Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

14

Tagungsbericht
Funktionalgleichungen
vom 5. - 10. Juli 1965 (3. Tagung)

1) Vom 5. bis 10. Juli 1965 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach die dritte Tagung über Funktionalgleichungen unter der Leitung der Professoren J. AZÉL (Debrecen-Köln), O. HAUPT (Erlangen) und A. OSTROWSKI (Basel) statt.

Eröffnet wurde die Tagung mit der Begrüßung durch Herrn Professor HAUPT. Sodann nahm Herr OSTROWSKI den 70. Geburtstag von Herrn MAIER zum Anlaß, um kurz auf das bisherige Werk dieses Gelehrten insbesondere aus dem Gebiet der speziellen Funktionen und Funktionalgleichungen hinzuweisen. Anschließend begannen die Vorträge.

Wie bei der letzten Tagung kam zunächst wieder der Problemkreis der Abelschen Funktionalgleichung zur Sprache: diesmal aber handelte es sich vor allem um die Frage der Eindeutigkeit der Lösung sowie um die damit zusammenhängenden Probleme der stetigen Iterierten. Letztere Probleme wurden in einigen späteren von der Abelschen Gleichung unabhängigen Vorträgen weiter verfolgt. Ein Leitmotiv anderer Vorträge kann durch die Stichworte Funktionalgleichungen über Vektorräumen und Algebren gekennzeichnet werden. Daneben kamen diesmal auch Funktionaldifferentialgleichungen und Funktionalgleichungen für Distributionen und Mengenfunktionen zur Sprache. Andere Vorträge legten erneut beredtes Zeugnis ab von der Fülle der Beziehungen, die sich von der allgemeinen Fragestellung der Tagung zu den verschiedensten anderen Gebieten spannen.

Bei der Tagung von 1963 waren ungelöste Probleme in einer Liste zusammengefaßt worden. Erfreulicherweise konnte diesmal einem Bericht über den Stand dieser Probleme entnommen werden, daß eine ganze Anzahl von ihnen inzwischen teilweise oder vollständig gelöst worden sind und zu neuen Problemstellungen Anlaß gegeben haben.

2) Die diesjährige Tagung wurde auch deshalb für die Teilnehmer eine Quelle reicher Anregungen, weil eine Reihe neuer Fragenkreise zur Behandlung kamen. Auch für das nächste Jahr ist schon mit vielen neuen Ergebnissen und

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Methoden auf unserem Gebiet zu rechnen; daher ist auf unsere Anregung hin von der Institutsleitung für Juni 1966 die vierte Tagung über Funktionalgleichungen vorgesehen.

3) Es ist erfreulich, daß so viele der Eingeladenen trotz mancher administrativer Schwierigkeiten kommen konnten. Insgesamt waren 18 Teilnehmer anwesend, davon 14 aus dem Ausland, und zwar 2 Amerikaner, 1 Franzose, 1 Israeli, 1 Jugoslave, 1 Kanadier, 2 Polen, 1 Schweizer und 5 Ungarn. Die Teilnehmer waren die folgenden:

Teilnehmer:

Aczél, J. Debrecen, Ungarn; z. Zt. Köln)
Coifman, R. Tel Aviv, Israel, Genf, Schweiz
Eichhorn, W., Würzburg
Fenyő, I., Budapest, Ungarn; z. Zt. Rostock
Haupt, O., Erlangen
Henney, D., Washington, USA
Hosszú, M., Miskolc, Ungarn
Kárteszi, F., Budapest, Ungarn
Kiesewetter, H., Rostock
Kucharzewski, M., Katowice, Polen
Kuczma, M., Katowice, Polen
Kurepa, S., Zagreb, Jugoslawien
Maier, W., Jena
McKiernan, M.A., Waterloo, Canada
Meynieux, R., Clamart, Frankreich
Ostrowski, A., Basel, Schweiz
Thiesman, H.P., Alexandria, USA
Vincze, E., Miskolc, Ungarn

4) Kurzfassungen der Vorträge sowie die Problemstellungen und Bemerkungen folgen (getrennt voneinander) in chronologischer Reihenfolge.

A Vortragsauszüge:

MAIER, W.: Abbau singulärer Linien.

Für $abc \neq o$, $s \neq 1, 2, \infty$ bilde man mit Riemann's ζ-Funktion die Lösung des Systems

(1) $\qquad V(a,b) = c^s V(ca, cb) = V(b,a) =$

(2) $\qquad = V(a, a+b) + V(b, a+b) + (a+b)^{-s}\zeta(s)$.

