Tagungsbericht

Harmonische Analysis und Integraltransformationen

2. - 10.8.1965

Unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. P.L. Butzer (Aachen) fand im August 1965 in Oberwolfach eine Tagung über "Harmonische Analysis und Integraltransformationen" statt. Insgesamt 32 Mathematiker aus 11 Ländern hatten sich zur Teilnahme an dieser Tagung im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eingefunden. Leider mußten die Herren Professoren G. Krabbe, J. Peetre und A. Zygmund kurzfristig ihr Kommen absagen, doch sind die kurzen Zusammenfassungen ihrer Vorlesungen diesem Tagungsbericht beigefügt.

Die Tagung war einem Manne gewidmet, dessen zu früher Tod eine schmerzliche Lücke hinterlassen hat: Jean Favard (28.8.1902 - 21.1.1965). Es war der einstimmige Wunsch aller Teilnehmer, auf diese Weise dieses großen Mathematikers und seines Werkes zu gedenken.

Das Thema umfaßte ein weitgestecktes mathematisches Forschungsgebiet und ließ so ein sehr vielseitiges Programm zu. In den 20 Vorträgen mit ihren anschließenden lebhaften und ausführlichen Diskussionen wurden in sehr übersichtlicher Form moderne Entwicklungen und Ergebnisse aus allen Zweigen der harmonischen Analysis und Integraltransformationen dargeboten, so daß insbesondere die jüngeren Mathematiker hier einen schönen Überblick über das Tagungsthema und seinen Zusammenhang mit verwandten mathematischen Disziplinen bekamen. Die Abgeschlossenheit des Instituts ließ die Gespräche und das Interesse, das vor allen Dingen durch die Vorträge genährt wurde, nie abreißen und führte zu einem umfangreichen Austausch von Meinungen und Informationen, der in zwei Sitzungen über neue und ungelöste Probleme aus dem betrachteten Fragekreis seinen Niederschlag fand. Darüber hinaus wurden viele persönliche Kontakte gepflegt oder neu geknüpft. Man lernte sich kennen.

In ganz besonderer Weise soll dem Institutsdirektor, Herrn Prof. Dr. M. Barner und den Damen und Herren des Oberwolfacher Hauses für die Gast-

freundschaft gedankt werden. Die unbürokratische und vorzügliche Betreuung der Gäste wird immer eine wesentliche Voraussetzung für das Gelingen einer Tagung bilden.

Tagungsteilnehmer:

Akutowicz, E.J., Bologna; Montpellier
Askey, R., Wisconsin
Balaguer, F.S., Barcelona
Berens, H., Aachen
Butzer, P.L., Aachen
Dinghas, A., Berlin
Erdélyi, A., Edinburgh
Ernst, D., Aachen
Everling, W., Magstadt
Görlich, E., Aachen
Günzler, H., Göttingen
Hartmann, St., Breslau
Huber, A., Zürich
Igari, S., Paris; Sendai
Kahane, J.P., Paris
Köhnen, W., Aachen
Luxemburg, W.A.J., Pasadena
Meyer, Y., Straßburg
SZ. Nagy, B., Szeged
Nessel, R.J., Aachen
Pachale, H., Berlin
Pawelke, S., Aachen
Pfluger, A., Zürich
Scherer, K., Aachen
Schulte, H., Aachen
Stark, E.L., Aachen
Trebels, W., Aachen
Weiss, G., Genf; St. Louis, Missouri
Weston, J.D., Swansea
Westphal, U., Aachen
Widder, D.V., Cambridge, Massachusetts
Zaanen, A.C., Leiden

Die Vorträge in chronologischer Reihenfolge:

Widder, D.V.: Some Analogies from Classical Analysis in the Theory of Heat Conduction

There are many analogies between solutions of the heat equation and analytic functions of a real variable. This päper aims to exhibit them in such a way as to clarifly existing theory and to stimulate further research. In particular, a criterion for the expamsibility of a temperature function in series of temperature polynomials is seen to be analogous to the familiar criterion of analyticity for the expansibility of a function in power series. Other standard expansions of solutions will be compared, in a similar way, with Laurent series.

Weiss, G.: Complex Methods associated with Harmonic Analysis of Several Variables

We extend to several dimensions the classical theory of H^p spaces of analytic functions defines (a) in the interior of the unit circle, and (b) in the upper half-plane. In each of these cases, two different types of generalizations are possible. One arises from the extension of the theory of analytic functions of one variable to that of analytic functions of several variables. In this connection we obtain tho following extension of the H^p spaces associated with the upper halfplane: Suppose B is an open connected subjet of Euclidean n-space E_n, then the tube with base B is the set $T_B = \{z = x+iy; x \in E_n, y \in B\} \subset C_n$. If $p > o$ we define the space $\mathfrak{h}_p = \mathfrak{h}_p(T_B)$ to consist of all functions F that are analytic in T_B and satisfy

$$\int_{E_n} |F(x+iy)|^p dx \leq M < \infty \quad \text{for all} \quad y \in B.$$

Another generalization arises if we consider an analytic function $F = u+iv$ as a pair of harmonic functions satisfying certain relations. For example, in this classical case, u and v satisfy Cauchy-Riemann equations $u_y = -v_x$ and $u_x = v_y$. In a simply connected region these are equivalent to the existence of a harmonic function h such that grad $h = \nabla h = (v, u)$. Thus we may take as a generalization of an analytic function a vectorvalued function $F = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ that is (locally) a gradient of an harmonic function u(i.e. $u_j = \partial u/\partial x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$). If such a function F is defined in the upper half-space $E^+_{n+1} = \{(x,y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in E_{n+1}; \ y > o\}$

we say that it belongs to $H^p = H^p(E^+_{n+1})$, $p > o$ if $\int_{E_n} |F(x,y)|^p dx \leq M < \infty$ for all $y > o$. A large part of this work has been done in collaboration with E.M. Stein.

Meyer, Y.: Endomorphismes des idéaux fermés de $L_1(G)$ compatibles avec les translations

Si φ est définie sur $R - E$ (E fermé de R) et si pour toute $\hat{f}$ nulle sur $E, \varphi.\hat{f}$, prolongée par o sur E appartient à $A(R)$, φ se prolonge en une fonction de $B(R)$, quand E est sans intérieur. Le résultat est inexact si E a un intérieur.

Behrens, H.: Äquivalente Definitionen des infinitesimalen Erzeugers höherer Ordnung von Halbgruppen von Operatoren.

Sei X ein reeller oder komplexer (B)-Raum. Die Elemente von X bezeichnen wir mit f und mit $\|f\|$ ihre Norm. Weiter sei $\{T(t);\ t \geq o\}$ eine einparametrige Halbgruppe von Operatoren der Klasse (C_o) auf X. A sei der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe ($A = : s - \lim_{t \to o+} A_t f$; $A_t f \equiv t^{-1}[T(t) - I]f$, wann immer er existiert) und $D(A)$ sein Definitionsbereich. Die Operatoren A^n (n ganz ≥ 1) sind iterativ definiert.

Es wurde der folgende Satz bewiesen: Für die n-te Riemann-Differenz C_t^n (n ganz ≥ 1, $t > o$) definiert auf X durch $C_t^n f \equiv (A_t)^n f$ gelten:

(i) Seien $f_o, g_o \in X$ und $\lim_{t \to o+} \| C_t^n f_o - g_o \| = o$, dann folgt $f_o \in D(A^n)$ und $A^n f_o = g_o$.

(ii) Für jedes $f \in D(A^n)$ gilt $\| C_t^n f \| \leq \sup_{o \leq \tau \leq nt} \{ \| T(\tau) \| \} \cdot \| A^n f \|$.

(iii) Ist X reflexiv und $f_o \in X$ mit $\lim_{t \to o+} \| C_t^n f_o \| < +\infty$, dann ist $f_o \in D(A^n)$.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von Ergebnissen von P.L. Butzer (Math. Ann. 133) über den Operator A_t auf X, sowie von P.L. Butzer und H.G. Tillmann (Math. Ann. 140) über die n-te Taylor-Differenz B_t^n auf $D(A^{n-1})$. Weiter wurden für beschränkte $\{T(t),\ t \geq o\} \in (C_o)$ auf X Aussagen vom Plessnerschen Typus (A. Plessner, J. rein. angew. Math. 160) gegeben sowie Anwendungen auf das singuläre Integral von Abel-Poisson auf dem Raume $C_{2\pi}$.

Igari, S.: On the Operating Functions on $\hat{A}^2$

Let $\hat{A}^2$ be the Banach algebra which is introduced by A. Beurling: Ann. Inst. Fourier, Grenoble 14 (1964). Beurling's theorems show that the Lipschitz-1 fonctions operate on this space and consequently that spectral synthesis is possible.

We shall deal the reciprocal problem, that is, we shall show that the only functions which satisfy the Lipschitz-1 condition on every compact set, operate on $\hat{A}^2$.

We will consider also other soaces which are near to $\hat{A}^2$.

Askey, R.: Transplantation Theorems for Orthogonal Series

Let $|f(\theta)|^p (\sin\theta)^\alpha \in L^1(o,\pi)$, $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < p-1$. Then form the Fourier cosine series $\Sigma a_n \cos n\theta$, and, using the same a_n, the series $g_r(\theta) = \Sigma a_n \sqrt{n+1/2}\; r^n P_n(\cos\theta)(\sin\theta)^{1/2}$, where $P_n(x)$ is the Legendre polynomial. Then there is $g(\theta)$ such that $g_r(\theta) \to g(\theta)$ a.e. and $\int_0^\pi |g(\theta)|^p (\sin\theta)^\alpha d\theta \le A_p \int_0^\pi |f(\theta)|^p (\sin\theta)^\alpha d\theta$. Similarly one may start with the Legendre expansion and obtain a bounded operator to the Fourier series. Using this result one can obtain a new proof of H. Pollard's result on mean convergence and the B. Muckenhaupt-E. Stein multiplier theorem, which is the analogue of the Marcinkiewicz theorem. Similar results hold for ultraspherical series. There is also a dual theorem in which $f(\theta)$ is fixed and the mapping goes between $a_n = \int_0^\pi f(\theta)\cos n\theta\, d\theta$ and $b_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos\theta)(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta$ as well as extensions to ultraspherical cofficients. Closely related work of Muckenhaupt and Stein and of D. Iny was described as was some work of J. Baxter. This is joint work with J. Wainger.

Weston, J.D.: A Representation Theory for a Class of Operators

A Banach space of continuous functions on the half-line is considered, and a class of linear operators on this space is defined by a minimal set of postulates, including commutation with shift operators. It is shown that any operator of this class can be represented by a Stieltjes convolution integral, and hence that the operators form a commutative Banach algebra with no divisors of zero. The Wiener-Pitt phenomenon occurs, and there

are applications to the theory of certain physical systems.

Nessel, R. J.: Über die Saturation mehrdimensionaler singulärer Integrale vom Fourierschen Faltungstyp.

