Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

BERICHT

über die Tagung

ZAHLENTHEORIE

insbesondere additive und analytische Zahlentheorie,
Diophantische Approximationen.
6. bis 12.9.1965

Unter der Leitung der Herren Professoren Dr. G. Hoheisel (Köln) und Dr. Th. Schneider (Freiburg i.Br.) fand die diesjährige Zahlentheorie-Tagung im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach in der Zeit vom 6. bis 12.9. statt. Da gleichzeitig in Brighton (England) ein Symposium über algebraische Zahlentheorie abgehalten wurde, konnten manche bedeutenden Zahlentheoretiker nicht nach Oberwolfach kommen. Um so erfreulicher war es, daß vielen jungen Mathematikern die Gelegenheit geboten wurde, Vorträge über ihr Arbeitsgebiet zu halten und zu hören, Anregungen zu neuen Arbeiten zu bekommen und an den lebhaften Diskussionen teilzunehmen, auch außerhalb des offiziellen Programms.

Von den Tagungsteilnehmern waren fünf aus den USA, vier aus Holland, drei aus Österreich, je zwei aus Großbritannien und Ungarn und je einer aus Dänemark, Finnland, Frankreich und Polen, dazu 15 aus Deutschland gekommen. Im einzelnen waren in Oberwolfach anwesend:

Baker, A. (Cambridge)
Bruijn, N.G. de (Eindhoven)
Bundschuh, P. (Freiburg)
Ehlich, H. (Tübingen)
Ehrhart, E. (Strasbourg)
Gerl, P. (Wien)
Gruber, P. (Wien)
Härtter, E. (Mainz)
Herrmann, O. (Heidelberg)
Hoheisel, G. (Köln)
Lint, J.H. van (Nuenen)
Meijer, H.G. (Amsterdam)
Newman, M. (Washington)
Philipp, W.V. (Urbana)
Popken, J. (Amstelveen)
Rankin, R.A. (Glasgow)
Rényi, A. (Budapest)
Rogers, K. (Honolulu)
Rotkiewicz, A. (Warschau)
Schaal, W. (Marburg)
Schmidt, A.L. (Kopenhagen)
Schmidt, P. (Marburg)

Schneider, Th. (Freiburg)
Schoeneberg, B. (Hamburg)
Schönhage, A. (Köln)
Schwarz, W. (Freiburg)
Schweiger, F. (Wien)
Selenius, C.-O. (Ekenäs)
Stöhr, A. (Berlin)
Straus, E.G. (Los Angeles)
Turán-Sós, Vera (Budapest)
Volkmann, B. (Stuttgart)
Wadleigh, S.R. (Princeton)
Wallisser, R. (Freiburg)
Wirsing, E. (Marburg)

Es folgen nun Zusammenfassungen der 27 auf der Tagung gehaltenen Vorträge in der Reihenfolge, in der sie gehalten wurden.

O. Herrmann, (Heidelberg): Über die Differenz $\pi(x) - \mathrm{li}\,x$.

Durch numerische Experimente wurde im Intervall

$$e^{2\pi(y_0 - 2\delta)} \leq x \leq e^{2\pi(y_0 + 2\delta)} \quad \text{mit}$$

$y_0 = 67\,001\,993{,}0484$; $\delta = 0{,}0026$ ein x mit $\pi(x) - \mathrm{li}\,x > 0$ nachgewiesen, wobei in den Restgliedabschätzungen die Riemannsche Vermutung benutzt werden mußte. Es ist nicht ausgeschlossen, daß es gelingt, die Restgliedabschätzungen so zu verbessern, daß die Riemannsche Vermutung nicht mehr benutzt werden muß.

H. Ehlich, (Tübingen): Zur Äquivalenz der Selberg-Formel mit dem Primzahlsatz.

Die elementaren Beweise des Primzahlsatzes gehen von der Selberg-Formel aus. Es werden Verallgemeinerungen dieser Formel untersucht und folgender Satz bewiesen:
Es sei a_i eine Folge reeller Zahlen ≥ 1. M sei die Menge, die von den a_i multiplikativ erzeugt wird. M werde in N disjunkte Klassen K_ν mit $\bigcup K_\nu = M$ zerlegt und die K_i mögen eine abelsche Gruppe bez. der Multiplikation der Elemente bilden. Für $N = 2M + 1$ folgt dann aus der "Selbergformel"

$$\sum_{\substack{a_i \leq x \\ a_i \in K_\nu}} \log^2 a_i + \sum_{\substack{a_i a_j \leq x \\ a_i a_j \in K_\nu}} \log a_i \log a_j \sim \frac{2}{N}\, x \log x$$

der "Primzahlsatz"

$$\sum_{\substack{a_i < x \\ a_i \in K_\nu}} \log a_i \sim \frac{x}{N} .$$

Für $N = 2M$ ist dieser Satz im allgemeinen nicht gültig.