Mit $b/a = \omega$ und $|\arc \omega| < \pi$ ist $V(1,\omega)$ in ω analytisch und in s meromorph. Die Halbachse $\omega < o$ ist dann eine singuläre Linie von $V(1,\omega) = V(\omega)$ und das Näherungsverhalten bei rationalen $p/q < o$ kann nach Kluyver analysiert werden. Es müssen dazu außer $V(\omega)$ weitere analytische Funktionen und

deren Funktionalgleichungen berücksichtigt werden. Während $V(\omega)$ in einer geschlitzten Ebene existiert, können ihr eindeutig automorphe Funktionen einer ω-Halbebene zugeordnet werden, mit $\omega < \infty$ als natürlicher Grenze.

KUCZMA, M.: Konvexe Lösungen der Abelschen Funktionalgleichung

Es sei $f(x)$ eine in einem Intervall (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, konkave Funktion, so daß $a < f(x) < x$ in (a, b), $f'(x) > o$ fast überall in (a, b) und $\lim_{x \to a+o} f'(x) = 1$. Dann besitzt die Abelsche Funktionalgleichung $A[f(x)] - A(x) = 1$ eine bis auf eine additive Konstante einzige konvexe Lösung in (a, b). Daraus ergibt sich auch, daß $f(x)$ eine einzige reguläre Iterationsgruppe zuläßt.

COIFMAN, R.: On the unicity of solutions of the Abel-Schröder functional equations.

We say that the continuous function φ is regular-A at b if the limit

$$\lim_{x \to +o} \frac{\varphi(\lambda x+b) - \varphi(x+b)}{\varphi(\lambda_o x+b) - \varphi(x+b)}$$

exists for every $\lambda > o$, (λ_o is fixed). Let f be a continuous increasing function defined for $x \in [0, a_o]$ such that $0 < f(x) < x$, $x \neq 0$. We have the following theorem: The necessary and sufficient condition for the functional equation

$$f(\varphi(x)) = \varphi(ax-1), \qquad o < a \leq 1$$

to possess a solution regular-A at $1/(a-1)$, is that the limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(a_o)}{f_{n+1}(a_o) - f_n(a_o)} = A(x)$$

exists and that A is a continuous monotonic function. Morever the regular-A solution such that $\varphi(a_o) = \alpha_o$ is unique.

KÁRTESZI, F.: Über die Funktionalgleichung $f(g(x)) = g(f(x))$ und die Thomsen-Bedingung.

Es wurde eine allgemeine elementare und anschauliche Methode für die Betrachtung der Funktionalgleichung $f(g(x)) = g(f(x))$ gezeigt (mit einigen von didaktischem Standpunkt aus interessanten Beispielen).

MICHEL, H.: Über k-te Wurzeln von Permutationen beliebiger Mengen; Bericht von M. KUCZMA.

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine Permutation P auf einer beliebigen Menge eine k-te Wurzel, also eine Permutation Q mit $Q^k = P$ besitzt. Weiter wird erörtert, wie man jede Permutation in eine, in gewissem Sinne maximale Strömung von Permutationen einbetten kann. Jede solche Strömung läßt sich als Lösung der Translationsgleichung interpretieren.

M^c^KIERNAN, M. A.: Two functional equations arising from parameter invariant variational problems.

In a second order variational problem $\int L\{x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i\}dt$, the parameter invariance leads to the functional equation

$$L\{x^i, \lambda\dot{x}^i, \lambda^2\ddot{x}^i + \mu\dot{x}^i\} = \lambda L\{x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i\}$$

for $\lambda > 0$ and all μ. The derivative with respect to λ and μ, evaluated when $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ implies the Zermelo conditions

$$\begin{cases} L_{\dot{x}^i}\dot{x}^i + 2L_{\ddot{x}^i}\ddot{x}^i = L \\ L_{\ddot{x}^i}\dot{x}^i = 0 \end{cases} \qquad \text{(summation on } i = 1, \dots, n).$$

In the general problem with derivatives of order up to m, the Zermelo conditions read

$$\sum_{r=p}^{m} \frac{r!}{(r-p)!} \frac{\partial L}{\partial x^{(r)i}} x^{(r-p+1)i} = \begin{cases} 0 & \text{if } 2 \leq p \leq m \\ L & \text{if } p = 1 \end{cases} .$$

It is shown these conditions are also sufficient. (Euler's equation if $m = 1$). The analogous problem for multiple integral problems is also discussed

KUCHARZEWSKI, M.: Funktionalgleichungen, die in der Theorie der linearen homogenen geometrischen Objekte auftreten

Die Bestimmung aller linearen homogenen geometrischen Objekte kann man auf die Bestimmung aller Lösungen der Funktionalgleichung

(1) $$F(A) \cdot F(B) = F(A \cdot B)$$

zurückführen, die die Bedingung

(2) $$F(E) = e$$

erfüllen. F bzw. A sind quadratische nichtsinguläre Matrizen der Ordnung

m bzw. n und E bzw. e Einheitsmatrizen entsprechender Ordnung. Die Lösungen von (1) wurden ohne irgendwelche Regularitätsvoraussetzungen im Falle $m \leq n$ bestimmt. - Das Klassifikationsproblem der geometrischen Objekte führt zur folgenden Funktionalgleichung

(3) $$G(s, A) = H(F(H^{-1}(s); A)),$$

wobei G bzw. F gegebene Funktionen sind und H eine gesuchte Funktion ist. H muß überdies umkehrbar sein. Die Funktionalgleichung (3) ist bisher nicht gelöst. Man kann aber eine Methode angeben, mit deren Hilfe man in gewissen Fällen wenigstens eine Lösung von (3) finden bzw. zeigen kann, daß (3) keine Lösung besitzt.

THIELMAN, H. P.: Functional equations involving derivatives

The equation

(1) $$f^{(r)}(x) = af(g(x)),$$

where r indicates differentiation, is considered. Special cases are treated. It is shown that if $g(x)$ is its own inverse, for example $g(x) = b/x$, or $g(x) = -x+c$, then equation (1), which is knowm as a hystero-differential equation, can be reduced to an ordinary differential equation of order $2r$, possibly with variable coefficients. In case $r = 2$, and $g(x) = b/x$, equation (1) can be reduced to a fourth order ordinary differential equation of the Euler type with two boundary conditions.

ACZÉL, J.: Funktionalgleichungen in Topologie und Graphentheorie

1) In Analogie zum topologischen Abschlußaxiom von Monteire wird es untersucht, unter welchen Bedingungen in abelschen Halbgruppen mit Einselement

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{und} \quad f^2(x) = f(x)$$

aus

$$x + y + f^2(x) + f^2(y) = f(x+y), \; f(0) = 0$$

folgen (Gegenbeispiel zeigt, daß das nicht immer der Fall ist).

2) In Analogie zum Satze, daß in endlichen vollständigen gerichteten Graphen es Eckpunkte gibt, aus denen alle andere durch Wege erreichbar sind, wird es untersucht, unter welchen Bedingungen für Lösungen der Translationsgleichung $f(f(x, u), v) = f(x, u+v)$, $u, v, u+v \in U$, $x, f(x, u) \in X$ die Existenz eines $x_0 \in X$ mit $f(x_0, U) = X$, aus dem Bestehen von $y \notin f(x, U) \Rightarrow x \in f(y, U)$

für alle $x, y \in X$ folgt. - Anschauliche Deutung und geometrische Anwendung.

EICHHORN, W.: Über die multiplikativen Abbildungen endlichdimensionaler Algebren in kommutativen Halbgruppen

Gegeben sei die multiplikative Abbildung $f: A \to H$ (H eine multiplikative kommutative Halbgruppe).

SATZ 1. Ist A einer direkten Summe von vollen Matrixalgebren über einem beliebigen Körper K isomorph, so besitzt f die Gestalt

$$f(x) = m_1(\nu_1(x))m_2(\nu_2(x))\ldots m_s(\nu_s(x)), \tag{1}$$

wobei die m_σ ($\sigma = 1, \ldots, s$) multiplikative Funktionen von $\nu_\sigma(x)$, den irreduziblen Teilern der allgemeinen (generischen) Norm (vgl. Jacobson, Osaka Math. J. 15 (1963), 25-50) des allgemeinen Elements $x = \xi_o e_o + \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_{n-1} e_{n-1}$ von A sind (e_o = Einselement von A, $\nu_\sigma(e_o) = 1$). Alle Abbildungen der Art (1) sind multiplikativ. - Die Voraussetzung des Satzes ist z. B. in jeder halbeinfachen assoziativen Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K erfüllt.