Es sei E^n der n-dimensionale Euklidische Raum, $f \in L_p(E^n)$, $1 \leq p \leq 2$, und ein Approximationsverfahren durch ein singuläres Integral vom Fourierschen Faltungstyp

$$(1) \qquad K(f;x;\rho) = (2\pi)^{-n/2} \int_{E^n} f(x-u)\, k(u;\rho)\, du$$

gegeben, wobei die Funktion $k(u;\rho) \in L_1(E^n)$ ein Kern und ρ ein positiver Parameter ist. Es ist bekannt, daß unter diesen Voraussetzungen die Relation

$$(2) \qquad \lim_{\rho \to \infty} \| K(f;\cdot;\rho) - f(\cdot) \|_p = o$$

gilt. Auf Grund von (2) stellt sich nun die Aufgabe, die bestmögliche Approximation (Saturation) des Verfahrens (1) für nichttriviale f zu bestimmen und die zugehörige Klasse von Funktionen zu charakterisieren. Dieses Problem kann mit einer Integraltransformationsmethode angegangen werden, die im Eindimensionalen von P. L. Butzer entwickelt wurde. Es zeigt sich, daß hiermit für eine ziemlich allgemeine Klasse von radialen Kernen die Saturationsaufgabe vollständig gelöst werden kann. Darunter fallen insbesondere die Integrale von Gauß-Weierstraß, Cauchy-Poisson und Bochner-Riesz.

Pfluger, A.: Bemerkungen zur Charakterisierung von Fourier-Stieltjes transformationen

Es sei A_1 die Klasse der Fouriertransformierten von Funktionen aus $L^1(-\infty,\infty)$, die selbst wieder aus L^1 sind. Dann ist das Funktional

$$\Lambda(\varphi) = \int F(y)\, (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(y)\, dy ,$$

wo F beschränkt und stetig sein soll auf $(-\infty,\infty)$, auf A_1 in Bezug auf die Supremumnorm beschränkt bzw. beschränkt und absolut stetig bzw. positiv genau dann, wenn F die Fourier-Stieltjes-Transformierte eines endlichen Maßes, eines absolut stetigen endlichen Maßes oder eines positiven endlichen Maßes ist. Ist $M \in L^1$, $\hat{M} \in A_1$, $\hat{M} \geq o$ und $M(o) = 1$, setzt man $M_R(x) = M(\frac{x}{R})$, $\hat{M}_R = m_R$,

$$g_R(x) = \int F(y)\, e^{-ixy} M_R(y)\, dy$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

und

$$\Lambda_R(\varphi) = \int g_R(u)\,\varphi(u)\,du\,,$$

so gilt $\Lambda_R(\varphi) = \Lambda(m_R * \varphi)$ und $\lim\limits_{R\to\infty} \Lambda_R(\varphi) = \Lambda(\varphi),\ \varphi \in A_1$.

Daraus ergeben sich die Cramérschen Darstellungssätze (TAMS 46 (1939)) ohne Benutzung eines Helly'schen Auswahlsatzes. Das obige Funktional Λ wurde von F. Riesz (Acta Szeged, 5/6, 1930-34, p. 184-198) zum Beweis des Bochnerschen Darstellungssatzes verwendet.

Balaguer, F.S.: Approximation des fonctions par sommes d'exponentielles.

Dans cette exposition nous caracterisons la classe des fonctions qui peuvent être representées dans une demi-bande avec une b-precision logarithmique suffisante par des sommes d'exponentielles pour une direction donnée quelconque de la demi-bande. C'est-à-dire il s'agit de determiner des condotions nécessaires et suffisantes afin que la fonction appartienne a la classe.

Erdélyi, A.: Asymptotic expansions of integral transforms.

An examination of known asymptotic expansions of Laplace integrals shows that the traditional concept of asymptotic expansions, which originated in the work of Poincaré, no longer forms an adequate framework for current research. A more general concept, similar to but not identical with the definition given by H. Schmidt in 1936, was proposed. Let $\{\Phi_n\}$ be an asymptotic sequence or scale, i.e., such that $\Phi_{n+1} = o(\Phi_n)\ \forall\ n$. The formal series Σf_n is said to be an asymptotic expansion of the function f with respect to the scale $\{\Phi_n\}$ if, for each N, $f - \sum\limits_{n\leq N} f_n = o(\Phi_N)$.