J. Popken, (Amsterdam): Über algebraische Unabhängigkeit gewisser Zetafunktionen.

Ein bekannter Satz Hilberts sagt aus, daß die Riemannsche Zetafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann. Allgemeiner läßt sich in einfacher Weise beweisen, daß der Zetafunktion irgend eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades dieselbe Eigenschaft zukommt.
Mit Hilfe eines einfachen Satzes über zahlentheoretische Funktionen beweise ich jetzt das folgende Ergebnis:
Es sei $\zeta_0(s) = \zeta(s)$ die Riemannsche Funktion; weiter seien $\zeta_\tau(s)$ ($\tau = 1,2,\dots, t$) Zetafunktionen von quadratischen Zahlkörpern mit Diskriminanten d_τ. Die d_τ sind nicht vollständig frei, aber sollen folgender Bedingung genügen: Für nichtnegative ganze Zahlen $u_1, u_2, \dots, u_t$ soll die Zahl

$$d_1^{u_1}\, d_2^{u_2} \dots d_t^{u_t}$$

ein Quadrat sein dann und nur dann, wenn alle $u_1, u_2, \dots, u_t$ gerade sind.
Dann gilt, daß jede endliche Anzahl von Funktionen aus der Menge

$$\{\zeta_\tau^{(\lambda)}(s+c) \mid \tau = 0, 1, \dots, t;\ \lambda = 0, 1, \dots;\ c \in \mathbb{R}\}$$

algebraisch unabhängig über den Polynomring $C[s]$ sind.

J.H. van Lint (Nuenen): Der Satz von Brun - Titchmarsh.

Sei $\pi(x,k,l) = N\{p \leq x;\ p \equiv l \bmod k\}$. Es wird bewiesen:

Satz I:
$$\pi(x,k,l) < \frac{x}{\varphi(k)\log\sqrt{x/k}}\left(1 + \frac{4}{\log\sqrt{x/k}}\right) \qquad (1)$$

für $1 \leq k < x,\ (k,l) = 1.$

Bis jetzt war das beste Ergebnis in dieser Richtung von Klimow gegeben (1961) mit $2 \log\log x$ statt 4 in (1).
Unser Beweis beruht auf der Abschätzung

$$\sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ (n,k) = 1}} 1 < 5\,\frac{\varphi(k)}{k}\,x$$

für alle x und alle k, die nur Primfaktoren $\leq x$ enthalten. Dieses letzte Ergebnis wird gefunden durch eine vorsichtige

Behandlung des Restgliedes bei der Selbergschen Siebmethode.
Aus (1) folgt:

Satz II: $\pi(x,k,l) < \dfrac{3x}{\varphi(k)\log\frac{x}{k}}$ für $1 \leq k < x$. (Brun-Titchmarsh)

E. Wirsing (Marburg): Mittelwerte von multiplikativen Funktionen.

Ist die zahlentheoretische Funktion $\lambda(n)$ multiplikativ und ist stets $-1 \leq \lambda(n) \leq +1$, so existiert der Mittelwert

$L := \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum\limits_{n \leq x} \lambda(n)$, und zwar ist

$$L = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p} + \frac{\lambda(p^2)}{p^2} + \dots\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Für komplexwertige λ gilt z.B.: Ist stets $|\lambda(n)| \leq 1$, $\sum \frac{1}{p}(1 - \operatorname{Re}\lambda(p)) = \infty$ und ist mindestens ein Randpunkt des Einheitskreises kein Häufungspunkt der Folge $(\lambda(p))$, so ist $L = 0$. Daß die letzte Bedingung nicht überflüssig ist, zeigt $\lambda(n) = n^i$, wofür L nicht existiert.

Als wesentliches neues Hilfsmittel erscheinen Funktionalungleichungen für Faltprodukte des Typs

$$h(x) = \int_0^{a-x} f(x+y)g(y)\,dy \qquad (f,\ g,\ h,\ \text{auf } [0,a]).$$

E.G. Straus (Los Angeles): Verallgemeinerte Borel-Interpolation.

Es wird die Frage untersucht, für welche Wertemengen S es zu jeder Folge $\{z_\nu\}_{\nu=0,1,2,\dots}$ ohne Häufungspunkte auf einer Riemannschen Fläche analytische Funktionen f(z) gibt, für die $f^{(n)}(z_\nu) \in S$ $(\nu,\ n = 0,1,\dots)$ gilt. Sato und der Vortragende haben als teilweise Antwort gefunden, daß es genügt, daß der Abstand $d(z,S) < |z|^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ für alle genügend großen $|z|$ ist. ε kann man sogar durch $\dfrac{1}{o(\log\log|z|)}$ ersetzen.
Es bleibt die Frage, ob $d(z,S) = o(|z|)$ notwendig ist. Hat S keine endlichen Häufungspunkte, so können "arithmetische Schrauben" für die Wachstumsordnung der f's angeben, die von der Dichte von S und von derjenigen der Interpolationspunkte

$\{z_\gamma\}$ abhängen, so daß es unterhalb der Schranke höchstens $\aleph_0$ Funktionen, oberhalb aber $2^{\aleph_0}$ solche Funktionen gibt.

A.A.L. Schmidt (Kopenhagen): Farey triangles in the complex plane.

In the field $Q(\rho)$, where $\rho = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $Z(\rho)$ denotes the integers of the field. A Farey triangle is a closed triangle with vertices
$(p_1/q_1,\ p_2/q_2,\ p_3/q_3)$, where $p_i, q_i \in Z(\rho)$, $q_i \neq 0$ $(i = 1,2,3)$, and $|p_1q_2 - p_2q_1| = |p_1q_3 - p_3q_1| = |p_2q_3 - p_3q_2| = 1$.
An algorithm describing the totality of Farey triangles containing a fixed complex number $\xi \notin Q(\rho)$ is given.
Among the theorems valid we mention in particular:
(1) Every reduced fraction p/q, $p, q \in Z(\rho)$ with $|\xi - p/q| \leq \frac{\sqrt{3}}{2|q|^2}$ is the vertex of a Farey triangle containing ξ.

(2) For any Farey triangle $(p_1/q_1,\ p_2/q_2,\ p_3/q_3)$ containing ξ, at least one of p_i/q_i $(i = 1,\dots,4)$, where p_4/q_4 is the "inner mediant" connected with the Farey triangle, satisfies the inequality $|\xi - p_i/q_i| < \frac{1}{\sqrt[4]{13}\,|q_i|^2}$.

The inequalities in (1) and (2) are best possible.

K. Rogers (Honolulu): Sums of the divisor function.

B. Gordon and K. Rogers show by elementary methods that, if $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, then

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,u)=1 \\ \mu(n)\neq 0}} \frac{\tau(n)}{n} = \frac{1}{2} A \log^2 x + (A+B) \log x + R(x),$$

where u is a positive squarefree integer,

$$A = \prod_{p|u} \frac{p}{p+2} \cdot \prod_{p} \left(1 - \frac{3p-2}{p^3}\right) = O(1),$$

$$B = A \left\{ 2\gamma - 1 + 2 \sum_{p|u} \frac{\log p}{p-1} + 6 \sum_{p\nmid u} \frac{(p-1) \log p}{p^2(p+2)} \right\} = O(\log \log u),$$

and
$$R(x) = \begin{cases} O(\log \log x \sqrt{\log x}) & \text{if } \log u \sim \log x \\ O(1) & \text{if u is bounded.} \end{cases}$$

A weaker form was published in Canadian Journal of Math., Vol. 16 (1964). The new form provides a simpler foundation for the result of Shapiro and Warga on 20 primes.

R. Wallisser (Freiburg): Verallgemeinerte ganze ganzwertige Funktionen und verwandte Probleme.

Einer ganzen Funktion $f(z)$ vom Exponentialtypus werden lineare Funktionale der Form $T_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \zeta(w)^n F(w) \cdot dw$, $n = 1,2,\ldots,$ zugeordnet. Dabei ist $\zeta(w)$ eine analytische Funktion, die in dem von Γ umschlossenen Gebiet holomorph und injektiv ist, $F(w)$ ist die Laplace-Transformierte von $f(z)$ und Γ umfaßt alle Singularitäten von $F(w)$. Ist $D(f)$ das konjugierte Diagramm und ist $\zeta(w)$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet injektiv, so gilt:

Satz 1. Ist $D(f) \subset \Omega_w$, $T_n(f) = 0$, $n = 1,2,\ldots,$ dann ist $f(z) \equiv 0$.

Satz 2. Ist $D(f) \subset \Omega_w$, ist der äußere Radius von $\zeta(D(f))$ kleiner als Eins, sind die Werte $T_n(f)$ ganz algebraisch aus einem algebraischen Zahlkörper K vom Grade N und gilt für die Konjugierten $|T_{n_k}| \leq e^{o(n)}$, $2 \leq K \leq N$, dann hat $f(z)$ die Form

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} p_i(z) e^{\zeta^{-1}(\alpha_i) z}$$

Die $p_i(z)$ sind Polynome und die α_i sind ganze algebraische Zahlen aus $\zeta(D(f))$.

Satz 3. Ist $\Gamma(f) \subset \Omega_w$, $\zeta(0) = 0$, $\zeta(D(f)) \subset \{w;\ |w| < 1\}$, $T_n(f) = \frac{p_n}{q_n}$, und gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |q_n|^{1/n} = 1$, dann ist $f(z)$ ein Polynom.

Satz 1 ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Buck (Trans. AMS 64), Satz 2 enthält die Sätze von Pisot (C.R.Acad.Sci. 222), Buck (Duke J. 15), Bieberbach (Arch. Math. 4) und M^{me} Bertrandias (C.R.Acad.Sci. 247) über ganze ganzwertige Funktionen.

A. Rotkiewicz (Warschau): On pseudoprime numbers.

A composite integer n is called a pseudoprime if $n | 2^n - 2$. Several theorems concerning pseudoprimes are proved or mentioned. For instance it is proved that for any given prime p there exist infinitely many pseudoprimes divisible by p. It is also proved that there exist infinitely many arithmetical progressions formed of three pseudoprimes. The existence of infinitely many pseudoprimes in a prescribed arithmetic progression is discussed. Many unsolved problems are mentioned.

A. Schönhage (Köln): Große Primzahllücken.

Rankin zeigte für unendlich viele Primzahllücken
$d_n = p_{n+1} - p_n$ die Beziehung

$$d_n > (\alpha - \varepsilon)\, \lg p_n \cdot \frac{\lg_2 p_n \cdot \lg_4 p_n}{\lg_3^2 p_n}\,, \qquad \alpha = \frac{1}{3}\,.$$

Durch Modifikation der dabei verwandten Methoden wird
$\alpha = e^c$ gezeigt.
Mit dem Satz von Linnik über die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Progression erhält man weiter, daß bei geeignet kleinem α auch aufeinanderfolgende d_n, d_{n+1} obiger Abschätzung immer wieder genügen.

C.-O. Selenius (Ekenäs): Über diophantische Approximationen von quadratischen Irrationalitäten.

1. Bekanntlich bewies LAGRANGE (Additions), daß (x,y) eine Lösung der Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = L, \quad 0 < |L| < \sqrt{D},$$

ist, nur wenn x/y ein (Haupt-) Näherungsbruch von $\sqrt{D}$ ist. Diese notwendige Bedingung ist aber keineswegs hinreichend. Wir formulieren jetzt eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung.

2. Für die Lösung (x,y) der Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = M, \qquad D < |M| < 2\sqrt{D}$$

gilt nach HURWITZ (Ges.W., LV), daß x/y der Fareysequenz von $\sqrt{D}$ angehört. Diese notwendige Bedingung wird von uns jetzt verschärft.

Die Resultate bauen auf Eigenschaften solcher Folgen von Brüchen auf, für welche $\sqrt{D}$ die Approximation $1/2t^2$ bezw. $1/t^2$ zuläßt (vgl. KOKSMA, Kap. 1, 3). Grundlegend ist der Zusammenhang zwischen (a) der Zahl $\sqrt{D}$, (b) den Näherungen von $\sqrt{D}$, (c) den Nennern der vollständigen Quotienten und (d) der Zahl c der "Approximationsfunktion" $\varphi(t) = 1/ct^2$.
Im Falle 2. geben ein Satz von FATOU und die Eigenschaften der Größen der (auch bei der zyklischen Methode auftretenden) "zwei Repräsentationen" der vollständigen Quotienten Beiträge zum Beweis, der auch die Theorie der Nebennäherungsbrüche anwendet.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

E. Ehrhart (Strasbourg): Homothetische lineare diophantische Systeme.

Ein H-System besteht aus Gleichungen und Ungleichungen von der Form

$$(H)\qquad \begin{array}{l} \sum a_i x_i = \alpha n, \ \ldots, \ldots \\ \sum b_i x_i > \beta n, \ \ldots, \ldots \end{array} \qquad (> \text{ und } \geqslant \text{ nebeneinander}; \ n > 0).$$

Alle Buchstaben bezeichnen ganze Zahlen. Der Lösungszähler z_n von H genügt einer linearen Rekurrenzformel, die nur von den Nennern der Eckpunktkoordinaten abhängt. Ist das von H definierte konvexe Polyeder P_n ganz (die Eckpunktkoordinaten sind ganzzahlig), so ist z_n ein Polynom; ist P_n nur rational, so ist z_n ein gemischtes Polynom (die Koeffizienten der Potenzen von n sind trigonometrische Funktionen). Nach Abzählen einiger Anfangswerte kann man z_n durch eine klassische Rechnung bestimmen.

Die Anzahl der inneren Gitterpunkte des ganzen Normalpolyeders P_n sei i_n, die seines Randes r_n und $j_n := i_n + r_n$. Das Gittermaß und das Randgittermaß von P_n bezeichne ich mit V_n und δ_n, den Überschuß $i_n + \frac{p_n}{2} - V_n$ mit Δ_n. Es gelten dann allgemeine Relationen, die ich hier nur für ein 3-dimensionales, der Kugel homöomorphes Polyeder schreibe (der Index 1 wird weggelassen):

$$j_n = Vn^3 + \frac{\delta}{2}n^2 + \Delta n + 1, \qquad j_n - 4j_{n-1} + 6j_{n-2} - 4j_{n-3} + j_{n-4} = 0,$$

$$r_n = n^2(r-2) + 2, \qquad \delta = r - 2,$$

$$V = \frac{1}{6}(j_3 - 3j_2 + 3j - 1), \qquad \delta = \frac{1}{2}(r_2 - 2r + 2).$$

Für jedes rationale k-dimensionale Normalpolyeder gilt das "Reziprozitätsgesetz"

$$j(n) = (-1)^k i(-n).$$

F. Schweiger (Wien): Metrische Sätze über den Jacobialgorithmus.

Es wird die Verteilung der Elemente (das sind die verallgemeinerten Teilnenner) im Jacobialgorithmus untersucht. Der Satz von Borel-Bernstein wird verallgemeinert und ferner bewiesen, daß jedes zulässige n-tupel ganzer Zahlen in der Entwicklung fast aller reeller n-tupel grob gesehen positive Dichte besitzt.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Es wird darauf hingewiesen, daß die Verallgemeinerung des Satzes von <u>Gauß-Kusmin</u> noch offensteht.

P. Schmidt (Marburg): <u>Unsymmetrische Gitterpunktprobleme.</u>

Für $x \geq 1$ und festes $\rho > 1$ sei

$$R_\rho(x) = \sum_{m^\rho n \leq x} 1 - \zeta(\rho)x - \zeta\left(\frac{1}{\rho}\right)x^{\frac{1}{\rho}}$$

und ferner sei $\vartheta_\rho = (\rho+1) \inf \{ \theta_\rho \mid R_\rho(x) \ll x^{\theta_\rho} \}$. Es sollen möglichst gute obere Schranken für ϑ_ρ gefunden werden. Die Abschätzung von $R_\rho(x)$ wird nach H.E. Richert (M.Z. 56, 1952) auf diejenige von $\sum_{n \leq x^{\frac{1}{\rho+1}}} (xn^{-\rho})$ mit $\psi(n) = n - [n] - \frac{1}{2}$ zurückgeführt; diese wiederum auf die Abschätzung einer Exponentialsumme der Form $\sum_n e(xmn^{-\rho})$. Hier wird nun die Abschätzung von $\sum \psi(xn^{-\rho})$ auf diejenige gewisser Exponentialdoppelsummen der Form $\sum_m \sum_n e(xmn^{-\rho})$ zurückgeführt mit Hilfe der zweidimensionalen Verallgemeinerung der v.d. Corput-Methode (Titchmarsh, Proc.LMS 1934) und unter Benutzung der sogenannten Methode der Exponentenpaare (E. Phillips, Q.J. of Math. 4, Oxf. 1933). Resultate: $\vartheta_2 \leq 0{,}66475575$; $\vartheta_{3/2} \leq 0{,}65708124$ und $\vartheta_\rho \leq 0{,}65434242$ für $1 < \rho \leq \frac{4}{3}$. Zwei zahlentheoretische Anwendungen werden angegeben.

R.A. Rankin (Glasgow): <u>Partly multiplicative functions occurring in formulae for the representations of a number as a sum of squares.</u>

In his work on the representations of a number as a sum of 2r squares (r odd) J.W.L. Glaisher made use of certain partly multiplicative functions. These functions are coefficients of certain cuspforms belonging to the same subgroup as ϑ_3^{2r}. He was unable to prove these properties. Proofs are obtained by adapting the theory of Hecke operators which makes it clear that it is not possible in general to select completely multiplicative functions for this purpose.

E. Härtter (Mainz): Über den Dichtebegriff in der additiven Zahlentheorie.

Die Mengen $\mathfrak{A} = 1,4,7,10,13,\ldots$ und $\mathfrak{B} = 1,2,5,6,7,8,17,18,19,\ldots,32,65,66,\ldots = \{1\} \cup \bigcup_{s=0}^{\infty} [2^{2s}+1,\ 2^{2s+1}]$ haben beide die finite und asymptotische Dichte 1/3, obwohl bei der Menge $\mathfrak{A}$ die Elemente sozusagen "gleichmäßig" verteilt sind, währenddem bei der Menge $\mathfrak{B}$ Ketten von Elementen mit Lücken abwechseln. Es soll durch eine Modifikation des Dichtebegriffs der "Struktur" einer Menge mehr Rechnung getragen werden, indem bei der Dichte die Mittelwertbildung über gewisse Intervalle erstreckt wird. Ansätze für diesen Dichtebegriff finden sich schon bei Schnirelmann (1933) und treten ferner als Mittelwerte bzw. Gaußsche Mittelwerte für zahlentheoretische Funktionen auf (z.B. Wintner (1943)). Als Anwendung des modifizierten Dichtebegriffs lassen sich Aussagen über mehrfache Darstellungen von Zahlen bei der Addition von Mengen und über die mittlere Ordnung übertragen. - Nach denselben allgemeinen Prinzipien lassen sich dann auch Dichten für Gitterpunktmengen einführen.

P. Gruber (Wien): Über das Produkt von inhomogenen Linearformen.

Eine Vermutung von Minkowski besagt, daß man das Produkt von n inhomogenen reellen Linearformen mit Determinante 1 durch ganzzahlige Wahl der Variablen stets kleiner oder gleich 2^{-n} machen kann. Nimmt man das Haar'sche Maß auf der Gruppe der (n,n)-Matrizen mit Determinante 1, so kann man folgende Aussagen machen:

Für $n = 2$ kann man für fast alle Systeme von Formen die Konstante 1/4 durch 1/8 ersetzen. Ist $\varepsilon > 0$ gewählt, dann ist die Menge der Formen, bei denen man 1/4 nicht durch $1/8 + \varepsilon$ ersetzen kann, nirgends dicht.

Für $n = 5$ gilt die Vermutung jedenfalls für fast alle Systeme von Formen.

Außerdem wird eine Verschärfung eines Satzes von Bombieri angegeben.

B. Volkmann (Stuttgart): Der Sprindjuksche Beweis der Mahlerschen Vermutung.

Eine auf Mahler (1932) zurückgehende Vermutung läßt sich folgendermaßen formulieren: Für fast alle reellen (komplexen) Zahlen ξ gibt es bei gegebenem $n \geq 1$ und $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele Polynome p(x) (mit ganzzahligen Koeffizienten) vom Grad $\leq n$, die der Ungleichung ($\|p\|$ = Höhe von p(x))

$$0 < |p(\xi)| \leq \|p\|^{-n(1+\varepsilon)} \text{ bzw. } 0 < |p(\xi)| \leq \|p\|^{-\frac{n}{2}(1+\varepsilon)+1}$$

genügen. Ein erster vollständiger Beweis dieser Vermutung wurde 1965 von Sprindjuk (Isw.Akad.Nauk SSSR, Bd. 29) veröffentlicht, nachdem eine Reihe von Autoren Teilergebnisse erzielt hatten. Zu den wichtigsten Elementen des Sprindjukschen Beweises gehören neue Überlegungen über die Mengen $\sigma(p,w)$ aller ξ mit $|p(\xi)| \leq \|p\|^{-w}$ für ein gegebenes Polynom p(x) und reelles $w > 0$ sowie die Verwendung einer von dem Vortragenden eingeführten Klasseneinteilung der Polynome p(x), die auf die Größenordnung der Differenzen ihrer Nullstellen Bezug nimmt. Eine Verschärfung des von Sprindjuk bewiesenen Satzes wurde von Baker erzielt; sie wird voraussichtlich 1966 in den Proc.Roy.Acad.Sci. erscheinen

M. Newman (Washington): Modular functions and additive number theory.

Two methods by which information may be obtained about the coefficients of modular forms are the method of "Hecke operators" and the "Subgroup" method. The two methods are explained and illustrated by various identities and congruences for the classical partition function and for the number of representations of an integer as the sum of a fixed number of squares, which have been the subject of recent study.

B. Schoeneberg (Hamburg): Modulformen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen.

Das Verhalten des Logarithmus der Dedekindschen Funktion $\eta(\tau)$ bei Modultransformationen wird bekanntlich im wesentlichen durch gewisse - die sogenannten Dedekindschen Summen bestimmt. Verallgemeinerungen der Dedekindschen Funktion -

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

die "Zähler" der Kleinschen σ-Funktion - führen, wie Curt Meyer gezeigt hat, zu gewissen verallgemeinerten Dedekindschen Summen. Während Meyer seinen Untersuchungen den bekannten Ansatz von Rademacher über das Mellinsche Integral zugrunde legt, ohne zu benutzen, daß die in Frage stehenden Funktionen Integrale 3. Gattung sind, soll hier dieser Umstand herangezogen werden, um nach dem ursprünglichen Ansatz von Riemann-Dedekind, der später von Hecke aufgegriffen wurde, das Verhalten der Verallgemeinerungen von $\eta(\tau)$ bei Modultransformationen zu bestimmen.

W. Schwarz (Freiburg): Einige Anwendungen des Ingham'schen Taubersatzes für Partitionen.

Mit Hilfe des Ingham'schen Taubersatzes (Annals of Math. 1941) werden für gewisse zahlentheoretische Funktionen asymptotische Formeln bestimmt, nämlich unter anderem für:

1) $S(x) = \sum_{n \leq x} \alpha^{-1}(n)$, wobei $\alpha(n)$ das Produkt aller in n aufgehenden Primzahlen ist; mit Hilfe dieser asymptotischen Formel kann eine Vermutung von de Bruijn und van Lint (Acta Arithm. 1964) bestätigt werden.

2) $P_M(x)$ = Anzahl der Lösungen der Ungleichung

$$n_0 + n_1 r^{1^k} + n_2 r^{2^k} + \dots < x$$

in nichtnegativen ganzen Zahlen $n_0, n_1, \dots$ (Verallgemeinerung des Mahlerschen Partitionenproblems).

Für $Q(x)$ = Anzahl aller Zahlen der Gestalt $2^{a_2} 3^{a_3} \dots p^{a_p}$ (p prim) mit monoton fallenden a_ν kann nur $\log Q(x)$ = Hauptglied + $O(\sqrt[4]{\log x})$ gezeigt werden.

P. Bundschuh (Freiburg): Zum Satz von HEILBRONN und LINFOOT über die Klassenzahl 1.

Es wird untersucht, wie weit sich die untere Schranke 10^4 für die p's im Satz von HEILBRONN-LINFOOT (Q.J. of Math., Oxf. V (1934) 293/301) herabdrücken läßt. Dazu wird das dortige Lemma 2 verbessert zu:

$$|\zeta_q(s) - \zeta(2s) - \dots| = |R_q(s)| < \pi\, s(s+1) 4^{s-1/2} p^{-s-3/2} \zeta(2s+3)$$

in $0 < s \leq 1$.

Damit erhält man $\zeta_q(\frac{1}{2}) = \zeta(\frac{1}{2})L_p(\frac{1}{2}) = C + \log \frac{\sqrt{p}}{8\pi} + R_q(\frac{1}{2})$,

wo C die Eulerkonstante und $|R_q(\frac{1}{2})| < \frac{1}{p^2}$. Es ist

$C + \log \frac{\sqrt{p}}{8\pi} = 0$ für $p = \left(\frac{8\pi}{e^C}\right)^2 = 199{,}12 \ldots$. Damit gilt wegen $\zeta(\frac{1}{2}) < 0$: Ist $p \leq 199$ und $h(-p) = 1$, so ist $L_p(\frac{1}{2}) > 0$ und sogar $L_p(s) > 0$ für alle $s \in (0,1]$. Ist $p > 199$ und $h(-p) = 1$, so hat $L_p(s)$ in $(\frac{1}{2}, 1)$ mindestens eine Nullstelle. Wenn es noch eine 10. negative Fundamentaldiskriminante $-p$ mit $h(-p) = 1$ gibt, ist $p > 5 \cdot 10^9$ (Lehmer, 1933) und die "erweiterte" Riemannsche Vermutung falsch. Ferner hat das entsprechende $L_p(s)$ in $(\frac{1}{2}, 1)$ genau eine einfache Nullstelle und zwar bei $s_o = 1 - \varepsilon$, wo

$$\varepsilon = \frac{6}{\pi\sqrt{p}} + O(p^{\delta-1})$$ mit von p unabhängigem δ und $0 < \delta < \frac{1}{4}$.

V. Turán-Sós (Budapest): On localisation theorems in diophantine approximation.

Let $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ inequal real numbers. For the localisation of q's, for which $\max_i \min_{p_i} |q\alpha_i - p_i|$ is "small", is known, that for $0 < \vartheta \leq 1$: $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{1+\vartheta}}$ has always a solution for any N in $N \leq q \leq N^{1+\vartheta}$ and this is the best possible in the sense, that for $o(1)N^{1+\vartheta}$ instead of $N^{1+\vartheta}$ (P. Szüsz). In the n-dimensional case $|\alpha_i - \frac{p_i}{q}| < \frac{1}{q^{1+\vartheta}}$ $(i = 1,\ldots n)$ for $0 < \vartheta < \frac{1}{k}$ has always a solution in $N \leq q \leq N^{\frac{1+\vartheta}{1-(k-1)\vartheta}}$ (T.-S.) this is the "best possible" (Davenport).

For the case of stronger localisation, if $H_{N,A,c} = \{\alpha \mid \exists q, |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{A}{p^2}, N \leq q \leq cN$, and $|H_{N,A,c}|$ is the measure of the set, then Erdös - Szüsz - Turán gave inequalities for $|H_{N,A,c}|$ and proved for $A < \frac{c}{1+c^2}$, that $\lim_{N\to\infty} |H_{N,A,c}| = \frac{n}{\pi^2} A \log c$. Recently Kesten proved, that

$\lim_{N \to \infty} H_{N,A,c}$ exists for every A and c, and now it is possible to determine - by a slightly different proof - the value of $\lim_{N \to \infty} |H_{N,A,c}|$ for every A,c .

A. Baker (Cambridge): Some recent results in Diophantine Approximation.

Recent results were discussed relating to three particular topics in Diophantine approximation.

1. Suppose that α is an algebraic number, not rational, and that $k > 2$. The Thue-Siegel-Roth Theorem implies the existence of $c = c(\alpha,k) > 0$ such that $|\alpha - \frac{p}{q}| > cq^{-k}$ for all rationals $p/q\,(q > 0)$ but, as is well known, the method of proof does not allow c to be determined explicitely. Effective results of this type were recently obtained for certain algebraic numbers α, given essentially by fractional powers of rationals, and, in particular, it was proved that for $\alpha = \sqrt[3]{2}$ and $k = 2{,}955$ we can take $c = 10^{-6}$. The work can be generalised to give new results concerning simultaneous rational approximations to certain sets of algebraic numbers.
2. A measure of transcendence of e: Popken (1929) and Mahler (1932) proved, in particular, that there exist only finitely many sets of integers $x_0, x_1, \dots, x_k$ such that $|x^{k+1}(x_0 + x_1 e + \dots + x_k e^k)| < x^{1-\eta(x)}$, where $x = \max |x_i|$ and $\eta(x)$ is of order $(\log\log x)^{-1}$. It can now be shown that if $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k$ are positive numbers such that $\log\theta_0, \log\theta_1, \dots, \log\theta_k$ are distinct rationals than there exist only finitely many sets of non-zero integers $x_0, x_1, \dots, x_k$ such that $|x_0 x_1 \dots x_k (x_0\theta_0 + \dots + x_k\theta_k)| < x^{1-\varepsilon(x)}$, where $x = \max|x_i|$ and $\varepsilon(x)$ is of order $(\log\log x)^{-1/2}$. The special case $\theta_0 = 1,\ \theta_1 = e, \dots \theta_k = e^k$ provides a further measure of transcendence for e.
3. Let $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, be non-zero real numbers, not all of the same sign, with one at least of the ratios λ_i/λ_j

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

irrational. Then it can be proved that for any positive integer n there exist infinitely many primes p_1, p_2, p_3 such that $|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3| < (\log p)^{-n}$ where p denotes the maximum of p_1, p_2, p_3 .

P. Gerl (Wien): Gleichmäßige Gleichverteilung mod 1.

Betrachtet man Folgen der Gestalt $f(n)\alpha$ ($f(n)$ natürliche Zahlen), so sind sie zwar für fast alle α gleichverteilt mod 1 aber bei geeigneter Wachstumsbedingung für $f(n)$ für fast kein α gleichmäßig gleichverteilt. Es wird nun durch explizite Konstruktion gezeigt, daß die hier auftretenden Nullmengen nicht leer sind und die Ergebnisse auch für Folgen reeller Zahlen $f(n)$ bestehen bleiben.

W. Philipp (Urbana): Metrische Sätze über die Verteilung gewisser Folgen.

Es sei T eine der 3 Transformationen von $[0,1]$ auf sich. 1.) $Tx = \{ax\}$ $a > 1$, ganz 2.) $Tx = \left\{\frac{1}{x}\right\}$ 3.) $Tx = \{\vartheta x\}$, $\vartheta > 1$, nicht ganz ($\{\xi\}$ = Bruchteil von ξ). Sei μ das eindeutig bestimmte, invariante Maß äquivalent zum Lebesgueschen Maß. Es sei $\langle I_n \rangle$ eine Folge von Intervallen in $[0,1]$ und $A(N,x)$ die Anzahl der $n \leq N$, so daß $T^n x \in I_n$. Dann gilt für fast alle x, daß $A(N,x) = \phi(N) + O(\phi(N)^{1/2+\varepsilon})$ wobei $\phi(N) = \sum_{n \leq N} \mu(I_n)$. In Analogie zu einem Satz von M. Kac gilt für eine Klasse von Funktionen, die die Funktionen von beschränkter Variation umfassen und die Funktionen aus Lip α $\alpha > 0$ für $Tx = \left\{\frac{1}{x}\right\}$ ein zentraler Grenzwertsatz, nämlich:

$$\mu\left\{x : \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{n \leq N} f(T^n x) < y\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Dabei wird $\mu(f) = 0$ und $\sigma^2 = \lim \frac{1}{N} \int_0^1 \left(\sum_{n \leq N} f(T^n x)\right)^2 \frac{dx}{(1+x)\log 2}$ vorausgesetzt.

P. Bundschuh

R. Wallisser