SATZ 2. Ist A die Algebra der Quaternionen oder der Cayleyschen Zahlen über einem pythagoräischen Körper (vgl. Weyl: Classical Groups, Princeton 1946, S. 13), so gilt

$$f(x) = f(|x|) \qquad \left(|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2}, \quad k = 3 \text{ bzw. } 7\right).$$

- Hieraus folgt die Lösung des Problems von Olga Taussky: $f(x) = |x|$ ist die einzige Bewertung der reellen Quaternionen oder Cayleyschen Zahlen, für die $f(2) = 2$ ist.

SATZ 3: Unter allen endlichdimensionalen assoziativen (bzw. nichtassoziativen alternativen) Algebren mit Einselement e über dem reellen Zahlkörper R ist die Algebra der reellen Quaternionen (bzw. Cayleyschen Zahlen) die einzige, die eine Eigenschaft der folgenden Art besitzt: Für jede multiplikative Abbildung f der Algebra in die reellen Zahlen R gilt

$$f(x) = f(\tau_f(x)) \quad \text{mit} \quad \tau_f(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad (\tau_f(x) \in R).$$

GÁSPÁR, GY.: Die Charakterisierung der Determinanten n-ter Ordnung der Dimension p mittels Funktionalgleichungen; Bericht von E. Vincze

Es sei $R = \{a, b, \ldots\}$ ein Integritätsbereich der Charakteristik Null. Das System der n^p Elemente $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \in R$ $(\alpha_i = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, p)$ nennt man eine Matrix n-ter Ordnung der Dimension p über R und bezeichnet sie: $A^{(p)} = [a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}]$. Das System $R_n^{(p)}$ der Matrizen $A^{(p)}$, $B^{(p)}, \ldots$ bildet ein Modul. Zu diesem Modul kann man die Elemente von $R_n^{(2)}$ in mehrfacher Weise als Operatoren anwenden:

$$[m_{rs}^{(i)}][a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}] = [\sum_\mu m_{r\mu}^{(i)} a_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\mu\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}]$$

$$[a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}][m_{rs}^{(i)}] = [\sum_\nu a_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-i}\nu\alpha_{n-i+2}\ldots\alpha_p} m_{\nu s}^{(i)}] .$$

SATZ: Ist $\Phi^{(i_1, \ldots, i_{2q})}$ eine Abbildung von $R_n^{(p)}$ in R, die den nachstehenden Forderungen genügt:

(I) $$\Phi^{(i_1, \ldots, i_{2q})}(A^{(p)} + B^{(p)}) = \sum \Phi^{(i_1, \ldots, i_{2q})}(C^{(p)}) ,$$

(II) $$\Phi^{(i_1, \ldots, i_{2q})}([m_{rs}^{(i\lambda)}]A^{(p)}) = |[m_{rs}^{(i\lambda)}]|\,\Phi^{(i_1, \ldots, i_{2q})}(A^{(p)})$$

$$(1 \leq \lambda \leq q) ,$$

$$\Phi^{(i_1, \ldots, i_{2q})}(A^{(p)}[m_{rs}^{(i\lambda)}]) = \Phi^{(i_1, \ldots, i_{2q})}(A^{(p)})\,|[m_{rs}^{(i_\lambda)}]|$$

$$(q+1 \leq \lambda \leq 2q),$$

(III) $$\Phi^{(i_1, \ldots, i_{2q})}(E_q^{(p)}) = 1 ,$$

wobei in (I) die Summenbildung auf sämtliche Blattkombinationen nach irgendeinem Index auszudehnen ist, ferner $|[m_{rs}^{(i_\lambda)}]|$ gewöhnliche Determinante von $[m_{rs}^{(i_\lambda)}]$ ist - so ist

$$\Phi^{(i_1, \ldots, i_{2q})}(A^{(p)})$$

die Determinante n-ter Ordnung der Dimension p von $A^{(p)}$ nach den Indices $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{2q}}$.

MEYNIEUX, R.: Conditions suffisantes de différentiabilité pour certaines solutions d'équations fonctionnelles

Soient: q, 1, m, n entiers ≥ 1; Λ ouvert de $R^q \times R^q$; U (resp. V, W) image de Λ par l'application $(u, v) \to u$ (resp. v, u+v); $X = R^1$, $Y = R^m$, $Z = R^n$; x (resp. y, z) application continue de U dans X (resp. V dans Y, W dans Z); D ouvert de $X \times Y$, tel que $[x(u); y(v)] \in D$ pour tout $(u, v) \in \Lambda$; φ application continument différentiable de D dans Z.

HYPOTHÈSES: 1) $(u, v) \in \Lambda \Rightarrow \varphi[x(u), y(v)] = z(u, v)$.

2) Quels que soient $a \in U$ et l'ouvert $V' \subset V$ tels que $\{a\} \times V' \subset \Lambda$, on a $\bigcap_{\eta \in y(V')} \operatorname{Ker} (\varphi^\eta)'_{\xi_o} = \{0\}$, où $\xi_o = x(a)$ et où $(\varphi^\eta)'_\xi$ désigne la différentielle en ξ (application linéaire de R^1 dans R^n) de la fonction partielle φ^η définie par l'égalité $\varphi^\eta(\xi) = \varphi(\xi, \eta)$.

CONCLUSION: 1) x est continument différentiable dans U.

2) z est continument différentiable dans W.

TAUSSKY, O.: A determinantal identity for quaternions and a new eight square identity; Bericht von W. Eichhorn

THEOREM 1. Let $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ be four real quaternions with $\xi_1 \neq 0$. Let X be the matrix

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}.$$

Define $\det X = -\xi_1\eta_1\xi_1^{-1}\xi_2 + \xi_1\eta_2$. Then $\det X \cdot \overline{\det X} = \det XX^*$. By $\bar{\alpha}$ is understood the quaternion conjugate to α. By X^* is understood the transposed and conjugate matrix. Note that $\overline{\det X} \neq \det X^*$. - It follows:

THEOREM 2. Let $x_1, \ldots, x_8$; $y_1, \ldots, y_8$ be two sets of indeterminantes. Assume that all of $x_1, \ldots, x_4$ are zero. Then the following identity holds:

$$\sum_1^8 x_i^2 \sum_1^8 y_i^2 = \sum_{i=1}^4 [F_i(x_j, y_k)]^2 + \sum_{i=5}^8 [R_i(x_j, y_k)]^2.$$

(P_i bilinear polynomials of x_j, y_k; R_i fractional expressions of x_j, y_k).

VINCZE, E.: Über einige assoziative Funktionen

Es wurden die Lösungen der folgenden Gestalten (I)-(III) von Assoziativitätsgleichung $F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)]$ untersucht und bestimmt (ohne irgendwelche weitere Voraussetzungen für die vorkommenden Funktionen):

(I) $F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(y)$ ($n \leq 2$; für $n > 2$ ist es ein ungelöstes Problem), wobei $x, y, g_i(x), h_i(y)$ in einem beliebigen Körper K der Charakteristik Null liegen;

(II) $F(x,y) = G[g(x), h(y)]$ (alles ist reell), mit den Eigenschaften für $G(u,v)$: $G(uv,w) = G(u,w)G(v,w)$ und $G(w,u+v) = G(w,u)G(w,v)$;

(III) $F(x,y) = f^{-1}[g(x) * h(y)]$, wobei $x, y, F(x,y)$ Elemente einer Halbgruppe $\mathcal{G}$ sind, die Operation $*$ eine beliebige (nicht-kommutative) Gruppenoperation ist und f^{-1} eine umkehrbare Funktion bezeichnet.

ACZÉL, J.: Bericht über den Stand der 23 "1963-er Oberwolfacher Funktionalgleichungsprobleme".

Folgende Probleme sind teilweise oder vollständig gelöst worden (Nummerierung wie in Archiv d. Math. 15 (1964), 435-444):

21. (Homomorphismen der multiplikativen Gruppen von Algebren): Teilergebnisse (insbesondere über Quaternionen und Cayleyschen Zahlen) wurden von W. Eichhorn gefunden (Habilitationsschrift und Journal f. reine u. angew. Math. 1966).

19. (Allgemeine Lösung von $F(XY) = F(X)F(Y)$, wo X, Y n-dimensionale, $F(Z)$ m-dimensionale Matrizen sind); Lösung bzw. Reduktion für $m \leq n$ wurde von M. Kucharzewski und A. Zajtz gefunden (Annales Polon. Math. 1967).

14. Aus $f(x+y) = f(x) + f(y)$ fast überall (im Sinne des ebenen Lebesgue-Masses) folgt $f(x) = f_o(x)$ fast überall (im Sinne des linearen Lebesgue-Masses) wo $f_o(x+y) = f_o(x) + f_o(y)$ überall; bewiesen von W.B. Jurkat (Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965)) und N.G. de Bruijn (unpubliziert).

13. Aus $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (überall) und $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$ $(x \neq o)$ folgt $f(x) = cx$ (überall); bewiesen von W.B. Jurkat (ebenda), und S. Kurepa (Glasnik Mat. Fiz. Astron. 19 (1964), 23-36) und R.O. Davies (unpubliziert).

5. (Unter welchen Bedingungen folgt aus der Konvexität von f die aller reellen Iterierten f^s); Teilergebnis: A. Smajdor (Archiv d. Math. 1966) hat ein Beispiel gegeben, wo die $\frac{1}{2}$-te Iterierte einer konvexen Funktion

nicht konvex sein kann.

4. Gelöst von J. Aczél und G. Pickert: Es gibt angeordnete Gruppen auf Teilmengen der Menge der reellen Zahlen, die nichtkommutativ sind, aber es gibt nicht solche auf der Menge aller reellen Zahlen (Archiv d. Math. 1966).

OSTROWSKI, A.: Über die Konvergenzverhältnisse beim Gradientenverfahren

Es wurde das besagte Verfahren in der Form angesetzt: $\xi_{\nu+1} = \xi_\nu - t\varkappa_\nu\psi_\nu$ ($\nu = 0, 1, \ldots$), wobei $F'(\xi_\nu) = \varkappa_\nu\varphi_\nu$ der Gradient von $F(\xi)$ in ξ_ν und $\varkappa_\nu$ der Betrag von $F'(\xi_\nu)$ ist. ψ_ν ist ein Einheitsvektor, der mit φ_ν einen Winkel $\leq \frac{1}{2}\pi - 2\gamma$ bildet. Unter geeigneten Voraussetzungen kann bewiesen werden, daß $\sum\varkappa_\nu^2$ konvergiert. Wenn ξ_ν nicht konvergiert, so ist die Menge der Häufungsstellen der ξ_ν, Ω^* ein Kontinuum, auf dem die Hessesche Determinante F ebenso wie grad F überall verschwindet. Weitere Analyse zeigt, daß im 2-dimensionalen Falle die Konvergenz auch gilt, wenn z.B. F analytisch ist. Im allgemeinen Falle, wenn $\psi_\nu - \varphi_\nu = 0(\varkappa_\nu)$ ist, läßt sich zeigen, daß der Rang der Hesseschen Determinante von F höchstens n-2 ist.

KUREPA, S.: On a nonlinear functional equation

In this paper R denotes the set of all reals and $Q: R \rightarrow R$ a function which satisfies the following nonlinear functional equation $\det A_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ($x_1, \ldots, x_n \in R$, $n \geq 2$) where A_n is $n \times n$ symmetric matrix such that $(A_n)_{ii} = 4Q(x_i)$, $(A_n)_{ij} = Q(x_i+x_j) - Q(x_i-x_j)$. Under certain assumptions on Q the function Q is of the form $Q(x) = Q(1)x^2$.

HOSSZÚ, M.: On some composite functional equations

By specializing the functional equation of associativity, distributivity etc. such that the solution be homogeneous resp. isomorphic to the addition etc. we obtain a certain type of composite functional equations. Conversely, this type of functional equations can be solved by reducing them to the associativity resp. distributivity, etc. equations.

KIESEWETTER, H.: Mehrdeutige Lösungen der arctan-Funktionalgleichung

$f(x)+f(y) = f(\frac{x+y}{1-xy})$ besitzt nur dann nichttriviale stetige Lösungen, wenn mehrdeutige Funktionen $f(x)$ in Betracht gezogen werden. Von diesen ist $c \cdot \arctan x$ die allgemeine, mehrdeutige, stetige Lösung; ein Zweig dieser Funktionen allein ist aber keine Lösung der Funktionalgleichung im Großen.

FENYŐ, I.: Die Distributionenlösungen einer Funktionalgleichung von S. Kurepa

Es wurde bewiesen, daß jede Distributionenlösung der Funktionalgleichung $f_{x+y,z} \dot{+} f_{x,y} = f_{x,y+z} \dot{+} f_{y,z}$ eine in den Variabeln symmetrische Distribution ist. Daraus folgt unmittelbar, daß jede nichtsymmetrische Lösung der in Frage stehender Funktionalgleichung nichtmeßbar ist. - Erscheint demnächst in den Math. Nachrichten.

FENYŐ, I.: Über die Funktionalgleichung $f(x+y)+f(x-y)-af(x) = g(x)h(y)$.

Eine Lösungsmethode für die im Titel stehende Funktionalgleichung wurde mittels der Theorie der Distributionen gegeben, welche - im Gegensatz der schon bekannten - ganz kurz ist. - Erscheint demnächst in Glasnik Math.-Fiz. i. Astr.

HENNEY, D.: Structure theorems of set-valued additive functions

Let Y denote a Banach space and let $C(Y)$ be the space of all non-empty, bounded, closed, convex sets of the space Y. The space $C(Y)$ forms a semi-linear space under the operation of algebraic addition of sets and algebraic multiplication of a set by a scalar. If V is a neighborhood of zero in a locally convex topology of the space Y then the family of sets $N = \{B : A \subset B+V, \ B \subset A+V\}$ constitutes a base of neighborhoods for the set A in $C(Y)$. This topology is said to be the weak (or strong) topology of $C(Y)$ if it is generated by the weak (or strong) topology of the space Y. THEOREM: If $A(t)$ is an additive function defined on the set of positive numbers S with values in the space $C(Y)$ then the following conditions are equivalent: 1) $A(t)$ is bounded in an open interval (c,d); 2) $A(t)$ is continuous at a point $t \in S$ in the weak topology on $C(Y)$; 3) $A(t)$ is continuous in the strong topology on $C(Y)$; 4) $A(t)$ is continuous at every point $t \in S$

for the strong topology on $C(Y)$; 5) $A(t)$ is of the form $A(t) = tA(1)$, for all $t \in S$. - Generalizations of these results to additive set-valued functions on basis cones in Banach spaces will be presented.

B) Problemstellungen und Bemerkungen:

1. Es wird nach einem Analogon der Mikroperiodizität bei automorphen Funktionen gefragt und ein Kunstgriff skizziert, womit man über stetige Lösungen f von Funktionalgleichungen der Gestalt

$$f(x+y) = F[x, f(x), f(y), f\{G[x, f(x), f(y)]\}, \ldots]$$

und allgemeiner (die allgemeinste Gestalt, an die er anwendbar ist, ist nicht bekannt) beweisen kann, daß sie, falls nicht konstant, so streng monoton sind (über F braucht nichts vorausgesetzt werden).

J. ACZÉL

2. Prove or disprove the following statement: Let R be the set of all reals $f: R \to R$ on additive function (i.e. $f(x+y) = f(x) + f(y)$; $x, y \in R$). If there is a continuous function $g: R \to R$ which is not a polynomial and such that $g[f(x)] = f[g(x)]$ holds for all $x \in R$ then f is a continuous function.

S. KUREPA

3. Bemerkung (zu den Vorträgen der Herren M. Kuczma und R. Coifman): Aus der Funktionalgleichung

$$(1) \qquad [f(x)-f(y)][f(ax)-f(az)] = [f(x)-f(z)][f(ax)-f(ay)]$$

$$[x, y, z \text{ reell}; \ a = \text{konst.}; \ f(x) \text{ stetig, reell}]$$

folgt $f(ax) = k_1 f(x) + k_2$ (k_1, k_2 = konst.), die ein Spezialfall der Abelschen Funktionalgleichung ist. Die Lösung der Gleichung (1) hat G. N. Sakowits (Kiew) - als ungelöstes Problem - aufgeworfen. Man kann beweisen, daß die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $1 \leq x < a$ (bzw. $-a \leq x < 1$) beliebig gewählt werden kann und $f(x)$ auf Grund dieser Funktionswerte für alle x fortsetzbar ist. Man muß hier mehrere Unterfälle unterscheiden, je nachdem, daß $k_1 > 1$, $k_1 = 1$, $0 < k_1 < 1$, $-1 < k_1 < 0$, $k_1 = -1$, $k_1 < -1$ ist. Wegen der Stetigkeitsvoraussetzung für $f(x)$ werden auch $f(0)$, $f(1)$, $f(a)$ und k_2 eindeutig bestimmt.

E. VINCZE

4. In Ann. Polon. Math. wurde bewiesen, daß falls eine, für alle reelle x erklärte reelle Funktion $\varphi(x)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:
(1) $\varphi(2x) = 2\varphi(x)^2 - 1$; (2) $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$; (3) $\varphi(x)$ ist stetig; (4) $\varphi(x) > 0$ für $x \in (-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi})$ und $\varphi(x) < 0$ für $x \in (\frac{1}{2\pi}, \frac{3}{2\pi})$; dann ist $\varphi(x) = \cos x$.
(I) Ist die Stetigkeitsvoraussetzung für die Gültigkeit des Ergebnisses wesentlich? (Vermutung: Ja). (II) Kann man aus den obigen Voraussetzungen

alle Eigenschaften der cos-Funktion, ohne Vorkenntnisse der trigonometrischen Funktionen, herleiten?

M. KUCZMA

5. (Das Problem brieflich mitgeteilt von H. Michel) Gegeben sei eine Gruppe G, G^* die Endomorphismenmenge von G. Gesucht sind die Lösungen der Translationsgleichung $F[F(a,x),y] = F(a,x+y)$, wobei $a \in G$, x, y rationale Zahlen sind und $F(a,x) \in G^*$ gilt. Dabei ist die Teilmenge der rationalen Zahlen, in der x, y variieren dürfen, maximal zu machen. Wichtiger Spezialfall: G torsionsfreie, abzählbare und Abelsche Gruppe. Die Lösung dieses Problems ist für Anwendungen in der Ergodentheorie von großer Bedeutung.

M. KUCZMA

6. Let R be the set of all real numbers. Find all functions $f: R \to R$ such that $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$ $(x, y \in R)$ and $f(x)=x^4 f(1/x)$ $(x \in R,\ x \neq 0)$. Can one discribe such functions by use derivatives on R?

S. KUREPA

7. (I) Welche Struktur muß eine Untermenge der reellen Zahlen haben, auf der es nichtkommutative angeordnete Gruppen gibt? (II) Welche Struktur muß eine Untermenge der reellen Zahlen haben, auf der es angeordnete Quasigruppen gibt? (III) Welche Struktur muß eine Untermenge der reellen Zahlen haben, auf der es nichtkommutative angeordnete Halbgruppen gibt? (IV) Gibt es auf der Menge aller reellen Zahlen nichtkommutative angeordnete Halbgruppen? - Für (I) und (II) sind Teilergebnisse in der Arbeit "J. Aczél-G. Pickert, Nichtkommutative monotone Gruppen, Archiv d. Math. 17 (1966)" enthalten.

J. ACZÉL

8. For a given quasigroup $(Q,+)$ and $a, b \in Q$ solve the functional equation $f(x+y) = f(x+b) + f(a+y)$, $\forall x, y \in Q$. The solution depends on a, b. It is easy to see (Über eine Verallgemeinerung der Distributivitätsgleichung, Acta Sci. Math. Szeged 1964) that a, b may be choosen only such that $(Q, \circ)$ defined by $(x+b) \circ (a+y) = x+y$, $(\forall x, y \in Q)$ be isomorphic to $(Q,+)$. Which are the possible sets of such elements a, b? In a group a, b may be arbitrary.

M. HOSSZÚ

9. Let γ be a cyclic operator with period n. The solution of

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma^i x) = 0$$

is $f(x) = g(x) - g(\gamma x)$. Conversely, the solution of $g(x) - g(\gamma x) = 0$ is

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma^i x)$$

with an arbitrary function f. Find similar examples of such "conjugate" functional equations! For linear cyclic equations a systematic theory is given by S. Prešic in Belograd.

M. HOSSZÚ

10. Can the solution of the "normsquare" equation $n(x+y)+n(x-y) = 2n(x)+2n(y)$ be given by a bilinear function without supposing the commutativity of the "addition" inside of n? Partial results are by T. Majthay in Budapest.

M. HOSSZÚ

11. Q sei die multiplikative Gruppe, die die reellen Quaternionen $x \neq 0$ bilden. Hat jeder Automorphismus f von Q^* die Gestalt $f(x) = \mu(|x|)c^{-1}xc$, $(|x| = \sqrt{x\bar{x}})$, wobei c eine beliebige Quaternion $\neq$ o und μ eine multiplikative Abbildung der nichtnegativen reellen Zahlen in die reellen Zahlen ist?

W. EICHHORN

12. Dasselbe Problem für die Cayleyschen Zahlen D. (Statt "Gruppe" muß aber "Loop" stehen, statt $c^{-1}xc$ ein "innerer Automorphismus" von D /vgl. Jacobson, Rend. Palermo 7 (1958), 66-67/)?

W. EICHHORN

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft