grenze.

Es sei f(x) eine in einem Intervall (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, konkave Funktion, so daß a < f(x) < x in (a,b), f'(x) > o fast überall in (a,b) und $\lim_{x\to a+o} f'(x) = 1$. Dann besitzt die Abelsche Funktionalgleichung A[f(x)] - A(x) = 1 eine bis auf eine additive Konstante einzige konvexe Lösung in (a,b). Daraus ergibt sich auch, daß f(x) eine einzige reguläre Iterationsgruppe zuläßt.

CCIFMAN, R.: On the unicity of solutions of the Abel-Schröder functional equations.

We say that the continuous function ϕ is regular-A at b if the limit

$$\lim_{x\to+0} \frac{\varphi(\lambda x+b) - \varphi(x+b)}{\varphi(\lambda x+b) - \varphi(x+b)}$$

exists for every $\lambda > 0$, (λ_0) is fixed). Let f be a continuous increasing function defined for $x \in [0,a_0]$ such that 0 < f(x) < x, $x \ne 0$. We have the following theorem: The necessary and sufficient condition for the functional equation

$$f(\phi(x)) = \phi(ax-1), \quad o < a \le 1$$

to possess a solution regular-A at 1/(a-1), is that the limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(a_0)}{f_{n+1}(a_0) - f_n(a_0)} = A(x)$$

exists and that A is a continuous monotonic function. Morever the regular-A solution such that $\varphi(a_0) = \alpha_0$ is unique.

<u>KARTESZI, F.:</u> Über die Funktionalgleichung f(g(x)) = g(f(x)) und die Thomsen-Bedingung.

Es wurde eine allgemeine elementare und anschauliche Methode für die Betrachtung der Funktionalgleichung f(g(x)) = g(f(x)) gezeigt (mit einigen von didaktischem Standpunkt aus interessanten Beispielen).





is a Figure (frichts) a resticistiff worden, Chirche Con en Aner je shitzte Guera and and the free object of a consumple to early the interest well nor each of the constitution of the co

restal callinging as a second constant of the second constant of the

Marketing average of the first state (1.49 to 1.50 to

ense (15, 15, 15, 15) and the first of the f

: 1 1777 . . : the unicity of selections of the land of selections.

The eventual continuous function and a second since it the limit

10 - 10 - (d + x 1) med 1 - 2) n - (d + x 1) c + c

established to the second of t

200 (2) (2) = ((2)):

THE CONTROL OF THE STATE OF THE

 $(x) = \frac{\sqrt{2}}{C}$

Topics.

Nation of the state of the stat

6 in how (6 in a (6)); it as also to stand to the configuration of the c

and the spin shape f(x) = f(x) = f(x) = f(x) = f(x) and f(x) = f(x)

MICHEL, H.: Über k-te Wurzeln von Permutationen beliebiger Mengen; Bericht von M. KUCZMA.

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine Permutation P auf einer beliebigen Menge eine k-te Wurzel, also eine Permutation C mit C = P besitzt. Weiter wird erörtert, wie man jede Permutation in eine, in gewissem Sinne maximale Strömung von Permutationen einbetten kann. Jede solche Strömung läßt sich als Lösung der Translationsgleichung interpretieren.

McKIERNAN, M.A.: Two functional equations arising from parameter invariant variational problems.

In a second order variational problem $\int L\{x^i, \dot{x}^i, \dot{x}^i\}dt$, the parameter invariance leads to the functional equation

$$L\{x^{i}, \lambda \dot{x}^{i}, \lambda^{2} \dot{x}^{i} + \mu \dot{x}^{i}\} = \lambda L\{x^{i}, \dot{x}^{i}, \dot{x}^{i}\}$$

for $\lambda>0$ and all μ . The derivative with respect to λ and μ , evaluated when (λ,μ) = (1,0) implies the Zermelo conditions

$$\begin{cases} L_{\dot{x}}\dot{x}^{\dot{i}} + 2L_{\dot{x}}\dot{x}^{\dot{i}} = L \\ \dot{x}^{\dot{i}} & \dot{x}^{\dot{i}} = L \end{cases}$$
 (summation on $i = 1, ..., n$).
$$L_{\dot{x}}\dot{x}^{\dot{i}} = 0$$

In the general problem with derivatives of order up to m, the Zermelo conditions read

$$\sum_{r=p}^{m} \frac{r!}{(r-p)!} \frac{\partial L}{\partial x} \qquad x = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq p \leq m \\ L & \text{if } p = 1 \end{cases}$$

It is shown these conditions are also sufficient. (Euler's equation if m=1). The analogous problem for multiple integral problems is also discussed

KUCHARZEWSKI, M.: Funktionalgleichungen, die in der Theorie der linearen homogenen geometrischen Objekte auftreten

Die Bestimmung aller linearen homogenen geometrischen Objekte kann man auf die Bestimmung aller Lösungen der Funktionalgleichung

(1)
$$F(A) \cdot F(B) = F(A \cdot B)$$

zurückführen, die die Bedingung

$$(2) F(E) = e$$

erfüllen. F bzw. A sind quadratische nichtsinguläre Matrizen der Ordnung





. M. (1812) The condition with the Pire elation of the continue of the continu

The stands of series and series and series are supplied to the series of the series of

reforming more paints, another the companies of the state of the state

(no como dereje de la comentencia de la la la la la la esparameta de la comunicación de l

A Policy of the Dog Constitution of the Consti

afficiency for the contraction of the specific property of the contraction of the contrac

, ele la literatura de la color el production de la composición de la color de la color de la color de la color La color de la

restricted to the state of the

$$(1) \quad = \quad w(x) \cdot F(x) \cdot F(x) = 1$$

gas of the Market and and

$$x_i \mapsto (C_i)^{n_i}$$

The state of the property of the control of the same of the same of the control o

m bzw. n und E bzw. e Einheitsmatrizen entsprechender Ordnung. Die Lösungen von (1) wurden ohne irgendwelche Regularitätsvoraussetzungen im Falle $m \leq n$ bestimmt. – Das Klassifikationsproblem der geometrischen Objekte führt zur folgenden Funktionalgleichung

(3)
$$G(s, A) = H(F(H^{-1}(s); A)),$$

wobei G bzw. F gegebene Funktionen sind und H eine gesuchte Funktion ist. H muß überdies umkehrbar sein. Die Funktionalgleichung (3) ist bisher nicht gelöst. Man kann aber eine Methode angeben, mit deren Hilfe man in gewissen Fällen wenigstens eine Lösung von (3) finden bzw. zeigen kann, daß (3) keine Lösung besitzt.

THIELMAN, H.P.: Functional equations involving derivatives

The equation

(1)
$$f^{(r)}(x) = af(g(x)),$$

where r indicates differentiation, is considered. Special cases are treated. It is shown that if g(x) is its own inverse, for example g(x) = b/x, or g(x) = -x+c, then equation (1), which is known as a hystero-differential equation, can be reduced to an ordinary differential equation of order 2r, possibly with variable coefficients. In case r = 2, and g(x) = b/x, equation (1) can be reduced to a fourth order ordinary differential equation of the Euler type with two boundary conditions.

ACZÉL, J.: Funktionalgleichungen in Topologie und Graphentheorie

1) In Analogie zum topologischen Abschlußaxiom von Monteire wird es untersucht, unter welchen Bedingungen in abelschen Halbgruppen mit Einselement

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
 and $f^{2}(x) = f(x)$

aus

$$x + y + f^{2}(x) + f^{2}(y) = f(x+y), f(0) = 0$$

folgen (Gegenbeispiel zeigt, daß das nicht immer der Fall ist).

2) In Analogie zum Satze, daß in endlichen vollständigen gerichteten Graphen es Eckpunkte gibt, aus denen alle andere durch Wege erreichbar sind, wird es untersucht, unter welchen Bedingungen für Lösungen der Translationsgleichung f(f(x, u), v) = f(x, u+v), $u, v, u+v \in U$, $x, f(x, u) \in X$ die Existenz eines $x \in X$ mit $f(x \in V) = X$, aus dem Bestehen von $y \notin f(x, U) \Rightarrow x \in f(y, U)$





A CONTROL OF THE STATE OF THE S

$$\chi \left(\left(+ \frac{1}{2} \right)^{3/2} W(x) + \frac{1}{2} \chi \left(- \frac{1}{2$$

The state of the s

and the first begin value and the grappe flag. He is a state of the first of the

es la composition

$$f_{ij} = f_{ij} + C_{ij} + C_{ij} + C_{ij}$$

In random we have a constant of the property of the property

Same timed and the employed and respectively of the employed and the first of the employed and the first of the employed and the employed and

$$-(\mathbf{x})\mathbf{j}_{-\mathbf{x}}\cdot(\hat{\mathbf{x}})$$
 . The $-(\mathbf{x})\mathbf{j}_{-\mathbf{x}}$

. .:

and the first of the second of the second

(ter the concrete and when the come, and function dieself) the life

The control of the co



für alle $x, y \in X$ folgt. - Anschauliche Deutung und geometrische Anwendung.

EICHHORN, W.: Über die multiplikativen Abbildungen endlichdimensionaler Algebren in kommutativen Halbgruppen

Gegeben sei die multiplikative Abbildung $f: A \rightarrow H$ (H eine multiplikative kommutative Halbgruppe).

SATZ 1. Ist A einer direkten Summe von vollen Matrixalgebren über einem beliebigen Körper K isomorph, so besitzt f die Gestalt

(1)
$$f(x) = m_1(v_1(x))m_2(v_2(x))...m_s(v_s(x)),$$

wobei die m_{σ} (σ = 1,...,s) multiplikative Funktionen von $\nu_{\sigma}(x)$, den irreduziblen Teilern der allgemeinen (generischen) Norm (vgl. Jacobson, Osaka Math. J. 15 (1963), 25-50) des allgemeinen Elements

 $x = \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_{n-1} e_{n-1}$ von A sind (e_0 = Einselement von A, $v_\sigma(e_0) = 1$). Alle Abbildungen der Art (1) sind multiplikativ. - Die Voraussetzung des Satzes ist z.B. in jeder halbeinfachen assoziativen Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K erfüllt.

SATZ 2. Ist A die Algebra der Quaternionen oder der Caylewschen Zahlen über einem pythagoräischen Körper (vgl. Weyl: Classical Groups, Princeton 1946, S.13), so gilt

$$f(x) = f(|x|)$$
 $(|x| = \sqrt{\frac{n}{i-1} \xi_i^2}, k=3 \text{ bzw. 7}).$

- Hieraus folgt die Lösung des Problems von Olga Taussky: f(x) = |x| ist die einzige Bewertung der reellen Quaternionen oder Cayleyschen Zahlen, für die f(2) = 2 ist.

SATZ 3: Unter allen endlichdimensionalen assoziativen (bzw. nichtassoziativen alternativen) Algebren mit Einselement e über dem reellen Zahlkörper R ist die Algebra der reellen Guaternionen (bzw. Cayleyschen Zahlen) die einzige, die eine Eigenschaft der folgenden Art besitzt: Für jede multiplikative Abbildung f der Algebra in die reellen Zahlen R gilt

$$f(x) = f(\tau_f(x))$$
 mit $\tau_f(x) > 0$ für $x \neq 0$ $(\tau_f(x) \in \mathbb{R})$.

GÁSPÁR, GY.: Die Charakterisierung der Determinanten n-ter Ordnung der Dimension p mittels Funktionalgleichungen; Bericht von E. Vincze





on olle of a lost for the Ansobostiche Houtenage Met i gmet took of ovene

(2) CHIIO 2.V. アーロー but its required to the end of the configuration of the configuration is a three configuration in the configurati

graph (1) (a) that is the state of the superfluid and superfluid the superfluid that is the superfluid that it i

The state of $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$. Here, we shall state of the st

Lyber on the f(t) and momentum as with distinguish f(t) and f(t) and

The Control of the Co

of the second of the modern second distribution of the second of the sec

A TEXTS of the state of the constant property of the state of the stat

(x) = (x)

(2) The state of the Proposition of the conformation of the state of the conformation of the conformati

The state of the s

 $A = A \left(\left(Q_{q} \sigma^{2} - \left(\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + \left$

and the marker of managers of cologists to the cologists of the colorisation of the cologists of the cologis

Es sei $R = \{a,b,\ldots\}$ ein Integritätsbereich der Charakteristik Null. Das System der n^p Elemente $a_{1}\alpha_{2}\ldots\alpha_{p}\in R$ $(\alpha_{i}=1,2,\ldots,n;\ i=1,2,\ldots,p)$ nennt man eine Matrix n-ter Ordnung der Dimension p über R und bezeichnet sie: $A^{(p)} = [a_{1}\alpha_{2}\ldots\alpha_{p}]$. Das System $R_{n}^{(p)}$ der Matrizen $A^{(p)}$, $B^{(p)}$, ... bildet ein Modul. Zu diesem Modul kann man die Elemente von $R_{n}^{(2)}$ in mehrfacher Weise als Operatoren anwenden:

$$[m_{rs}^{(i)}][a_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_p}] = [\sum_{\mu} m_{r\mu}^{(i)} a_{\alpha_1...\alpha_{i-1}\mu\alpha_{i+1}...\alpha_p}]$$

$$\begin{bmatrix} a_{1}\alpha_{2}\dots\alpha_{p}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{rs} \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i} a_{1}\dots\alpha_{n-i}v\alpha_{n-i+2}\dots\alpha_{p} \\ v \end{bmatrix}.$$

SATZ: Ist $\Phi^{(i_1,\ldots,i_{2q})}$ eine Abbildung von $R_n^{(p)}$ in R, die den nachstehenden Forderungen genügt:

(I)
$$\Phi^{(i_1,\ldots,i_{2q})}(A^{(p)}+B^{(p)}) = \sum_{i=1}^{q} (i_1,\ldots,i_{2q})(C^{(p)}),$$

(II)
$$\Phi^{(i_1, \dots, i_{2q})}([m_{rs}^{(i\lambda)}]A^{(p)}) = |[m_{rs}^{(i\lambda)}]|\Phi^{(i_1, \dots, i_{2q})}(A^{(p)})$$

$$(1 \le \lambda \le q),$$

$$\Phi^{(i_1,\ldots,i_{2q})}(A^{(p)}[m_{rs}^{(i\lambda)}]) = \Phi^{(i_1,\ldots,i_{2q})}(A^{(p)})[m_{rs}^{(i\lambda)}]$$

$$(q+1 < \lambda < 2q),$$

(III)
$$\Phi^{(i_1,\ldots,i_{2q})}(E_q^{(p)}) = 1$$
,

wobei in (I) die Summenbildung auf sämtliche Blattkombinationen nach irgendeinem Index auszudehnen ist, ferner $|[m_{rs}^{(i_{\lambda})}]|$ gewöhnliche Determinante von $[m_{rs}^{(i_{\lambda})}]$ ist - so ist

die Determinante n-ter Ordnung der Dimension p von A^(p) nach den Indices a_1, a_1, \ldots, a_1 .





where h is the property of the context of the context of the x the x the x context of the context of x . The x is the x context of x and x is the x context of x .

ai (8) ai (a) a company of the second of th

$$\frac{\mathcal{L}(t)}{(1+\epsilon)^{2}} = \frac{\mathcal{L}(t)}{(1+\epsilon)^{2}} = \frac{\mathcal{$$

-x. The a subsymbol ϵ $\frac{(c)}{a}$ is now examine they are $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ and $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ and $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ and $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ in the following $\frac{(c)}{a}$ is the following $\frac{(c)}{a}$ in the foll

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}$$

$$(x_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}$$

$$\sqrt{\phi^{+} \geq -\frac{1}{2} - i \phi^{3}}$$
.

$$\mathbf{x} = \left(\frac{(\gamma)}{\gamma} \mathbf{w}\right) \left(\mathbf{y}^{-1} \dots \mathbf{w}^{-1}\right)$$

$$(37)$$

v = i t in (1) The least case of the final one of the constant of the constant and the constant of the cons

 $\operatorname{Lob}(x) = \frac{(e^{-1})^{-1}}{e^{-1}} = \operatorname{Low}(x) + \operatorname{Low}(x) = \operatorname{Low}(x) + \operatorname{Low}(x) = \operatorname{Low}(x) + \operatorname{Low}(x) = \operatorname{Low}(x) + \operatorname{Low}(x) = \operatorname$

MEYNIEUX, R.: Conditions suffisantes de différentiabilité pour certaines solutions d'équations fonctionnelles

Soient: q, 1, m, n entiers ≥ 1 ; \wedge ouvert de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$; U (resp. V, W) image de \wedge par l'application (u, v) \rightarrow u (resp. v, u+v); $X = \mathbb{R}^1$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^n$; x (resp. y, z) application continue de U dans X (resp. V dans Y, W dans Z); D ouvert de $X \times Y$, tel que $[x(u); y(v)] \in D$ pour tout $(u, v) \in \wedge$; ϕ application continument differentiable de D dans Z.

HYPOTHÈSES: 1) $(u, v) \in A \Rightarrow \emptyset[x(u), y(v)] = z(u, v)$.

2) Cuels que soient $a \in U$ et l'ouvert $V' \subset V$ tels que $\{a\} \times V' \subset \Delta$, on a $\eta \in y(V')$ Ker $(\phi^{\eta})_{\xi_0}^* = \{0\}$, où $\xi_0 = x(a)$ et où $(\phi^{\eta})_{\xi}^*$

désigne la différentielle en ξ (application linéaire de R^1 dans R^n) de la fonction partielle ϕ^{η} définie par l'égalité $\phi^{\eta}(\xi) = \phi(\xi, \eta)$.

CONCLUSION: 1) x est continument différentiable dans U.

2) z est continument différentiable dans W.

TAUSSKY, O.: A determinantal identity for quaternions and a new eight square identity; Bericht von W. Eichhorn

THEOREM 1. Let ξ_1 , ξ_2 , η_1 , η_2 be four real quaternions with $\xi_1 \neq 0$. Let X be the matrix

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$$
.

Define $\det X = -\xi_1 \eta_1 \xi_1^{-1} \xi_2 + \xi_1 \eta_2$. Then $\det X \cdot \overline{\det X} = \det XX^*$.

By \overline{c} is understood the quaternion conjugate to α . By X* is understood the transposed and conjugate matrix. Note that $\overline{\det X} \neq \det X^*$. - It follows:

THEOREM 2. Let x_1, \ldots, x_8 ; y_1, \ldots, y_8 be two sets of indeterminantes. Assume that all of x_1, \ldots, x_4 are zero. Then the following identity holds:

$$\sum_{1}^{8} x_{i}^{2} \sum_{1}^{8} y_{i}^{2} = \sum_{i=1}^{4} [F_{i}(x_{j}, y_{k})]^{2} + \sum_{i=5}^{8} [R_{i}(x_{j}, y_{k})]^{2}.$$

(P_i bilinear polynomials of x_j , y_k ; R_i fractional expressions of x_j , y_k).

VINCZE, E.: Über einige assoziative Funktionen

Es wurden die Lösungen der folgenden Gestalten (I)-(III) von Assoziativitätsgleichung F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)] untersucht und bestimmt (ohne irgendwelche weitere Voraussetzungen für die vorkommenden Funktionen):





1. 1.2

Solutions d'équations de différentiabilit pour cert inus solutions d'équations fonctionnelle.

Solution of the archives ≥ 1 ; is caveride of $q \in \mathbb{N}$ to (x,y), in a principal condition $(x,y) \in \mathbb{N}$ (susp. \mathbf{v} , $\mathbf{u}+\mathbf{v}$); if $\mathbf{v} \in \mathbb{N}$, the set of application continued of \mathbf{U} dates $\mathbf{v} \in \mathbb{N}$ tunk $\mathbf{v} \in \mathbb{N}$ then $\mathbf{v} \in \mathbb{N}$ to $\mathbf{v} \in \mathbb{N}$ to

 $\langle c(\mathcal{G}(z))^2 \rangle \otimes v_i$: $\langle v_i \rangle (v_i + v_j) \Rightarrow o[\langle x(z), y(v) \rangle] = z(v_i, v_j)$.

is an soiont a $\in \mathbb{U}$ of \mathbb{F} on \mathbb{V}' of \mathbb{V} on \mathbb{V}' of \mathbb{V}' tells quot $\{a\} \times \mathbb{V}' \subset \mathbb{F}, \ \{a\} \times \mathbb{V}' \subset \mathbb{F},$

of ign is differed in a complement of the second stand of the second stand of the second standard of the second of

TAUDSAND to the content of dimensional and the less than the property of the second against the property of the second against the second against

TO BE A STATE OF THE STATE OF THE POST TOOL THE STATE OF THE STATE OF

$$= \left(\begin{array}{cc} \underline{S}^{(1)} & \underline{A}^{(2)} \\ \underline{A}^{(2)} & \underline{A}^{(2)} \end{array} \right)$$

Define deriver $\{Y_1, \dots, Y_{k-1}, \dots, Y_{k$

The state police and the second of the first the second own and the second of the seco

remerblim Tavischauser zeinier ad Carlas SSC 1917

v = v and v = vv the fibrary and down beginning George (1) and v = vv and v = vv and vv = vv to vv = vv vv = vv

- (I) $F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(y) \quad (n \le 2; \text{ für } n > 2 \text{ ist es ein ungelöstes Problem}), \text{ wobei } x,y,g_i(x),h_i(y) \text{ in einem beliebigen Körper K der Charakteristik Null liegen;}$
- (II) F(x, y) = G[g(x), h(y)] (alles ist reell), mit den Eigenschaften für G(u, v): G(uv, w) = G(u, w)G(v, w) und G(w, u+v) = G(w, u)G(w, v);
- (III) $F(x, y) = f^{-1}[g(x) * h(y)]$, wobei x, y, F(x, y) Elemente einer Halb-gruppe C sind, die Operation * eine beliebige (nicht-kommutative) Gruppenoperation ist und f^{-1} eine umkehrbare Funktion bezeichnet.
- ACZÉL, J.: Bericht über den Stand der 23 "1963-er Oberwolfacher Funktionalgleichungsprobleme".

Folgende Probleme sind teilweise oder vollständig gelöst worden (Nummerierung wie in Archiv d. Math. 15 (1964), 435-444):

- 21. (Homomorphismen der multiplikativen Gruppen von Algebren): Teilergebnisse (insbesondere über Quaternionen und Cayleyschen Zahlen) wurden von W. Eichhorn gefunden (Habilitationsschrift und Journal f. reine u. angew. Math. 1966).
- 19. (Allgemeine Lösung von F(XY) = F(X)F(Y), wo X, Y n-dimensionale, F(Z) m-dimensionale Matrizen sind); Lösung bzw. Reduktion für $m \le n$ wurde von M. Kucharzewski und A. Zajts gefunden (Annales Polon. Math. 1967).
- 14. Aus f(x+y) = f(x) + f(y) fast überall (im Sinne des ebenen Lebesgue-Masses) folgt $f(x) = f_0(x)$ fast überall (im Sinne des linearen Lebesgue-Masses) wo $f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y)$ überall; bewiesen von W.B. Jurkat (Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965)) und N.G. de Bruijn (unpubliziert).
- 13. Aus f(x+y) = f(x) + f(y) (überall) und $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$ ($x \neq 0$) folgt f(x) = cx (überall); bewiesen von W.B. Jurkat (ebenda), und S. Kurepa (Glasnik Mat. Fiz. Astron. 19 (1964), 23-36) und R.O. Davies (unpubliziert).
- 5. (Unter welchen Bedingungen folgt aus der Konvexität von f die aller reellen Iterierten f^{S}); Teilergebnis: A. Smajdor (Archiv d. Math. 1966) hat ein Beispiel gegeben, wo die $\frac{1}{2}$ -te Iterierte einer konvexen Funktion





- (1) $\mathbb{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = v(x, y)$ (v) $(n \le 2)$ für $n \ge 2$ in (s = s) in unpolisated Proba-
- The interest of x_i, y_i is singular multiplication of the i compared to x_i . Characteristic is all linguing
- (H) $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{N}[\chi(\mathbf{x}), h(\mathbf{y})] = (albert 1) = (b, \mathbf{y}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}, \text{ and } \mathbb{N}[\chi(\mathbf{x}), h(\mathbf{y}, \mathbf{y})] = (a, \mathbf{y}) = (b, \mathbf{y}, \mathbf{y}) = (a, \mathbf{y}$
- (iii) $F(x,y) = f^{-1}$; i.e. f(y), we set $f(x,y) = f^{-1}$. From the set $f(x,y) = f^{-1}$; i.e. $f(x,y) = f^{-1}$; the set $f(x,y) = f^{-1}$; and $f(x,y) = f^{-1}$; and f(x,
- ACT is a Soutch fibor discrete and the substance of the substance of the consideration of the consideration of the substance of the substance
- je med sisch bestehnt, im der eller voll (F. d. gelöst worden Federmadiereme wie im Auchde d. Mode, a. v. 183), 23: 1.4):
- 21. () a morable man dense of substitute (fruspen versible and (a,b): Table 2 of each (a,b): Some set of the standard of the substitute of the substit
 - 19. (Highmoins Lösus teach $\mathbb{P}(N, \varepsilon) = \mathbb{P}(\mathbb{Y}) \mathbb{P}(\mathbb{Y})$, wo $\mathbb{P}_{\varepsilon} \mathbb{Y} \times \mathbb{P}(\mathbb{Y})$ and the pricase functional of a riseas play); whomat the teacher is the first variety variate variation of L, \mathbb{Z} after $\mathbb{P}^{n_{\varepsilon}} \times \mathbb{P}(\mathbb{P})$ and L, $\mathbb{P}^{n_{\varepsilon}} \times \mathbb{P}(\mathbb{P})$ and L, $\mathbb{P}^{n_{\varepsilon}} \times \mathbb{P}(\mathbb{P})$ and L, $\mathbb{P}^{n_{\varepsilon}} \times \mathbb{P}(\mathbb{P})$ and $\mathbb{P}(\mathbb{P})$ a
 - 1. If $(x_1 + f(x) + f(x) + f(x))$ fast aboral (in that the disciplination $x_1 + x_2 + \dots + f(x) + f(x) + f(x)$ fast aboral (in then see Figure 1, $(x+y) = f_0(x) + f_0(y)$ about $f_0(y) = f_0(x) + f_0(y)$ about $f_0(y) = f_0(y) + f_0(y) = f_0(y)$ and $f_0(y) = f_0(y) + f_0(y) = f$
 - 78. Cum fix of vital f(y) (Oberall) until $\frac{2}{N}$ if the fixed order of f(x) and it. Carepo f(x) and it. The constant f(x) and it. Carepo (Chambe fixed in Fig. 4 at constant).
 - In (This providence of decomposition of the second constant of the second of the second $\frac{d^2}{dt^2}$), with regularist at Siman for the second $\frac{d^2}{dt^2}$, which is the second second $\frac{d}{dt^2}$, itemization in the second constant of the second s





nicht konvex sein kann.

4. Gelöst von J. Aczél und G. Pickert: Es gibt angeordnete Gruppen auf Teilmengen der Menge der reellen Zahlen, die nichtkommutativ sind, aber es gibt nicht solche auf der Menge aller reellen Zahlen (Archiv d. Math. 1966).

OSTROWSKI, A.: Über die Konvergenzverhältnisse beim Gradientenver-

Es wurde das besagte Verfahren in der Form angesetzt: $\xi_{\nu+1} = \xi_{\nu} - t \lambda_{\nu} \psi_{\nu}$ ($\nu = 0, 1, \ldots$), wobei F'(ξ_{ν}) = $\kappa_{\nu} \phi_{\nu}$ der Gradient von F(ξ) in ξ_{ν} und κ_{ν} der Betrag von F'(ξ_{ν}) ist. ψ_{ν} ist ein Einheitsvektor, der mit ϕ_{ν} einen Winkel $\leq \frac{1}{2}\pi - 2\gamma$ bildet. Unter geeigneten Voraussetzungen kann bewiesen werden, daß $\Sigma \kappa_{\nu}^{2}$ konvergiert. Wenn ξ_{ν}^{2} nicht konvergiert, so ist die Menge der Häufungsstellen der ξ_{ν}^{2} , Ω^{*} ein Kontinuum, auf dem die Hessesche Determinante F ebenso wie grad F überall verschwindet. Weitere Analyse zeigt, daß im 2-dimensionalen Falle die Konvergenz auch gilt, wenn z.B. F analytisch ist. Im allgemeinen Falle, wenn $\psi_{\nu}^{2} - \phi_{\nu}^{2} = 0(\kappa_{\nu}^{2})$ ist, läßt sich zeigen, daß der Rang der Hesseschen Determinante von F höchstens n-2 ist.

KUREPA, S.: On a renlinear functional equation

In this paper R denotes the set of all reals and $\bigcirc: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a function which satisfies the following nonlinear functional equation $\det \mathbb{A}_n(x_1,\ldots,x_n)=0$ $(x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R},\ n\geq 2)$ where \mathbb{A}_n is nxn symmetric matrix such that $(\mathbb{A}_n)=4\mathbb{Q}(x_1)$, $(\mathbb{A}_n)_{ij}=\mathbb{Q}(x_i+x_j)=\mathbb{Q}(x_i-x_j)$. Under certain assumptions on \mathbb{Q} the function \mathbb{Q} is of the form $\mathbb{Q}(x)=\mathbb{Q}(1)x^2$.

HOSSZU, M.: On some composite functional equations

By specializing the functional equation of associativity, distributivity etc. such that the solution be homogeneous resp. isomorphic to the addition etc. we obtain a certain type of composite functional equations. Conversely, this type of functional equations can be solved by reducing them to the associativity resp. distributivity, etc. equations.





promise and revenue from

The section of the second of t

-nevnetneiber ach einstädarvensgrevnest ib ach in der och 100

The state of the s

total operation and automatic actions of the

From the deaded value, total real product of the confidence of the second a which are $\{x_1,\dots,x_n\}$ and $\{x_1,\dots,x_n\}$ a

anolisup, is a profession with with the Chilings

continuities of the continuity of the continuity details of the continuity of the co

KIESEWETTER, H.: Mehrdeutige Lösungen der arctan-Funktionalgleichung

 $f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1-xy})$ besitzt nur dann nichttriviale stetige Lösungen, wenn mehrdeutige Funktionen f(x) in Betracht gezogen werden. Von diesen ist coarctan x die allgemeine, mehrdeutige, stetige Lösung; ein Zweig dieser Funktionen allein ist aber keine Lösung der Funktionalgleichung im Großen.

FENYÓ, I.: Die Distributionenlösungen einer Funktionalgleichung von S. Kurepa

Es wurde bewiesen, daß jede Distributionenlösung der Funktionalgleichung $f_{x+y,z} + f_{x,y} = f_{x,y+z} + f_{y,z}$ eine in den Variabeln symmetrische Distribution ist. Daraus folgt unmittelbar, daß jede nichtsymmetrische Lösung der in Frage stehender Funktionalgleichung nichtmeßbar ist. - Erscheint demnächst in den Math. Nachrichten.

FENYÓ, I.: Über die Funktionalgleichung f(x+y) + f(x-y) - af(x) = g(x)h(y). Eine Lösungsmethode für die im Titel stehende Funktionalgleichung wurde mittels der Theorie der Distributionen gegeben, welche - im Gegensatz der schon bekannten - ganz kurz ist. - Erscheint demnächst in Glasnik Math.-Fiz. i. Astr.

HENNEY, D.: Structure theorems of set-valued additive functions

Let Y denote a Banach space and let C(Y) be the space of all non-empty, bounded, closed, convex sets of the space Y. The space C(Y) forms a semi-linear space under the operation of algebraic addition of sets and algebraic multiplication of a set by a scalar. If V is a neighborhood of zero in a locally convex topology of the space Y then the family of sets $N = \{B: A \subset B + V, B \subset A + V\}$ constitutes a base of neighborhoods for the set A in C(Y). This topology is said to be the weak (or strong) topology of C(Y) if it is generated by the weak (or strong) topology of the space Y. THEOREM: If A(t) is an additive function defined on the set of positive numbers S with values in the space C(Y) then the following conditions are equivalent: 1) A(t) is bounded in an open interval (c,d); 2) A(t) is continuous at a point $t \in S$ in the weak topology on C(Y); 3) A(t) is continuous in the strong topology on C(Y); 4) A(t) is continuous at every point $t \in S$





The third of the state of the state of the process of the state of the

Fig. (g) = $i\left(\frac{\mathbf{x}^{3} \cdot \mathbf{v}}{1 - v_{3}}\right)$ by distance dama discrimation in the C. Lösun very when mehrdeuties Funktion w f(x) is both discrementable with a virtual varieties. The discrimination of the discriminati

were read to a total continue of the Fruiting (sichung en it. Verige

The vende hard and dad to be tributioned and the fractional gladeing that the first the last the same that the same that the same in the same that the same

 $\frac{(G_{2}^{2} - \sqrt{1} + \frac{1}{2})}{(G_{2}^{2} - \sqrt{1} + \frac{1}{2})} = e^{-\frac{1}{2}} (g^{2} + \frac{1}{2}) + e^{-\frac{1}{2}} (g^{2} + \frac{1}{2}) +$

The LEVI We can be appeared of the value of additive formions of the second of the sec





for the strong topology on C(Y); 5) A(t) is of the form A(t) = tA(1), for all $t \in S$. - Generalizations of these results to additive set-valued functions on basis comes in Earnach spaces will be presented.

B) Problemstellungen und Bemerkungen:

1. Es wird nach einem Analogon der Mikroperiodizität bei automorphen Funktionen gefragt und ein Kunstgriff skizziert, womit man über stetige Lösungen f von Funktionalgleichungen der Gestalt

$$f(x+y) = F[x, f(x), f(y), f[G[x, f(x), f(y)]],...]$$

und allgemeiner (die allgemeinste Gestalt, an die er anwendbar ist, ist nicht bekannt) beweisen kann, daß sie, falls nicht konstant, so streng monoton sind (über F braucht nichts vorausgesetzt werden).

- 2. Prove or disprove the following statement: Let R be the set of all reals $f: R \to R$ on additive function (i.e. f(x+y) = f(x) + f(y); $x, y \in R$). If there is a continuous function $g: R \to R$ which is not a polynomial and such that g[f(x)] = f[g(x)] holds for all $x \in R$ then f is a continuous function.

 S. KUREPA
- 3. Bemerkung (zu den Vorträgen der Herren M. Kuczma und R. Coifman): Aus der Funktionalgleichung
- (1) [f(x)-f(y)][f(ax)-f(az)] = [f(x)-f(z)][f(ax)-f(ay)][x, y, z reell; a = konst.; f(x) stetig, reell]

folgt $f(ax) = k_1 f(x) + k_2$ ($k_1, k_2 = konst.$), die ein Spezialfall der Abelschen Funktionalgleichung ist. Die Lösung der Gleichung (1) hat G.N. Sakowits (Kiew) - als ungelöstes Problem - aufgeworfen. Man kann beweisen, daß die Funktion f(x) auf dem Intervall $1 \le x < a$ (bzw. $-a \le x < 1$) beliebig gewählt werden kann und f(x) auf Grund dieser Funktionswerte für alle x fortsetzbar ist. Man muß hier mehrere Unterfälle unterscheiden, je nachdem, daß $k_1 > 1$, $k_1 = 1$, $0 < k_1 < 1$, $-1 < k_1 < 0$, $k_1 = -1$, $k_1 < -1$ ist. Wegen der Stetigkeitsvoraussetzung für f(x) werden auch f(0), f(1), f(a) und k_2 eindeutig bestimmt.

E. VINCZE

- 4. In Ann. Polon. Math. wurde bewiesen, daß falls eine, für alle reelle x erklärte reelle Funktion $\phi(x)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:
- (1) $\varphi(2x) = 2\varphi(x)^2 1$; (2) $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$; (3) $\varphi(x)$ ist stetig; (4) $\varphi(x) > 0$ für $x \in (-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi})$ und $\varphi(x) < 0$ für $x \in (\frac{1}{2\pi}, \frac{3}{2\pi})$; dann ist $\varphi(x) = \cos x$.
- (I) Ist die Stetigkeitsvoraussetzung für die Gültigkeit des Ergebnisses wesentlich? (Vermutung: Ja). (II) Kann man aus den obigen Voraussetzungen





for an amount of the object of the arthur forms A(t) = tr(1), then the form a of the contract of the contr

the granded of the control of the off the

- Constitution of the contract of the contract

in dependence of all ordered and the second and the

3. From a substitute that solitoning it is a few to the form of the solitoning that the form of the following that the following that the following the following that the following following the following following the following following the following following following the following followin

e the Branch (suit a vieth in element): de the Muckena und e. Coffman): de der Branke elle Element

 $(1) \qquad [\ \mathcal{C}(x) \cup \mathcal{H}(y) \cup (x \cup x) + f(xx) \cup (x \cup x) + f(xy) \]$

Fig. 1. The state of the state

B. VINCZE

in the first section of the relations of the circ, for all or the x-diagram of the circ section of the ci





alle Eigenschaften der cos-Funktion, ohne Vorkenntnisse der trigonometrischen Funktionen, herleiten?

M. KUCZMA

- 5. (Das Problem brieflich mitgeteilt von H. Michel) Gegeben sei eine Gruppe G, G^* die Endomorphismenmenge von G. Gesucht sind die Lösungen der Translationsgleichung F[F(x,x),y]=F(x,x+y), wobei $x\in G$, x, y rationale Zahlen sind und $F(x,x)\in G^*$ gilt. Dabei ist die Teilmenge der rationalen Zahlen, in der x, y variieren dürfen, maximal zu machen. Wichtiger Spezialfall: G torsionsfreie, abzählbare und Abelsche Gruppe. Die Lösung dieses Problems ist für Anwendungen in der Ergodentheorie von großer Bedeutung.

 M. KUCZMA
- 6. Let R be the set of all real numbers. Find all functions $f: R \to R$ such that f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) $(x,y\in R)$ and $f(x)=x^4f(1/x)$ $(x\in R, x\neq 0)$. Can one discribe such functions by use derivatives on R?