Thus, only the remainders, and not the individual terms, of the series are related to $\{\Phi_n\}$. There is a complete lack of uniqueness making on the hand for considerable adaptability, and on the other hand for difficulties in the construction of expansions. Some general properties of asymptotic expansions were mentioned as were examples of their applications.

Dinghas, A.: Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$I_o = [a, b]$ (a, b endlich) sei ein Intervall von R, f eine stetige Abbildung von I in R (allgemeiner in einen Banachraum) und

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$D^n(I_o, f) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(\left(1-\frac{k}{n}\right) a + \frac{k}{n} b\right).$$

Man setze für $k = o, 1, \ldots, n$; $I_k = \left[\frac{k}{2n}, \frac{k}{2n} + \frac{1}{2}\right]$ und

$$D^n(I_k, f) = \frac{1}{|I_k|^n} \sum_{1=o}^{n} (-1)^1 \binom{n}{1} f\left(\left(1-\frac{k+1}{2n}\right) a + \frac{k+1}{2n} b\right).$$ Dann gilt die Identität

(1) $D^n(I_o, f) = \sum_{k=o}^{n} \mu_k(n)\, D^n(I_k, f)$ mit $\mu_k(n) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$.

(1) gestattet die Anwendung des Goursatschen Verfahrens und den Beweis des Satzes:

Gilt $\lim\limits_{d(I) \to o} D^n(I, f) = o$, so ist f ein Polynom vom Grade $\leq n-1$.

Anwendung auf die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen: Man setze: (für alle $x \in I_o$)

$$D^x f(x) = \lim_{|I_x| \to o} (-1)^n D^n(I_x, f)$$

(sofern der Grenzwert existiert) und nehme an, f genüge einer Gleichung von der Form (2) $D^n f(x) = g(x, f(x))$ (mit einem stetigen g) in (a, b). Dann ist f n-mal differenzierbar und Lösung von (2).

Akutowicz, E. J.: Construction of a Schauder Basis in some Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Disc.

A sequence of vectors $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ in separable Banachspace B is a Schauderbasis if every $\varphi \in B$ can be expressed as $\varphi = \sum_k c_k \varphi_k$ convergent in B, with scalar coefficients uniquely determined by φ. An explicit construction of a Schauder basis (one and the same sequence of functions) can be given in the Hardy space H^p, $1 \leq p < \infty$, and in the space A of functions holomorphic in $|z| < 1$ and continuous in $|z| \leq 1$. Indeed, let $z_1, z_2, \ldots$ be an infinite sequence of points on the circle $|z| = 1/2$, where z_n is such that the product of the distances from z_n to $z_1, \ldots, z_{n-1}$ is maximum; in case of ambiguity take z_n to have smallest possible positive argument.

Put

$$B_o(z) = 1; \; B_n(z) = \prod \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \; \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z_k}.$$

The required Schauder series is then

$$\varphi = \sum_{n=o}^{\infty} c_n B_n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \varphi(t)\, \gamma_n(t)\, dt$$

and $\gamma_o(t), \gamma_1(t), \ldots$ is a sequence of functions such that

$$\gamma_o(t) B_o(z_k) + \gamma_1(t) B_1(z_k) + \ldots + \gamma_k(t) B_n(z_k) = \frac{1}{t - z_k} \; ; \quad k = 1, \ldots n+1 \; .$$

Luxemburg, W.A.J.: An Introduction to Non-Standard Harmonic Analysis

Let R be the field of real numbers and let k_o be the set of all sentences which are formulated in some higher order language L and which hold in R. Let *R be a non-standard model of k_o, which is a proper extension of R. Let $\omega \in {}^*N - N$ be an infinitely large natural number and let $\omega' = 2\omega+1$. By $^*Z(\omega')$ we denote the additive group of integers mod ω'. Then $^*Z(\omega')$ is a finite group in the sense of the model *R of R. The dual group of $^*Z(\omega')$ will be denoted by $^*T(\omega')$. The theory of harmonic analysis of finite groups as far as it is expressible in the language of *R can then be used to obtain the classical results of the theory of Fourier series.

Hartman, St.: Einige neue Ergebnisse aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen und ihrer Fourierentwicklungen

Es sei G eine lokal kompakte abelsche Gruppe. Für E G bedeutet $E \in I_o$ folgendes: Jede auf E erklärte beschränkte Funktion kann zu einer fastperiodischen Funktion auf ganz G erweitert werden; $E \in I$ bedeutet, daß jede beschränkte und gleichmäßig stetige Funktion auf E zu einer fastperiodischen Funktion erweitert werden kann.

Wenn $E \in I_o$, so ist die Abschließung $\widetilde{E}$ in der Bohrschen Kompaktifizierung $\widetilde{G}$ von G eine Helsonsche Menge (Kahane) und somit $|\widetilde{E}| = o$ ($|\cdot|$ = Haarsches Maß in $\widetilde{G}$).

Wenn $E \in I_o$ und G separabel ist, so existiert eine Umgebung V des Nullelements in G, für welche $E + V = I$ (Hartmann und Ryll-Nardzewski).
Wenn $E \in I$, dann gilt $|\widetilde{E}| = o$ für $G = R$ (Hartmann und Ryll-Nardzewski).
Ist G separabel und nicht kompakt und $E \in I_o$, so gilt $E + K = G$ für kein Kompaktum $K \subset G$.

Günzler, H.: Integration fastperiodischer Funktionen

In Verallgemeinerung von Sätzen von Amerio, Bochner, Bohr, Doss und Kopec wird gezeigt: Ist F eine Funktion, die auf einer Halbgruppe definiert

ist mit Werten in einer torsionsfreien abelschen lokalkonvexen Gruppe E, so ist F genau dann fastperiodisch, wenn alle "Differenzen" $F_a(t) := F(at)-F(t)$ fastperiodisch sind und wenn F totalbeschränkten Wertevorrat hat; ist E ein uniform-konvexer Banachraum, so kann man dabei "totalbeschränkt" durch "beschränkt" ersetzen. Die F_a sind speziell fastperiodisch, wenn $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ und f eine Stepanoff-fastperiodische Funktion auf der Zahlengeraden ist; so ergeben sich Sätze von Love, Prouse, Vasconi. Auf weitere Analoga und Anwendungen wird kurz eingegangen.

Zaanen, A.C.: Riesz Spaces

Several properties of Riesz spaces (linear vector lattices) are discussed, related to the order structure (Dedekind completeness and projections on bands), the existence of positive linear functionals (decomposition of a positive linear functional into an integral and a singular functional), and the norm topology structure in the case that a monotone norm (Riesz norm) exists. In this case the following conditions are equivalent: (i) For any directed set $f_\tau \downarrow o$ in the Riesz space L we have $\|f_\tau\| \downarrow o$. (ii) Every norm closed ideal in L is a band. (iii) Every band in the Banach dual space L* is weak star closed. (iv) The imbedding of L into L** preserves suprema (and infima) of arbitrary subsets.

SZ-Nagy, B.S.: Über einparametrige Halbgruppen von Operatoren im Hilbertraum

Die infinitesimalen Generatoren $-A = \lim_{s \to o} 1/s(T_s - I)$ von Halbgruppen $\{T_s\}_{s \geq o}$ von Kontraktionen eines Banachschen Raumes B, die üblicherweise durch den Satz von Hille und Yosida charakterisiert werden, lassen sich im Falle eines Hilbertschen Raumes H durch die folgende einzige Bedingung charakterisieren: $T = (A-I)(A+I)^{-1}$ ist in H überall definiert und $\|T\| \leq 1$. T heißt der "infinitesimale Kogenerator" der Halbgruppe $\{T_s\}$; dieser hat niemals den Eigenwert 1. Umgekehrt, es läßt sich zeigen, daß jede Kontraktion T in H, die 1 nicht als Eigenwert besitzt, infinitesimaler Kogenerator einer Kontraktionshalbgruppe ist, die durch T eindeutig bestimmt wird. - Die Halbgruppe $\{T_s\}_{s \geq o}$ und ihr infinitesimaler Kogenerator bestimmen sich gegenseitig durch bestimmte Gleichungen. T_s besteht aus normalen, unitären, selbstadjungierten, isometrischen Opera-

toren dann und nur dann, wenn T normal, unitär, selbstadjungiert, isometrisch ist. Auf diese Weise lassen sich vielerlei Sätze, die man für eine Kontraktion des Hilbertschen Raumes besitzt, in der Untersuchung von Kontraktionshalbgruppen benutzen.

Huber, A.: Ein Darstellungssatz für vollständige konforme Metriken

Es wird ein Beweis des folgenden Resultates skizziert:
SATZ: Sei $u(z)$ eine im Gebiete $\Omega = \{z | R < |z| < \infty, \; R > o\}$ definierte, reellwertige und zweimal stetig differenzierbare Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(a) $$\iint\limits_{\Omega} |\Delta u| \, dx\, dy < \infty ,$$

(b) $$\int e^{u(z)} |dz| = \infty \text{ für jeden ins Unendliche führenden Weg } \gamma .$$

Dann besitzt u die Darstellung (*)

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| \Delta u(\zeta)\, d\xi\, d\eta + c \log|z| + h(z)$$

$(\zeta = \xi + i\eta)$, wobei c eine Konstante und $h(z)$ eine in Ω und im Unendlichen harmonische Funktion bezeichnet. - Damit wird eine Frage von R. Finn [Comment. Math. Helv. 40 (1965)] beantwortet. R. Finn konnte die Darstellung (*) beweisen unter der zusätzlichen Annahme, daß die Menge $\{z | \Delta u(z) < o\}$ beschränkt ist.

Kahane, J. P.: Séries de Fourier aléatoires

Il s'agit des séries (0) $\sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{int}$, où les x_n sont des variables aléatoires complexes, indépendantes en bloc, et symétriques (c'est a dire que x_n et $-x_n$ sont la même distribution).

Exemples: (1) $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i \omega_n} e^{int}$, où les ω_n sont équiréparties sur $[o, 1]$
(2) $\sum_{-\infty}^{\infty} \pm a_n e^{int}$, où les $\pm$ représentent +1 et -1 avec égale probabilité
(3) $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n Z_n e^{int}$, où les Z_n sont des variables gaussiennes normales complexes dans les trois cas, les a_n sont des coefficients réels ou complexes (non aléatoires).

Problèmes: I) découvrir pour les séries (0) des classes de propriétés équivalentes, c'est a dire ayant même probabilité pour chaque serie (0);
II) trouver, pour telle propriété fixée, la probabilité d'être satisfaite par (1), (2), ou (3), en fonction des a_n.

I) Les résultats les plus remarquables sont (Paley-Zygmund 1930; Billard 1960) 1) l'équivalence des propositions suivantes: a) p.s. (o) $\in L^2$; b) P.s. (o) $\in \bigcup_{1\leq p<\infty} L^p$; c) p.s. (0) $\in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p$; d) en un point fixé p.s. (o) converge; e) p.s. (o) converge presque partout. 2) l'équivalence des propositions suivantes; a) p.s. (o) $\in L^\infty$; b) p.s. (o) $\in C$; c) p.s. converge en tout point; d) p.s. (o) converge uniformément.

II) Une série de résultats fait intervenir

$$s_j = \Big(\sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} |a_n|^2 \Big)^{1/2} .$$

Exemples: $s_j \downarrow$ et $\sum_1^\infty s_j < \infty \to$ (i) $\in L^\infty$ p.s. (i = 1, 2, 3); $\sum_1^\infty s_j = \infty \to$ (i) $\notin L^\infty$ p.s.; $s_j \underset{j\to\infty}{=} 0 \quad (2^{-j\alpha})$ $(0<\alpha<1)$ p.s. $\omega(h) = 0$ $(h^\alpha\sqrt{\log 1/h}$

ω, module de continuité de la fonction représentée par (i)).

Krabbe, G.: Lafayette, Ind. (vorgelegt "in absentia") Multipliers of Type $L^p(-\infty, \infty)$

Let $1 < p < \infty$; if f is of locally bounded variation on the real line $(-\infty, \infty)$, there exists a unique bounded linear operator T_f in the Banach space $L^p(-\infty, \infty)$ such that the relation

$$[T_f x]^\wedge = f \cdot [x]^\wedge$$

holds whenever x is a step function of $(-\infty, \infty)$ with compact support. (Here $[\dots]^\wedge$ denotes the Fourier transform of $[\dots]$.) The proof of this theorem can be inferred from the contents of two papers of mine [''A space of multipliers of type $L^p(-\infty, \infty)$'' Pac. J. Math. 9 (1959) 729-737, and ''Normal operators on the Banach space $L^p(-\infty, \infty)$'', Canad. J. Math. 13 (1961) 505-518]. This theorem may be discussed in the light of the theory of distributions and Hörmander's work on translation-invariant operators.

Zygmund, A.: Chicago, Ill. (vorgelegt "in absentia"). On the Non-Existence of Hilbert Transforms in n-Dimensions.

It es known that if $f(x) \in L^p(E_n)$, $K(x) = \Omega(x')/|x|^n$, $x' = x/|x|$, and $\Omega(x')$ is in the class $L \log^+ L$ on the unit sphere $(\Sigma)|x'| = 1$, then the convolution $\tilde{f} = f * K$ exists in the principal value sense for almost all $x \in E_n$. It can now be shown that the requirement that Ω is in $L \log^+ L$

on Σ is best possible: for any weaker condition we can find a continuous f in $L^P(E_n)$ such that the convolution $\tilde{f}$ diverges almost everywhere. The result war obtained jointly with Prof. Mary Weiss.

Peetre, J.: Einige Anwendungen der Theorie der Interpolationsräume

Es seien A_o, $A_1 \subset \mathfrak{A}$ Banachräume. Man setze $K(t,a) = \inf_{a=a_o+a_1} (\|a_o\|_{A_o} + t\,\|a_1\|_{A_1})$, $0 < t < \infty$. Dann erhält man Interpolationsräume $\mathbb{K}(\Phi)$, wenn man auf $a \in A_o + A_1 \subset \mathfrak{A}$ die Bedingung $\Phi[K(t,a)] < \infty$ setzt, wobei $\Phi = \Phi[\varphi]$ ein geeignetes Funktional ist, z.B. $\Phi[\varphi] = \Phi_{b,p}[\varphi] = \left(\int_0^\infty (t)^{-b}\varphi(t))^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}$, $0 < b < 1$, $1 \leq p \leq \infty$. Ähnliche Räume $\mathbb{J}\,(\Phi)$ erhält man mit einer dualen Konstruktion, jetzt von $J(t,a) = \max(\|a\|_{A_o}, \|a\|_{A_1})$ ausgehend. (Beispiel: (1) Wenn $A_o = L_{p_o}$, $A_1 = L_{p_1}$, $\Phi = \Phi_{b,p}$, $\frac{1}{p} = \frac{1-b}{p_o} + \frac{b}{p_1}$, dann gilt $\mathbb{K}(\Phi) = \mathbb{J}\,(\Phi) = L_p$.

Anwendung: Aus (1) folgt sehr einfach der bekannte Satz: Es sei $P_\alpha f(x) = \int |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$, $0 < \alpha < n =$ Dimension. Dann folgt aus $f \in L_p$, daß $P_\alpha f \in L_q$, wobei $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$. Weitere Anwendungen der gleichen Art sind möglich.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft