18

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Komplexe Analysis

30. 8. - 4. 9. 1965

Unter der Leitung von H. GRAUERT, R. REMMERT und K. STEIN fand in der Woche vom 30. August bis zum 4. September 1965 auf dem Lorenzenhof in Oberwolfach nach dreieinhalb Jahren wieder eine Tagung über "Komplexe Analysis" statt. Es wurden 22 Vorträge über neuere Ergebnisse aus verschiedenen Gebieten der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen gehalten.

Teilnehmer:

Abels, H., Würzburg

Bergmann, S., Stanford (USA)

Bremermann, H. J., Berkeley (USA)

Cartan, H. und Frau, Paris (Frankreich)

Douady, A., Paris (Frankreich)

Dolbeault, P. und Frau, Poitiers (Frankreich)

Fischer, G., Erlangen

Fischer, W., Göttingen

Forster, O., München

Frenkel, J., Straßburg (Frankreich)

Frisch, J., Viry-Chatillon (Frankreich)

Grauert, H., Göttingen

Güntzer, U., Göttingen

Holmann, H., Münster

Kaup, W., Erlangen

Kerner, H., München

Königsberger, K., Göttingen

Koestner, A., Münster

Kopfermann, K., Münster

Lelong, P., Paris (Frankreich)

Oeljeklaus, H., Würzburg

Peters, K., Heidelberg

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Komplexe Analysis

29.8. – 4.9.1965

Unter der Leitung von Prof. H. GRAUERT, R. REMMERT und K. STEIN fand in der Woche vom 29. August bis zum 4. September 1965 auf dem Lorenzenhof in Oberwolfach die diesjährige Tagung über Komplexe Analysis statt. Es wurden [illegible] Vorträge über neuere Ergebnisse aus [illegible] Gebieten der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen gehalten.

Teilnehmer:

[illegible]ls, H., Würzburg

Bergmann, [illegible], Stanford (USA)

Bremermann, H.J., Berkeley (USA)

Cartan, H. und Frau, Paris (Frankreich)

[illegible], [illegible], Paris (Frankreich)

Dolbeault, P. und Frau, Poitiers (Frankreich)

[illegible], [illegible], Erlangen

Fischer, W., Göttingen

Forster, O., München

Frenkel, J., Strasbourg (Frankreich)

Frisch, J., [illegible]ry-Châtillon (Frankreich)

Grauert, H., Göttingen

[illegible]untzer, F., Göttingen

Holmann, H., Münster

Kaup, W., [illegible]

Kerner, H., München

Königsberger, K., Göttingen

Koecher, M., Münster

Kopfermann, K., Münster

Lelong, P., Paris (Frankreich)

Oeljeklaus, E., Würzburg

Peters, K., Heidelberg

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Ramspott, K. J., München

Reiffen, H. J., Münster

Remmert, R., Göttingen

Rischel, H., Kopenhagen (Dänemark)

Röhrl, H., San Diego (USA)

Siciak, J., Krakau (Polen)

Simba, R. R., München

Spallek, K., Münster

Spilker, J., Freiburg

Sommer, F., Würzburg

Stein, K., München

Stoll, W., Notre Dame (USA)

Thimm, W., Bonn

Van de Ven, A. und Frau, Leiden (Niederlande)

Wells Jr., R. O. und Frau, New York (USA)

Whitney, H., Princeton (USA)

Wiegmann, K. W., München

Wolffhardt, K., München

Die folgenden Zusammenfassungen beruhen auf teilweise gekürzten Berichten der Autoren:

Whitney, H.: Geometrische Eigenschaften komplexer Räume

Beim Aufbau der Theorie der komplexen Räume stützt man sich üblicherweise auf tiefliegende Sätze der Algebra und Analysis. Man kommt jedoch mit einfachen Hilfsmitteln weitgehend aus, wenn man die Methoden von Remmert und Stein verallgemeinert. Insbesondere kann man elementar beweisen:

I (Remmert-Stein): Die abgeschlossene Teilmenge W eines Gebietes H des t^n sei Vereinigung abzählbar vieler komplexer Mannigfaltigkeiten der Dimension $< r$. Ist V in $H \setminus W$ analytisch und von der Dimension $\equiv r$, so ist $\bar{V}$ in H analytisch.

II (Remmert-Kuhlmann): Die Bildmenge bei einer halbeigentlichen holomorphen Abbildung ist analytisch. ($f : V \to W$ heißt halbeigentlich, wenn es zu jedem Kompaktum $Q \subset W$ ein Kompaktum $K \subset V$ gibt, so daß $f(K) = Q \cap f(V)$

Ramspott, K.J., München
Reiffen, H.-J., Münster
Remmert, R., Göttingen
Rischel, H., Kopenhagen (Dänemark)
Röhrl, H., San Diego (USA)
[illegible]
[illegible], München
[illegible], Münster
[illegible], Freiburg
[illegible]mmer, [illegible], Würzburg
Stein, K., München
Stoll, W., Notre Dame (USA)
Thimm, W., Bonn
Van de Ven, A., Leiden (Niederlande)
Wells Jr., R.O., [illegible], New York (USA)
Whitney, H., Princeton (USA)
Wiegmann, K.W., München
Wolff, [illegible], München

Die folgenden Zusammenfassungen beruhen auf teilweise gekürzten Protokollen der Vortragenden:

[illegible], H.: Geometrische Eigenschaften komplexer Räume

Bei der Untersuchung der Theorie der komplexen Räume stützt man sich üblicherweise auf die [illegible] und Analysis. Man kommt jedoch mit einfachen Hilfsmitteln [illegible], wenn man die Methoden von Remmert und [illegible] verallgemeinert. Insbesondere kann man folgende Sätze beweisen:

I (Remmert-Stein): Die abgeschlossene Teilmenge W eines Gebietes H des C^n sei Vereinigung abzählbar vieler komplexer Mannigfaltigkeiten der Dimension < r. Ist V in H − W analytisch und von der Dimension = r, so ist $\bar{V}$ in H analytisch.

II (Remmert-[illegible]): Die Bildmenge bei einer holomorphen eigentlichen holomorphen Abbildung ist analytisch. (f : V → [illegible] heißt eigentlich, wenn es zu jedem Kompaktum [illegible] ein Kompaktum K ⊂ V gibt, so daß f(K) = [illegible] ∩ f(V) ist).

Nützlich zum Beweis ist folgendes Lemma: Es sei $f : V \to W$ holomorph, $M \subset V$ eine Mannigfaltigkeit, und $\mathrm{rang}_p f|M = \mathrm{rang}\, f$ $(p \in M)$. Dann liegt jedes $p \in M$ in einer Umgebung U, so daß für jede irreduzible Komponenten X von $V \cap U$ mit $M \cap U \subset X$ gilt: $f(X) = f(M \cap U)$. Zum Beweis von II benutzen wir, daß die Menge $Z_k(V) := \{p \in V : \mu(V,p) \geq k\}$ analytisch ist, wenn $\mu(V,p)$ die Miltiplizität von V in p ist; siehe Ann. Math. 81 (1965) 496-549.

Kerner, H.: Deformation komplexer Räume

Sei X ein komplexer Raum, M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\pi : X \to M$ eine holomorphe Abbildung. Jede Faser $X_t := \overset{-1}{\pi}(t)$, $t \in M$, wird in natürlicher Weise mit der Struktur eines komplexen Raumes versehen. $\pi : X \to M$ heißt eine Familie komplexer Räume. Es werden platte reduzierte Familien untersucht. Eine reduzierte Familie $\pi : X \to M$ ist platt, wenn π eine offene Abbildung ist.

Zu jedem reduzierten komplexen Raum X_o kann man die Garbe $T_1(X_o)$ der "infinitesimalen Deformationen" von X_o definieren. Von H. Grauert wurde bewiesen: Ist $T_1(X_o) = 0$, so ist X_o starr, d.h. jede platte reduzierte Familie $\pi : X \to M$ mit $X_o = \overset{-1}{\pi}(0)$, $0 \in M$, ist in jedem Punkt von X_o lokal-trivial. Jede platte reduzierte Familie $\pi : X \to M$, $\dim M = 1$, $\overset{-1}{\pi}(0) = X_o$, erzeugt ein Element aus $T_1(X_o)$. Es wird gezeigt: Ist X_o ein vollständiger Durchschnitt, so gibt es zu jeder infinitesimalen Deformation $\zeta \in T_1(X_o)$ eine platte reduzierte Familie mit X_o als Faser über einem Punkt $0 \in M$, die diese infinitesimale Deformation ζ erzeugt.

Thimm, W. Fortsetzungsprobleme bei kohärenten analytischen Garben

Es sei X ein Serrescher komplexer Raum; A sei eine analytische Menge in X mit $\mathrm{codim}\, A \geq 1$ und $X' = X \setminus A$. Es sei x ein Punkt von A. Die folgenden Fortsetzungsprobleme werden behandelt:

1. Allgemeines Fortsetzungsproblem. $\mathfrak{F}'$ sei eine kohärente analytische Garbe über X'. Gibt es eine Umgebung U_x von x und in U_x eine kohärente analytische Garbe $\mathfrak{F}^*(U_x)$ derart, daß $\mathfrak{F}^*(U_x)|U_x \setminus A$ analytisch isomorph ist zu $\mathfrak{F}'|U_x \setminus A$?

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

2. Spezielles Fortsetzungsproblem 1. Art. $\mathfrak{J}'$ sei über X' eine kohärente alanytische Untergarbe der in X definierten kohärenten analytischen Garbe $\mathfrak{G}$. Gibt es eine Umgebung U_x von x und in U_x eine kohärente analytische Untergarbe $\mathfrak{J}^*(U_x)$ und $\mathfrak{G}|U_x$ derart, daß $\mathfrak{J}^*(U_x)|U_x\backslash A$ analytisch isomorph ist zu $\mathfrak{J}'|U_x\backslash A$?

3. Spezielles Fortsetzungsproblem 2. Art. $\mathfrak{J}'$ sei über X' eine kohärente analytische Untergarbe der in X definierten kohärenten analytischen Garbe $\mathfrak{G}$. Gibt es eine Umgebung U_x von x und in U_x eine kohärente analytische Untergarbe $\mathfrak{J}^*(U_x)$ von $\mathfrak{G}|U_x$ derart, daß $\mathfrak{J}^*(U_x)|U_x\backslash A$ als Untergarbe von $\mathfrak{G}|U_x\backslash A$ identisch sind?

Im Fall codim $A = 1$ und bei Modulgarben wird ein Entscheidungsverfahren für die speziellen Fortsetzungsprobleme entwickelt.

Ramspott, K. J.: Bemerkungen zum Okaschen Prinzip.

Bericht über eine gemeinsame Arbeit mit O. Forster. Sei X ein komplexer Raum und B ein holomorphes Faserbündel von Lieschen Gruppen über K. Es werden gewisse Paare $(\mathfrak{G}, \mathfrak{J})$ betrachtet, wobei $\mathfrak{G}$ eine Garbe von stetigen Schnitten in B ist und $\mathfrak{J}$ eine Untergarbe von $\mathfrak{G}$, bestehend aus holomorphen Schnitten in B. Es wird ein einfaches notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß $(\mathfrak{G}, \mathfrak{J})$ ein Okasches Paar ist, d.h. daß für jeden holomorph-vollständigen offenen Teilraum Y und jedes Rungesche Paar $Y_1 \subset Y$ in X folgendes gilt:

(H) $\pi_q(H^0(Y, \mathfrak{J})) \to \pi_q(H^0(Y, \mathfrak{G}))$ ist bijektiv, $q = 0, 1, 2, \ldots$,

(C) $H^1(Y, \mathfrak{J}) \to H^1(Y, \mathfrak{G})$ ist bijektiv.

(A) Ist $f \in H^0(Y_1, \mathfrak{J})$ durch Elemente aus $H^0(Y, \mathfrak{G})$ approximierbar, so auch durch Elemente aus $H^0(Y, \mathfrak{J})$.

Ist $\mathfrak{G}$ die Garbe aller stetigen Schnitte von B und $\mathfrak{J}$ die Garbe aller holomorphen Schnitte von B, so ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{J})$ ein Okasches Paar. Dies ist der von H. Grauert behandelte Fall (Math. Ann. 133 (1957) 450-472).

Forster, O.: Topologische Hilfsmittel zur Untersuchung Steinscher Moduln

Es sei X ein holomorph-vollständiger Raum und $H(X)$ die Steinsche Algebra der auf X holomorphen Funktionen. M sei ein endlich erzeugter Steinscher

$H(X)$-Modul. Man kann jeder natürlichen Zahl k einen analytischen Faserraum $E \to X$ zuordnen mit folgender Eigenschaft: M kann genau dann durch k Elemente erzeugt werden, wenn E einen stetigen Schnitt besitzt. (Zum Beweis benützt man die Theorie der Okaschen Paare, vgl. den Vortrag von Ramspott).

Daraus ergibt sich z.B. folgender Satz: Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit, Y eine analytische Untermannigfaltigkeit, $I(Y)$ das Ideal aller auf Y verschwindenden holomorphen Funktionen und $I(Y)_c$ das von $I(Y)$ im Ring $C(X)$ der auf X stetigen Funktionen erzeugte Ideal. Dann besitzt $I(Y)$ genau dann ein Erzeugendensystem aus k holomorphen Funktionen, wenn $I(Y)_c$ über $C(X)$ durch k Elemente erzeugt werden kann.

<u>Frisch, J.:</u> Anneaux neotherien de fonctions holomorphes

Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite semi-analytique si elle peut être définie au voisinage de chaque point x de $\mathbb{R}^p$ par un nombre fini d'inegalités et d'egalités de la forme: $f \gtreqless 0$, ou f est un fonction analytique réelle au voisinage de x; une partie A de $\mathbb{C}^n$ est dite semi-analytique si elle l'est comme partie de $\mathbb{R}^{2n}$, (ex. un polydisque, une boule). On a le resultat suivant:

Si K est une partie semi-analytique compacte de $\mathbb{C}^n$ possédant un systeme fondamental de voisinages de Stein, alors l'anneau $H^o(K, 0)$ est noetherien (Resultat analogue en analytique réel).

Cf: C.R.Acd.Sci. Paris <u>260</u> (1965) 2974-2976.

<u>Douady, A.:</u> Problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné.

X est un espace analytique, on note 0_X son faisceau structural (qui peut avon des nilpotents). Si $f = (f_o, f_1)$ est un morphisme de X' dans X, f_o étant l'application sous-jacente et $f_1 : f_o^*(0_X) \to 0_{X'}$, l'homomorphisme qui définit f, pour tout faisceau $\mathfrak{F}$ sur X, on notera $f^*(\mathfrak{F})$ le faisceau $0_{X'} \otimes f_o^*(0_X)\, f_o^*(\mathfrak{F})$ sur X'.

Si S et X sont deux espaces analytiques, pour $s \in S$, on note i_s l'injection $X \to S \times X$, et si $\mathfrak{F}$ est un faisceau sur $S \times X$, on pose $\mathfrak{F}(s) = i_s(\mathfrak{F})$. Si $\mathfrak{G}$ est un faisceau sur X, on pose $\mathfrak{G}_S = p^*(\mathfrak{G})$, ou $p : S \times X \to X$ est la projection. $\mathfrak{G}_S$ est un faisceau sur $S \times X$ et on a $\mathfrak{G}_S(s) = \mathfrak{G}$ pour tout $s \in S$.

Théorème: Soit X un espace analytique et $\mathfrak{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors, il existe un espace analytique H et un quotient cohérent $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}_H/\mathfrak{R}'$ de $\mathfrak{F}_H$ tels que

1 $\mathfrak{R}$ est H-propre et H-plat,
(H-propre signifie que son sipport est propre sur H)

2 H et $\mathfrak{R}$ sont universels pour cette propriété:
$\forall$ S espace analytique, $\forall\ \mathfrak{G} = \mathfrak{F}_S/\mathfrak{G}'$ quotient cohérent de $\mathfrak{F}_S$, S-propre et S-plat, $\exists_1\ f : S \to H : \mathfrak{G} = (f \times I_X)^*(\mathfrak{R})$.

Pour démontrer ce théorème, qui ne comporte que de braves espaces analytiques de dimension finie, on est amené à considérer des espaces analytiques Banachiques.

Wells, R.: On the local hull of a real submanifold in $\mathbb{C}^n$

A set $K \subset \mathbb{C}^n$ is defined to be locally extendible at $p \in K$, if, for any sufficiently small ball B about p, there exists a connected set $\Omega \neq \emptyset$, $\Omega \cap K = \emptyset$ so that each holomorphic function defined in a domain containing $B \cap K$ can be continued analytically to a domain containing Ω. K is locally S_δ at p if $B \cap K = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, where the U_i are domains of holomorphy. Let M^k be a real k-dimensional C^∞ submanifold of C^n with complex vector fields $X_1, \ldots, X_m$ which generate the complex tangent spaces to M^k near $p \in M^k$. Setting T_p = (real tangent space), C_p = (complex tangent space), we define a Levi form at p, $L : C_p \to T_p/C_p$. To do this, take $v \in C_p$, then $v = \sum a_i X_i(p)$, and set $X = \sum a_i X_i$. Define $L(v) = \pi[X, \bar{X}](p)$ where π is the projektion of T_p into T_p/C_p.

Theorem 1: Let S be a real C^∞ hypersurface in $\mathbb{C}^n$.

(a) If $L \neq 0$ at $p \in S$, then S is locally extendible at p, and the local extension set is open.

(b) $L \equiv 0$ near p   S is locally S_δ at p.

Theorem 2: Let M^k be a real C^∞ k-dimensional submanifold of $\mathbb{C}^n$, $k > n$, with $k - n$ as complex dimension of the complex tangent space near p. Then: $L \neq 0$ at p M^k is locally extendible at p.

Theorem generalizes work of H. Lewy. Theorem 2 is proved by using a generalization of Bishop's results on the existence of analytic disces in $\mathbb{C}^n$

whose boundara lies on a given submanifold.

Van de Ven, A.: Some remarks on (almost) complex structures.

$P_2 + (S' \times S^3) + (S' \times S^3)$ is almost complex, but not complex. Apparently there is not even a connected compact complex surface with the same Chern numbers.

Lelong, P.: Fonctions entières et fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel

Une fonction $V(z) = V(z_1, \ldots, z_n)$ plurisousharmonique dans tout $\mathbb{C}^n$ est dite de type exponentiel fini γ si $\lim\sup \frac{1}{\|z\|} V(z) = \gamma < \infty$.

On étudie deux sortes d'indicatrices de croissance, selon qu'on considère un vecteur unité $\vec{1}$ de $\mathbb{R}^{2n}$, ou un vecteur complexe λ de $\mathbb{C}^n$.

a) On définit l'indicatrice rediale $h_r(\zeta, \vec{1})$ de centre ζ, fonction de $\vec{1}$ en posant

$$L_r(\zeta, z) = \lim\sup \frac{1}{t} V(\zeta + tz), \quad t \to \infty, \quad t \text{ réel}$$

$$h_r(\zeta, \vec{1}) = L_r(\zeta, \vec{1}).$$

b) L'Indicatrice cerclée $h_c(\zeta, \vec{\lambda})$ est définie de même par

$$L_c(\zeta, z) = \lim\sup \frac{1}{|u|} V(\zeta + uz), \quad |u| \to +\infty, \quad u \text{ complexe et}$$

$$h_c(\zeta, \lambda) = L_c(\zeta, \vec{\lambda}).$$

La régularisation supérieure en z équivant a celle en $\zeta \times z$ et fournit deux fonctions plurisousharmoniques $L^*_\sigma(z)$, $L^*_c(z)$, indépendantes du centre ζ. Pour les fonctions entières cette étude directe permet de se passer de l'isomorphisme analytique donné par la transformation de Fourier-Borel. Application à des problèmes d'analyse fonctionnelle(distributions, hyper-distributions de Roumieu, fonctionnelles analytiques).

Frenkel, J.: Cohomologie complexe des variétés de Stein

Soient X une variété analytique complexe, $\mathfrak{A}^{p,q}$ le faisceau des formes différentielles de type (p, q), $d = d' + d''$ le dérivation extérieure, $\mathfrak{A}_d^{p,q}$, $\mathfrak{A}_{d''}^{p,q}$, $\mathfrak{A}_\Delta^{p,q}$ l'interesection de $\mathfrak{A}^{p,q}$ avec le noyau de d, d'', $\Delta =$ $= d'\, d''$. On note $A^{p,q}, \ldots, A_\Delta^{p,q}$ les espaces des sections globales resp. . On pose $A = \oplus_{p,q} A^{p,q}$ et $H_\Delta^{p,q} = A_d^{p,q} / \Delta A^{p-1,q-1}$, $H_{d,d''}^{p,q} = A_d^{p,q} / d A_{d''}^{p-1,q}$,

... boundary [illegible] on a given subvariety.

[illegible]: [illegible] (almost) complex structures.

$+ (\ldots) + (\ldots)$ [illegible] complex, but not [illegible]complex. Apparently there is [illegible] connected compact complex [illegible] with the same Chern numbers.

[illegible]: Fonctions [illegible] et fonctions [illegible] de type exponentiel

[illegible] fonction $V(z) = V(z_1, \ldots, z_n)$ plurisousharmonique [illegible] est dite de type exp[illegible] fini γ si lim sup $\frac{1}{\|z\|} V(z) < \ldots$.

On [illegible] deux sortes d'indicatrices de croissance, [illegible] qu'on considère un vecteur unité $\bar{l}$ [illegible] $\mathbb{R}^{2n}$, ou un vecteur complexe [illegible] de $\mathbb{C}^n$.

a) On définit l'indicatrice radiale $h_r(\zeta, \bar{l})$ [illegible], fonction [illegible] en posant

$$L_r(\zeta, z) = \lim \sup \frac{1}{t} V(\zeta + tz), \quad t \to \ldots, \; t \text{ réel}$$

$$h_r(\zeta, \bar{l}) = L_r(\zeta, \bar{l}).$$

b) L'indicatrice [illegible] $h_c(\zeta, \bar{\lambda})$ est définie de même par

$$L_c(\zeta, z) = \lim \sup \frac{1}{|u|} V(\zeta + uz), \quad |u| \to \ldots, \; u \text{ complexe}$$

$$h_c(\zeta, \bar{\lambda}) = L_c(\zeta, \bar{\lambda}).$$

[illegible] régularisées [illegible] équivalent [illegible] et fournit deux fonctions plurisousharmoniques $L_r(z)$, $L^*(z)$, indépendantes de centre ζ. [illegible] les fonctions entières [illegible] directe [illegible] de sa [illegible] problème analytique donné par la transformation de Fourier-Borel. [illegible] problème [illegible] fonctionnelles (distributions, hyper-distributions [illegible]).

[illegible]: [illegible] variétés de Stein

[illegible] une variété [illegible], [illegible] les formes [illegible] dérivation extérieure.
[illegible] intersection [illegible] noyau de [illegible]

[illegible] On note [illegible] les espaces des sections [illegible] resp.

[illegible] et $H^{p,q} = \ldots$

$H_d^{p,q} = A_d^{p,q}/(dA) \cap A^{p,q}$, $\overset{\Delta}{H}{}^{p,q} = A^{p,q}/(d' A^{p-1,q} + d'' A^{p,q-1})$. Sur une variété de Stein $H_{\Delta}^{p,q}$, $H_{d,d''}^{p,q}$, $H_d^{p,q}$, $\overset{\Delta}{H}{}^{p-1,q}$ sont canoniquement isomorphes à $H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ si resp. $p,q \geq 1$; $p \geq 1$, $q \geq 0$; $p,q \geq 0$; $p \geq 2$, $q \geq 1$ [cf. Frenkel-Norguet; CR 256 (1963); Aeppli: Conf. on Complex Analysis at Minneapolis 1964]. Plus précisément, on a des applications:

$$H_{\Delta}^{p,q} \to H_{d,d''}^{p,q} \to H_d^{p,q} \to H^{p+q}(X, \mathbb{C}), \quad \overset{\Delta}{H}{}^{p-1,q} \to H_{d,d''}^{p,q},$$

qui sont isomorphismes pour resp. p,q (v. ci-dessus), des que

$$A \qquad H^k(X, \mathfrak{A}_{d''}^{m-k-1,0}) = H^k(X, \mathfrak{A}_{d''}^{m-k,0}) \qquad \text{pour } 1 \leq k \leq m;$$

cette condition est remplie $\forall\, m \geq 1$, si X est de Stein; mais il existe des X non de Stein et des $m > 0$ pour lesquels elle est vraie. Comme corollaire on en déduit que pour que $\omega \in A^{p,q}$ $(p,q \geq 1)$ soit de la forme $\omega = d'd''\omega'$, il faut et suffit que ω soit de la forme $d\omega''$ (lorsque, A est verifié).

Kaup, W.: Infinitesimale Transformationsgruppen komplexer Räume

Es sei R ein komplexer Raum mit Strukturgarbe $\mathcal{O}$ (nicht notwendig reduziert) und $\Lambda(R)$ die Liealgebra aller infinitesimalen Transformationen von R, (d.h. aller stetigen Abbildungen $D : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, so daß $D|\mathcal{O}_x$ eine Derivation der Algebra $\mathcal{O}_x$ ist für jedes $x \in R$). Jeder Liesche Homomorphismus einer endlichdimensionalen Liealgebra in $\Lambda(R)$ werde eine infinitesimale Transformationsgruppe auf R genannt. Dann gehört zu jeder reellen (komplexen) Transformationsgruppe auf R eine reelle (komplexe) infinitesimale Transformationsgruppe auf R; ist R kompakt, so läßt sich jede infinitesimale Transformationsgruppe auf R integrieren. Als Anwendung ergibt sich, daß für jeden kompakten Raum R die Automorphismengruppe eine komplexe Liegruppe ist, die holomorph auf R operiert und $\Lambda(R)$ als Liealgebra besitzt (vgl. Math. Ann. 160 (1965) 72-95).

Stoll, W.: Der erste Hauptsatz der Wertverteilungstheorie für holomorphe Abbildungen beliebigen Ranges

Sei $f : M \to \mathbb{P}^n$ eine holomorphe Abbildung der m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M in den n-dimensionalen komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}^n$. Sei $m - q = n - p = r$. Für jede p-dimensionale komplexe Ebene E in $\mathbb{P}^n$ sei $f^{-1}(E)$ rein q-dimensional. Aus zwei Residuenformeln läßt sich ein

erster Hauptsatz für f gewinnen, woraus sich als Spezialfälle ergeben:

1) Der 1. Hauptsatz in der unintegrierten Form von Levine ($r = n$, Ann. Math. 71 (1960) 529-535).

2) Der 1. Hauptsatz in der Form von Chern ($r = n$, $M = \mathbb{C}^n$, Ann. Math. 71 (1960) 536-552).

3) Der 1. Hauptsatz in der Form von Kneser und Stoll ($r = 1$, Acta Math. 90 (1953) 55-169).

Als Haupthilfsmittel wird gezeigt:

Wenn $f : M \to N$ eine holomorphe Abbildung vom reinen Rang $n = \dim N$ ist, $q = \dim M - n$ und χ eine stetige Form vom Typ (q, q) mit kompaktem Träger, so hängt das Integral

$$\int_{f^{-1}(y)} v_f \chi$$

stetig von y in N ab, wobei v_f die Vielfachheit der Abbildung ist.

Siciak, J.: On Fekete-Leja's points in the space $\mathbb{C}^n$.

Various types of Fekete-Leja extremal points are defined in a uniform manner. Applications to several complex variables ortained in last few years are presented.

References:

1. J. Siciak: On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables. Trans. AMS 105 (1962) 322-357.

2. --: Extremal points in the space $\mathbb{C}^n$. Coll. Math. 11 (1964) 157-163.

3. --: Some applications of interpolating harmonic polynomials. J. D'Analyse Math. 14 (1965).

4. M. Schiffer und J. Siciak: Transfinite diameter and analytic continuation of functions of two complex variables. Studies in Math. Analysis, Stanford 1962, 341-358.

Spallek, K.: Differenzierbare Funktionen auf analytischen Mengen

Untersucht wird, wann sich holomorphe Relationen in Modulgarben von analy-

tischen Untermengen zu holomorphen Relationen in umfassenden Mengen fortsetzen lassen. Es wird gezeigt, daß differenzierbare Fortsetzbarkeit holomorphe Fortsetzbarkeit impliziert. Als Anwendung erhält man:

1. Eine Verschärfung des Satzes von B. Malgrange, daß eine schwach-holomorphe differenzierbare Funktion holomorph ist.

2. Aussagen üb r die Existenz gewisser holomorpher Tangentialvektorfelder.

3. Aussagen über die Möglichkeit, reelle oder komplexe Ebenen von analytischen Mengen abzuspalten.

4. Aussagen zur Frage, wann analytische Mengen differenzierbare Umgebungsretrakte sind.

Bremermann, H.: Fouriertransformationen von Distributionen mit Träger im Lichtkegel

Es sei $x = (x_o, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x^2 = x_o^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$. Der Bereich $\Gamma = \{x : x^2 > 0\}$ heißt "Lichtkegel"; er zerfällt in $\Gamma^+ = \{x_o > 0\}$ und $\Gamma^- = \{x_o < 0\}$. $T^+ = \{z : y \in \Gamma^+,\ x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ und analog T^- sind mit Γ^+ und Γ^- assoziierte Tubengebiete im $\mathbb{C}^n$ $(z = x + iy)$.

1. Es sei f eine temperierte Distribution (L. Schwartz: $f \in (S')$). Der Träger von f sei in $\bar{\Gamma}^+$ enthalten. Dann ist $\mathfrak{F}(f)$ Randwert einer in T^+ holomorphen Funktion.

2. Falls $f \in L_2$, so ist $\langle \mathfrak{F}(f), k(\xi - z)\rangle$ mit $k(\xi - z) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi(t)e^{i\langle t, z\rangle}, \xi)$ eine Integraldarstellung, wo $\chi(t)$ die charakteristische Funktion von Γ^+.

3. Falls $f \in (S')$, so gibt es eine ganze Zahl $s \geq 0$, so daß $\langle \mathfrak{F}(f), \Box^s k(\xi - z)\rangle$ holomorph ist in T^+ mit Randwert $\Box^s \mathfrak{F}(f)$ (im Sinne der Topologie von (S')); $\Box := \frac{\partial^2}{\partial x_o^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ (Vladimirov).

4. Für Γ^- und T^- erhält man den Kern $-k$; es folgt, daß die Fouriertransformierte einer Distribution in (S') mit Träger in $\bar{\Gamma}$ Differenz der Randwerte zweier holomorpher Funktionen f^+, f^- in T^+, T^- ist.

5. Falls $\mathfrak{F}(f)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ verschwindet, so sind f^+ und f^- in einer Umgebung V von G holomorph und sind holomorphe Fortsetzung voneinander (Konsequenz des "edge of the wedge theorem").

6. $T^{+} \cup T^{-} \cup U(G)$ ist i. a. kein Holomorphiegebiet. Der Durchschnitt der Holomorphiehülle mit $\mathbb{R}^{n+1}$ ergibt eine Hülle von G, in der $\mathfrak{Z}(f)$ verschwindet. Diese Hülle hat gewisse Konvexitätseigenschaften.

7. Diese Resultate lassen sich auf generelle konvexe Kegel und deren duale Kegel verallgemeinern.

Wolffhardt, K.: Die Existenz komplexer Basen.

$f : X \to Y$ sei holomorphe Abbildung zweier reduzierter komplexer Räume. R sei die Menge der nichtnormalen Punkte von X. Eine komplexe Basis zu f existiert sicher dann, wenn gilt: $f|R$ ist eigentlich,und zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x, eine offene Umgebung V von f(U) und einen analytischen Teil A von U mit der Eigenschaft, daß $f|A \to V$ eine eigentliche Abbildung ist und daß für jede irreduzible Komponenten V_o von V die Abbildungen $f|A \cap V_o$ und $f|V_o$ den gleichen Rang haben. Um diesen Satz vom Fall $R = \emptyset$, für den er zunächst bewiesen wird, auf den allgemeinen zu übertragen, verwendet man einen Hilfssatz, der besagt, daß man einen komplexen Raum erhält, wenn man in einem komplexen Raum $\tilde{Y}$ die Punkte im Nullstellengebilde einer kohärenten Idealgarbe $\mathfrak{A}$, die durch die Abbildungen einer Klasse $\mathfrak{H}$ von holomorphen Abbildungen von $\tilde{Y}$ mit gewissen Eigenschaften nicht getrennt werden, identifiziert und auf dem topologischen Quotienten nach dieser Äquivalenz mit Hilfe von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}$ eine Menge von stetigen Funktionskeimen auszeichnet.

Holmann, H.: Zur Regularität holomorpher Abbildungen

Definition: Eine holomorphe Abbildung $\phi : X \to Y$ zwischen reduzierten komplexen Räumen X und Y heißt stark regulär in $x \in X$, wenn es eine Umgebung U von x der Gestalt $U = A \times F$ gibt, wobei A ein komplexer Raum und F eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, so daß die Fasern von $\phi|U$ die Gestalt $\{a\} \times F$, $a \in A$, haben.

Satz: $\phi : X \to Y$ sei eine holomorphe Abbildung, deren Fasern alle dieselbe reine Dimension haben. Dann gilt:

ϕ ist stark regulär in x   x ist Mannigfaltigkeitspunkt von $\overset{-1}{\phi}\,\phi(x)$.

Dabei darf man $\overset{-1}{\phi}\,\phi(x)$ im allgemeinen nicht mit der üblichen reduzierten komplexen Struktur $O/\mathfrak{I}(\phi, x)|\overset{-1}{\phi}\,\phi(x)$ versehen, wobei O die Strukturgarbe

$T^+ \cup T^- \cup U(\ldots)$ ist [illegible] Holomorphiegebiet. Der Durchschnitt der Holomorphiehülle [illegible] ergibt eine Hülle von G, in der $f(f)$ verschwindet. [illegible] gewisse [illegible] Konvexitätseigenschaften.

7. [illegible] lassen sich auf gewöhnliche konvexe Kegel und deren Durch- [illegible] verallgemeinern.

Vollmöller, H.: Die Existenz [illegible] Basen.

$f : X \to Y$ sei holomorphe Abbildung zweier reduzierter komplexer Räume. [illegible] ist die Menge der nicht [illegible] Punkte von X. Eine komplexe Basis [illegible] existiert sicher dann, wenn gilt: [illegible] endlich, und [illegible] X gibt es eine [illegible] Umgebung U von x, [illegible] Umgebung V von f(x) und einen [illegible] von U [illegible] $f|A \to V$ eine eigentliche Abbildung [illegible] von V die Abbildung [illegible] gleich [illegible] Basis [illegible] zunächst bewiesen [illegible] verwendet [illegible] einen Hilfssatz [illegible] man einen [illegible] Raum erhält, wenn [illegible] komplexen Raum [illegible] Punkt [illegible] Bild einer [illegible] die Abbildungen einer [illegible] von h [illegible] Abbildungen [illegible] mit gewissen Eigenschaften nicht getrennt werden, identifiziert [illegible] topologischen [illegible] dieser Äquivalenz mit Hilfe [illegible] und [illegible] eine Menge von [illegible] Funktionskeimen ausgezeichnet.

Holmann, H.: Zur [illegible] holomorpher Abbildungen

Definition: [illegible] Abbildung $\phi : X \to Y$ zwischen reduzierten komplexen Räumen X und Y heißt stark regulär in $x \in X$, wenn es eine Umgebung U [illegible] gibt, wobei [illegible] komplexer Raum und F eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, so daß [illegible] die Gestalt $\{a\} \times F$, $a \in$ [illegible] hat.

Satz: $\phi : X \to Y$ sei eine holomorphe Abbildung, deren Fasern alle [illegible] reine Dimension haben. Dann gilt:

ϕ ist stark regulär in x [illegible] ist Mannigfaltigkeitspunkt von $\phi^{-1}\phi(x)$.

Dabei darf man $\phi^{-1}\phi(x)$ im [illegible] nicht mit der [illegible] reduzierten komplexen Struktur [illegible] $(\phi^{-1}\phi(x))$ versehen, wobei [illegible] die Strukturgarbe von X und $\hat{I}(\phi, x) \subset O$ die Garbe aller auf $\overset{-1}{\phi}\ \phi(x)$ verschwindenden holomorphen Funktionskeime ist. Man muß vielmehr die folgende geringte Struktur $\mathfrak{A}(\phi, x)$ auf $\overset{-1}{\phi}\ \phi(x)$ wählen:

O^{ϕ} bezeichne die Garbe der Keime ϕ-invarianter holomorpher Funktionskeime auf X. Mit $m(\phi, x) := O^{\phi} \cap \hat{I}(\phi, x)$ bilden wir dann die Untergarbe $I(\phi, x) := O\, m(\phi, x)$ von $\hat{I}(\phi, x)$ und definieren die geringte Struktur $\mathfrak{A}(\phi, x)$ auf $\overset{-1}{\phi}\ \phi(x)$ durch die Beschränkung von $O/I(\phi, x)$ auf $\overset{-1}{\phi}\ \phi(x)$.

Bergman, S.: On interior distinguished sets in the theory of mappings in n complex variables.

Using the kernelfunction $K_B(z.\bar{z})$, $z = (z_1, z_2)$, of the domain B, one can determine functions $J_B^1(z_1, z_2) = \det(T_{m\bar{n}})/K$,

$$T_{m\bar{n}} := \frac{\partial^2 \log K}{\partial z_m \partial \bar{z}_n}; \qquad n, m = 1, 2,$$

$J_B^2(z_1, z_2) = \det(S_{m\bar{n}})/K, \ldots,$ which are invariant with respect topseudoconformal transformations $z^*_k = z^*_k(z_1, z_2)$, $k = 1, 2$, of the domain B. In the case of circular domains R the author determines conditions where $J_R^1(z_1, z_2)$ is not constant, and when the $J_R^p(z_1, z_2)$ are independant from each other. See also J. D'Analyse Math. 13, p. 317 ff.

The center of R is characteriszed and the necessery and sufficient conditions are described in order that a domain B can be mapped onto a given R by a pseudoconformal transformation. The approach can be generalized to the case of n complex variables.

Dolbeault, P.: Sur le faisceu des diviseurs à coefficients complexes

Notations: X est une variété analytique complexe; O le faisceau des fonctions holomorphes sur X; M (resp. A) le faisceau de O-modules des fonctions méromorphes (resp. des formes différentielles C^{∞}), $A^{p,q}$ le sous-faisceau de A des germes de type (p, q); $T = M \otimes_O A$ est le faisceau des formes différentielles semi-méromorphes; $m^{p,q}$ le sous-faisceau de T des germes $\Sigma_k \rho_k^{-p} \varphi_k^{p,q}$ $(\varphi_k^{p,q} \in A^{p,q};\ \rho_k \in O$, est irréducible, le germe d'ensamble analytique $(\rho_k) = (\rho_k = 0)$ un germe de sous-variété); E^1 (resp. m^1) est le faisceau des 1-formes différentielles fermées holovon Σ und $\hat{I}(\phi,x)\subset C$ die Graphe aller auf $\phi(x)$ verschwindenden holomorphen Funktionskeime ist. Man muß vielmehr die folgende geringte Struktur $\hat{I}(\phi,x)$ auf $\phi(x)$ wählen:

C^{ϕ} bezeichne die Garbe der Keime ϕ-invarianter holomorpher Funktionskeime auf X. Mit $m(\phi,x) := C^{\phi} \cap I(\phi,x)$ bilden wir dann die Untergruppe $I(\phi,x) = C \cdot a(\phi,x)$ von $\hat{I}(\phi,x)$ und definieren die geringte Struktur $\hat{I}(\phi,x)$ auf $\phi(x)$ durch die Beschränkung von $O/I(\phi,x)$ auf $\phi(x)$.

[illegible], R.: On interior distinguished sets in the theory of mappings in n complex variables.

Using the kernel function $K_B(z,\bar{z})$, $z = (z_1, z_2)$, of the domain B, one can determine functions $J_B^1(z_1,z_2) = \det(T_{m\bar{n}})/K$,

$$T_{m\bar{n}} := \frac{\partial^2 \log K}{\partial z_m \partial \bar{z}_n}; \qquad n, m = 1, 2,$$

$J_B^2(z_1,z_2) = \mathrm{tr}(S_{m\bar{n}})/K, \dots$, which are invariant with respect to pseudoconformal transformations $z_k^* = z_k^*(z_1,z_2)$, $k = 1, 2$, of the domain B. In the case of circular domains B the author determines conditions where $J_B^1(z_1,z_2)$ is not constant, and when the $J_B^i(z_1,z_2)$ are independent from each other. See also J. d'Analyse Math. 13, p. 317 ff.

The center of B is characterized and the necessary and sufficient conditions are described in order that a domain B can be mapped onto [illegible] given by a pseudoconformal transformation. The approach can be generalized to the case of n complex variables.

Dolbeault, P.: Sur le faisceau des diviseurs à coefficients complexes

Notations: X est une variété analytique complexe; C le faisceau des fonctions holomorphes sur X; M (resp. A) le faisceau des C-modules des fonctions méromorphes (resp. des formes différentielles C^{∞}), $A^{p,q}$ le sous-faisceau de A des formes de type (p,q); $T = M \otimes_C A$ est le faisceau des formes différentielles semi-méromorphes; $m^{p,q}$ le sous-faisceau de [illegible] est irréductible, le germe d'ensemble analytique $(g_k) = (g_k = 0)$ [illegible]; E^1 (resp. m^1) [illegible] 1-formes différentielles [illegible]

morphes (resp. méromorphes dont le diviseur polaire est constitué des germes (ρ_k) ci-dessus pris, chacune, à la multiplicité un); D'_c est le faisceau des germes de diviseurs à coefficients complexes dont le support est la réunion de germes des sous-variétés. Alors $D'_c = m^1/E^1$; soit
$$D^{p,q} = \bigoplus_{0<r<q} m^{p+r,\,q-r} / \bigoplus_{0<r<q} A^{p+r,\,q-r}.$$

Théorème: D'_c possède la resolution fine:

$$\text{(R)} \qquad 0 \to D'_c \to D^{1,0} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} D^{1,p} \to \ldots \quad .$$

Corrollaire: $H^p(X, D'_c)$ est isomorphe au p-ième groupe de cohomologie du complexe des sections défini par (R) (si X est paracompacte).

Reiffen, H.-J.: Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompaktem Träger

Es sei: X ein komplexer Raum (im Sinne von Grauert), $A \subset X$ eine analytische Menge, $\dim A = k$, $\mathfrak{S}$ eine kohärente analytische Garbe über X.

1) Ist ϕ eine (parakompaktifizierende) Trägerfamilie auf A, so hat man
$$H^q_\phi(A, \mathfrak{S}|A) = 0 \quad \text{für } q > k.$$

2) Ist ϕ eine Trägerfamilie auf X, so ist
$$H^q_{\phi|X\backslash A}(X\backslash A, \mathfrak{S}) \to H^q_\phi(X, \mathfrak{S})$$
surjektiv für $q \geq k+1$ und bijektiv für $q \geq k+2$.

2) ist eine Folgerung aus 1) und liefert für $\phi = *$ (= Familie der kompakten Teilmengen) einen zum Riemann-Schejaschen Fortsetzungssatz dualen Satz. Es ist dann auch $\phi | X\backslash A = *$. Aus einem neulich von Malgrange bewiesenen Satz folgert man, daß die Forderung der Kohärenz für $\mathfrak{S}$ entbehrlich ist.

Fischer, W.: Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten mit isomorphen Fasern

Sei $X \xrightarrow{\pi} M$ eine holomorphe Familie kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten, (der Parameterraum M sei eine Mannigfaltigkeit). Dann gilt der

Satz: Sind alle Fasern $X_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in M$, komplex-analytisch isomorph, so ist die Familie lokal-trivial.

Dieser Satz wurde von Grauert in "Contributions to Function theory", Bombay

1960, p. 72, ausgesprochen und von Grauert-Fischer bewiesen (Nachr. Göttinger Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., 1965).

Zum Beweis wird zunächst gezeigt, daß die Menge M' der $t \in M$, zu denen es eine gegen t konvergente Folge $\{t_\mu\}$ und gegen id_{X_t} kompakt konvergierende biholomorphe Abbildungen $\alpha_\mu : X_t \to X_{t_\mu}$ gibt, in M dicht liegt. Dann wird gezeigt, daß der Kodaira-Spencer-Homomorphismus ρ_t für $t \in M'$ verschwindet, indem gewisse Vektorfelder auf $X_t \subset X$ konstruiert werden. Daraus folgt die Behauptung.