 S. KUREPA
- 7. (I) Welche Struktur muß eine Untermenge der reellen Zahlen haben, auf der es nichtkommutative angeordnete Gruppen gibt? (II) Welche Struktur muß eine Untermenge der reellen Zahlen haben, auf der es angeordnete Guasigruppen gibt? (III) Welche Struktur muß eine Untermenge der reellen Zahlen haben, auf der es nichtkommutative angeordnete Halbgruppen gibt? (IV) Gibt es auf der Menge aller reellen Zahlen nichtkommutative angeordnete Halbgruppen? Für (I) und (II) sind Teilergebnisse in der Arbeit "J. Aczél-G. Pickert, Nichtkommutative monotone Gruppen, Archiv d. Math. 17 (1966)" enthalten. J. ACZÉL
- 8. For a given quasigroup (\mathbb{C} , +) and a, b $\in \mathbb{C}$ solve the functional equation f(x+y) = f(x+b) + f(a+y), $\forall x, y \in \mathbb{C}$. The solution depends on a, b. It is easy to see (Über eine Verallgemeinerung der Distributivitätsgleichung, Acta Sci. Math. Szeged 1964) that a, b may be choosen only such that (\mathbb{C} , 0) defined by $(x+b) \circ (a+y) = x+y$, $(\forall x, y \in \mathbb{C})$ be isomorphic to $(\mathbb{C},+)$. Which are the possible sets of such elements a, b? In a group a, b may be arbitrary. M. HOSSZÚ
- 9. Let γ be a cyclic operator with period n. The solution of

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma^{i}x) = 0$$

is f(x) = g(x) - g(yx). Conversely, the solution of g(x) - g(yx) = 0 is

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma^{i}x)$$





ave reintedfine the control of the c rebifus and decided and dec

the specific of the second The grant of the specific of the second of t

TOTAL TO A CONTROL VILLATION FOR A CONTROL TO A CONTROL TO THE SECOND TO , the probability is the second form and the rection is the first on the $x_i \in \mathbb{R}^{n-1}$. In dec $x_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ Figure 1 Variable Control of the Continue of Continue Specialfoll: The Foundation

- tewart of the first the Libertage of Loose Problem in the first of the first of the second of the garatus be til sotora nev semestich sän steamer. Se

tent tent to a factor of the best interference execution of the second The state of the s

rebling of the country to the Country and the Country and Country that the desired (I) is 1. ic . comments the ingest dark to the comment of the Straiter and neoquagracu etentuo que se matelue que codola trios elleus use e delena de fall y the Smelder muß can be errowage der a wilen Zahlen haber, auf er en achtigaright of the Prophets gibe? (P.A. 186t es auf dua Men-(i) vii - Sn agangding etembrose manata an event a male i billion and a The state of the s ile mondo. Trappet. - rein d. Joh. Iv (16 8)" enth-tion.

The second of the specification (C, F) and a, here is not who that there is such f(sty) industry (org), buy yell. The column depends on this easy to one (Pauline Verlibration range 12 Authing Structure Action of Set. Firm. Lyd war help to the trade down vice of no. The later in the array later the prorefalls segment ones the effort, i.e., i or ordiger on the first party, explored in the project. NSECTION OF THE PERSON OF THE PERSON OF THE PROPERTY OF THE PERSON OF TH

To notified off) is being after refer to pilozo in a grand .

to C = exchange (x) to not relication out of exchange a few colors (x) below to feet to

Callyn Section





with an arbitrary function f. Find similar examples of such "conjugate" functional equations! For linear cyclic equations a systematic theory is given by S. Presic in Belograd.

M. HOSSZU

- 10. Can the solution of the "normsquare" equation n(x+y) + n(x-y) = 2n(x) + 2n(y) be given by a bilinear function without supposing the commutativity of the "addition" inside of n? Partial results are by T. Majthay in Budapest.

 M. HOSSZÚ
- 11. C sei die multiplikative Gruppe, die die reellen Quaternionen $x \neq 0$ bilden. Hat jeder Automorphismus f von C^* die Gestalt $f(x) = \mu(|x|)c^{-1}xc$, $(|x| = \sqrt{xx})$, wobei c eine beliebige Quaternion \neq o und μ eine multiplikative Abbildung der nichtnegativen reellen Zahlen in die reellen Zahlen ist?

 W. EICHHORN
- 12. Dasselbe Problem für die Cayleyschen Zahlen D. (Statt 'Gruppe' muß aber 'Loop' stehen, statt c⁻¹xc ein 'innerer Automorphismus' von D /vgl. Jacobson, Rend. Palermo 7 (1958), 66-67/)?

W. EICHHORN





with an exhibitory function (. Find similar examples of a delt heory is functional equation.) For linear cyclic equations a systematic theory is given by E. Fredic in Eulocravi.

- 1.. Can the solution of the "correspondence" equation n(|e+y| + n(x-y) = f e(x) + n(y)) be given by "aliman, function without supposing the commutativity of the "admitisc" easily of a rate of a rate of each the result. Set by ". Set, they is undepent.
 - it is a distribution of energy at the real of the content of $x \neq 0$ and content of $x \neq 0$ and content of the content of $x \neq 0$ and $x \neq 0$ and the content of $x \neq 0$ and the content of $x \neq 0$ and the content of the
 - 13. Describe Problem für die Chyleysomm Zahme D. (Statt ^{ma}urgpellands eber lit pplischen, statt e^{-1} xe in the cure / atomorphischen von D. Agl. and son, in ad. tal. and $e^{(1)}$), uses on, in ad. tal. and $e^{(1)}$ (12)), uses $87/\gamma$
 - MINOMHO . N.

