Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

20

Tagungsbericht

Topologie

20. bis 30. Sept. 1965

Die Topologie-Tagung in Oberwolfach -dieses Jahr wieder unter der Leitung von A. Dold (Heidelberg), D. Puppe (Saarbrücken) und H. Schubert (Kiel)- beginnt, zu einer festen alljährlichen Einrichtung zu werden. Für 1966 ist als Termin die Zeit vom 6. bis 15. September vorgesehen.

Unter dem Thema der Topologie kamen viele Probleme zur Sprache, die sich ursprünglich an der Topologie entzündet haben, inzwischen aber nach recht verschiedenen Richtungen auseinandergehen. Andererseits ist manches, was als Topologie vorgetragen wird, auch für Algebraiker wichtig.

Der Einladung nach Oberwolfach konnten aus den osteuropäischen Ländern leider nur zwei Herren folgen. Es folgt eine Liste der Teilnehmer und eine Zusammenstellung der Vortragsauszüge. Die Reihenfolge der Vortragsauszüge entspricht der chronologischen Folge der Vorträge.

Teilnehmer:

Andre, M., Genf
Berstein, I., Ithaca/USA
Boardman, J.M., Coventry/Engl.
Boland, J.Ch., Amsterdam/Holl.
Boltjanskiy, V.G., Moskau
Bos, W., Heidelberg
Bröcker, Th., Heidelberg
Burde, G., Neu Isenburg
Tom Dieck, T., Saarbrücken
Dold, A., Heidelberg
End, W., Saarbrücken
Epstein, D.B.A., Coventry/Engl.
Fittler, R., Heidelberg
Fritsch, R., Saarbrücken
Gamst, J., Kiel
Haefliger, A., Nyon/Seine
Halpern, E., Ann Arbor/USA
Jaworowski, F.W., Ithaca/USA
Jerrard, R.P., Coventry/Engl.
Kristensen, L., Aarhus/Dänem.
Kuiper, N.H., Amsterdam
Mahowald, M., Evanston/USA
Mimura, M., Paris
Mrowka, M., Frankfurt/M.
Nguyendinh, N Goc, Antony/Frankr.
Olivier, R., Bonn
Peterson, F.P., Cambridge/USA
Postnikov, M.M., Moskau

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Bericht

Topologie

26. bis 30. Sept. 1965

Die Topologie-Tagung in Oberwolfach -dieses Jahr wieder unter der Leitung von A. Dold (Heidelberg), D. Puppe (Saarbrücken) und H. Schubert (Kiel)- beginnt, zu einer festen alljährlichen Einrichtung zu werden. Für 1966 ist als Termin die Zeit vom 6. bis 15. September vorgesehen.

Unter dem Thema der Topologie kamen viele Probleme zur Sprache, die sich ursprünglich aus der Topologie entwickelt haben, inzwischen aber nach [illegible] verschiedenen Richtungen auseinandergehen. Andererseits ist manches, was ein Topologe vorgetragen wird, auch für Algebraiker wichtig.

Der Einladung nach Oberwolfach konnten aus den osteuropäischen Ländern leider nur zwei Herren folgen. Es folgt eine Liste der Teilnehmer und eine Zusammenstellung der Vortragsauszüge. Die Reihenfolge der Vortragsauszüge entspricht der chronologischen Folge der Vorträge.

Teilnehmer:

André, M., Genf
Bernstein, I., Ithaca/USA
Boardman, J.M., Coventry/Engl.
Boland, J.Ch., Amsterdam/Holl.
Boltjanskij, V.G., Moskau
Bos, W., Heidelberg
Bröcker, Th., Heidelberg
Brude, G., Neu Isenburg
tom Dieck, T., Saarbrücken
Dold, A., Heidelberg
[illegible], E., Saarbrücken
Epstein, D.B.A., Coventry/Engl.
[illegible], R., Heidelberg
[illegible], H., Saarbrücken

Gamst, J., Kiel
Haefliger, A., Lyon/Genf
Halpern, E., Ann Arbor/USA
Jaworowski, J.W., [illegible]/USA
Jerrard, R.P., Coventry/Engl.
Kristensen, L., Aarhus/Dänem.
Kuiper, N.H., Amsterdam
Mahowald, M., Evanston/USA
[illegible], M., Paris
Mrowka, M., Frankfurt/M.
Nguyendinh, N. Con, Antony/Frankr.
Olivier, R., Bonn
Peterson, F.P., Cambridge/USA
Postnikov, M.M., Moskau

Pressmann, I.S., Zürich
Puppe, D., Saarbrücken
Puppe, V., Heidelberg
Reinhart, B.L., z.Zt. Pisa
Bourke, C.P., London
Sanderson, B.J., Coventry/Engl.
Schubert, H., Kiel
Thomeier, S., Frankfurt/M.
Ulmer, F., Heidelberg
Voigt, D., Kiel
Waldhausen, F., Bonn
Weber, C., Genf
Whitehead, G.W., Cambridge/USA
Zeeman, E.Ch., Coventry/Engl.

Vortragsauszüge:

BERSTEIN, I.: Embedding Covering Numbers of Parallelizable Manifolds

Any $[\frac{n}{2}]$-parallizable n-dimensional closed differentiable manifold M can be covered by two open sets, diffeomorphic to subset of the Euclidean space R^n if and only if one of the following three conditions is satisfied:

i) n is odd;

ii) $n = 4k$ and the index of M is zero $(k \geq 2)$;

iii) $n = 4k+2$ and the ARF-Kervaire invariant of M is zero.

PETERSON, F.P.: Spin Cobordism

In this talk we determine the structure of Spin cobordism. We determine the additive structure, much of the multiplicative structure, a complete set of characteristic numbers, and other properties. The main technical theorem is that $H^*(M\,Spin; Z_2)$, as a modul over the steenrod algebra A, is a direct sum of a free modul and modules of type $A/A(Sq^1, Sq^2)$ and type $A/A(Sq^3)$.

JAWOROWSKI, F.W.: Properties of the Smith Index

Let X, T be a space with involution T and let $e_q(X; \Lambda)$ be the Smith class of X with coefficients in an unitary ring Λ, $e_q \in \overset{o}{H}{}^q(X; \Lambda)$, where H are equivariant cohomology groups with coefficients in Λ, twisted by T. Let $\overset{o}{H}_q(X; \Lambda)$ be the corresponding equivariant homology groups.

Let X, T and Y, T two spaces with involutions, and $f: X \to S^n$, $g: Y \to S^n$ be equivariant maps such that $f(X) \cap g(X) = 0$, then for any

$$\xi_q \in \overset{o}{H}_q(X; \Lambda), \qquad \eta_{n-q-1} \in \overset{o}{H}_{n-q-1}(Y; \Lambda)$$

Freymann, I.S., Zürich
Fuppe?, D., Saarbrücken
Puppe, V., Heidelberg
Reinhardt, [illegible]
Remmel?, [illegible]
Sanderson, B.J., Coventry/Engl.
Schubert?, [illegible]
Thomeier, S., Frankfurt/M.
Ulmer?, F., Heidelberg
Vogt, R., Kiel
Waldhausen, F., Bonn
Weber, C., Genf
Whitehead, G.W., Cambridge/USA
Zeeman, E.C., Coventry/Engl.

Vortragsauszüge

[illegible]: Bounding Covering Numbers of [illegible] Manifolds

Let M be a $\frac{n}{2}$-[illegible] n-dimensional closed differentiable manifold [illegible] covered by [illegible] open sets, diffeomorphic to subsets of [illegible] if and only if one of the following three conditions is satisfied:

i) n is odd;

ii) n = 4k and the index of M is zero [illegible];

iii) n = 4k+3 and the [illegible] Kervaire invariant of M is zero.

[illegible]

In this talk [illegible] structure of Spin cobordism. We determine the additive structure [illegible] the multiplicative structure, a complete set of characteristic numbers, and other properties. The main technical theorem is that [illegible] as module over the Steenrod algebra [illegible] is a direct sum [illegible] modules and modules of type [illegible] and type [illegible]

[illegible], P.W.: Groups [illegible] Smith index

Let X, T be a space with involution [illegible] Let $[illegible]_p$ [illegible] be the Smith class of X with coefficients in an [illegible] ring [illegible], where H [illegible] is [illegible] cohomology groups.

Let X, T and Y, T' are spaces with involutions, and [illegible] be an [illegible] such that [illegible] = 0, then for any [illegible] one can define the linking index

$$LK_{f,g}(\xi_q, \eta_{n-q-1}) \in \Lambda,$$

and the Kronecker index

$$K_q(X;\Lambda);\ H_q(X;\Lambda) \to \Lambda.$$

Proposition $LK_{f,g}(\xi_q, \eta_{n-q-1}) = K_q(\xi_q)\cdot K_{n-q-1}(\eta_{n-q-1})$.

Let $I(X;\Lambda) = \max(q : e_q(X;\Lambda) \neq 0)$;
$J(X;\Lambda) = \max(q : K_q(X;\Lambda) \neq 0)$.

Theorem: Let X, Y be spaces with involutions s.th. $J(Y;\Lambda)+J(Y;\Lambda) \geq n$ where Λ is an unitary ring without zero divisors, then $f(X) \cap g(Y) \neq 0$.

Def.: If A is a space $\widetilde{A}$ = sym. deleted square of A.
Corollary: $\varphi : A \to R^{n+1}$, $\psi : B \to R^{n+1}$ be embeddings, $J(\widetilde{A}) + J(\widetilde{B}) \geq n$, then φ and ψ have coinciding directions.

HAEFLIGER, A.: On Classification of Links of Spheres in Spheres in the Trivial Range

Let $(p) = (p_1, \dots, p_r)$ be a sequence of positive integers, $m - p_i > 2$ and let $(q) = (q_1, \dots, q_r)$, where $q_i = m - p_i - 1$. Let

$$\bigvee S^{(q)} = S^{q_1} \vee S^{q_2} \vee \dots \vee S^{q_r}.$$

The isotopy classes of (p)-links in S^m whose i^{th} component is an oriented unknotted p_i-sphere form a group $L^m_{(p)}$.

We define $\Lambda^{(q)}_{(p)_i} = \mathrm{Ker}[\pi_{p_i}(\bigvee S^{(q)}) \to \pi_{p_i}(S^{q_i})]$

$$\Lambda^{(q)}_{(p)} = \sum_{i=1}^{r} \Lambda^{(q)}_{p_i}$$

$$\pi^{(q)}_{m-1} = \pi_m[S^{q_1} \times \dots \times S^{q_r};\ S^{q_1} \vee \dots \vee S^{q_r}] =$$

$$= \mathrm{Ker}[\pi_{m-1}(\bigvee S^{(q)}) \to \sum_i \pi_{m-1}(S^{p_i})].$$

Let $w_i : \Lambda^{(q)}_{p_i} \to \pi^{(q)}_{m-1}$ be the homomorphism defined by $w_i(\alpha) = [\alpha, r_i]$, where r_i is the homotopy class of the inclusion $S^{q_i} \to S^{(q)}$.

Let $w = \sum w_i$.

Theorem: There is an exact sequence

one can define the linking index

$$Lk_{\xi,\zeta}(\xi_c, \eta_{n-q-1}) \in \ldots$$

and the Kronecker index

$$K_n(X;\Lambda) : H_n(X;\Lambda) \to \ldots$$

Proposition: $Lk_{\xi,\zeta}(\xi_c, \eta_{n-q-1}) = K_n(\xi_n) \cdot K_{n-q-1}(\eta_{n-q-1})$.

Let $I(X;\Lambda) = \max(q : \ldots)$ [illegible]

$I(X;\Lambda) = \max(q : \ldots)$ [illegible].

Theorem: Let X, Y be spaces with involutions. If $I(X;\Lambda)+I(Y;\Lambda) \geq n$ where Λ is an unitary ring without zero divisors, then $f(X) \cap g(Y) \neq 0$.

Def.: If X is a space, $\tilde{X}$ = sym. deleted square of X.

Corollary: $f : A \to R^{n+1}$, $g : B \to R^{n+1}$ be embeddings. If $I(\tilde{A}) + I(\tilde{B}) \geq n$, then f and g have coinciding directions.

HAEFLIGER, A.: On Classification of Links of Spheres in Spheres in the Trivial Range

Let $(p) = (p_1, \ldots, p_r)$ be a sequence of positive integers, $m - p_i \geq 3$ and let $(q) = (q_1, \ldots, q_r)$, where $q_i = m - p_i - 1$. Then

$$V_S(p) = S^{p_1} \vee \ldots \vee S^{p_r}.$$

The isotopy classes of (p)-links in S^m whose i-th component is an oriented unknotted p_i-sphere form a group $L^m_{(p)}$.

We define $\lambda_i(p)$ [illegible]

[illegible]

Let w_i : [illegible] be the homomorphism defined by [illegible], where [illegible] is the homotopy class of the inclusion [illegible].

Let $w = \sum w_i$.

Theorem: There is an exact sequence

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\to \pi^{(q)}_{m-1} \to L^{m}_{(p)} \xrightarrow{\lambda} \Lambda^{(q)}_{(p)} \xrightarrow{w} \pi^{(q)}_{m-2} \to L^{m-1}_{(p-1)} \to \ldots .$$

BURDE, G., ZIESCHANG, H.: Eine Kennzeichnung der Torus-Knoten

Die Torus-Knoten lassen sich durch ihre Gruppe kennzeichnen:

SATZ: Ein Knoten, dessen Gruppe ein nicht-triviales Zentrum besitzt, ist ein Torus-Knoten.

Nach Neuwirth und Stallinger läßt sich der Außenraum K eines solchen Knotens mit der in den Knoten einspannbaren Fläche F minimalen Geschlechtes fasern, d.h. K entsteht aus $F \times I$ durch Identifizierung von $F \times 0$ und $F \times 1$ mit einem Homöomorphismus η von F, $K = F \times I/\eta$. Nach einem Satz von Nielsen (Acta Math. 75) kann η unter den gemachten Voraussetzungen durch einen periodischen Homöomorphismus ζ ersetzt werden.

Mit Hilfe von ζ läßt sich eine Seifertsche Faserung der S^3 konstruieren, in der der Knoten eine normale Faser, also ein Torus-Knoten ist. (erscheint in Math. Ann.).

SANDERSON, B.J.: Embedding Spheres in Spheres

There are embedding groups (of spheres in spheres) in two categories -the smooth and the piecewise linear. My aim is to reduce these groups to homotopy theory and in doing so recover many known results. The end is achived by the introduction of a new c.s.s. complex Lq, which stabilises to the well known complex PL of Milnor.

POSTNIKOV, M.M.: On the Topological Invariance of the Pontrjagin-Classes

There was presented the Novikov-Theorem of the topological invariance of the rational Pontrjagin-classes. It is easely implied by the following Theorem:

Theorem: Let a smooth manifold W be homeomorphic to the product $N^{4K} \times R^{m}$, where N^{4K} is a compact simply connected manifold. Then $\langle L_K(W), [N^{4K}] \otimes 1 \rangle = \tau(N^{4K})$.

The proof of this theorem is based on the following

Lemma: Let a smooth manifold $\bar{W}^{n+1}$ be homotopy equivalent to a compact oriented manifold M^n, and let

1) $\pi_1(M) = \underline{Z} + \underline{Z} + \ldots + \underline{Z}$

2) $\bar{\mathfrak{I}}_0 : \bar{W} \to \bar{W}$ homeomorphism which acts freely, discreatly, such that the factor space $\bar{W}/\bar{\mathfrak{I}}_0$ is compact, then

$$\bar{W} = V^n \times R$$

where V^n is a smooth manifold.

MROWKA, M.: Über Homotopiegruppen, die der Čechschen Homologie zugeordnet sind

Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen hat F.W. Bauer [Math. Ann. 149 (1963)] zu einem gegebenen Homologiefunktor H einen Homotopiefunktor π^H konstruiert, der durch die folgenden beiden Eigenschaften charakterisiert ist:

A: Es gilt ein Herewicz-Satz, d.h.: Es gibt einen Homomorphismus $h : \pi^H_n(X) \to H_n(X)$, der ein Isomorphismus ist, wenn X in Dimensionen < n H-azyklisch ist.

B: Wenn ein anderer Funktor $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft A hat, gibt es einen Homomorphismus von Funktoren

$$\varphi : \pi^H \to \mathfrak{H}$$

Wenn H die ganzzahlige singuläre Homologie ist, ist π^H die gewöhnliche Homotopietheorie. Sei nun $\check{\pi}_n$ der Homotopiefunktor zur Čechschen Homologie.

SATZ I: $\check{\pi}_n(X \times Y)$ ist in natürlicher Weise isomorph zu $\check{\pi}_n(X) + \pi_n(Y)$.

SATZ II: Ist S^n eine n-Sphäre und $r > n$; $r \neq 2n-1$, falls n gerade, so ist

$$\psi' : \pi_r(S^n) \to \check{\pi}_r(S^n)$$

der triviale Homomorphismus.

SATZ III: $\psi' : \pi_{n+1}(S^n) \to \check{\pi}_{n+1}(S^n)$ ist ein Epimorphismus für $n > 2$.

Corollar: $\check{\pi}_{n+1}(S^n) = 0$, $n > 2$.

The proof of this theorem is based on the following

Lemma: Let a smooth manifold V^{n+1} be homotopy equivalent to a c[illegible] not oriented manifold M^n, and let

1) $\pi_1(M) = Z + Z + \dots + Z$

2) $f_i : V \to V$ [illegible] homeomorphisms which act freely, discre[illegible] such that the [illegible] space V/f_i is compact, then

[illegible]

[illegible] manifold.

[illegible]ROWKA, M.: Über Homotopieäquivalenz [illegible]

[illegible] hat F. W. Bauer [Math. An[illegible] [illegible] Homologie-Funktor H einen Homotopiefu[illegible] konstruiert, [illegible] die folgenden beiden Eigenschaften [illegible]:

A: Es gibt [illegible] Hurewicz-[illegible], d.h.: Es gibt einen Homomorphismus $h : \pi_n(X) \to H_n(X)$, der ein Isomorphismus ist, wenn X in Dimension $< n$ [illegible] ist.

B: Wenn ein anderer Funktor G die Eigenschaft A hat, gibt es einen [illegible] Homomorphismus der Funktoren $\varphi : [illegible] \to \pi^H$

Wenn H die ganzzahlige singuläre Homologie ist, ist π^H die gewöhnliche Homotopietheorie. Sei nun $\check{\pi}_n$ der Homotopiefunktor zur [Čech]schen Homologie.

SATZ I: $\check{\pi}_n(X \times Y)$ ist in natürlicher Weise isomorph zu $\check{\pi}_n(X) + \pi_n(Y)$

SATZ II: Ist S^n eine n-Sphäre und $r > n$, $r \neq 2n-1$, falls n gerade, so ist

$$\psi : \pi_r(S^n) \to \check{\pi}_r(S^n)$$

der triviale Homomorphismus.

SATZ III: $\psi : \pi_{n+1}(S^n) \to \check{\pi}_{n+1}(S^n)$ ist ein Epimorphismus für n [illegible]

Korollar: $\check{\pi}_{n+1}(S^n) = 0$, $n > 2$.

MAHOWALD, M.: On the Evaluation of Whithead Products in S^n

The evaluation of Whithead products is reduced to a computation of $i_*: \pi_j(S^n) \to \pi_j(V_n)$ and the determination of $J(i_{1*}\alpha)$ where $i_1 \to V_n \to BS0(n)$. ($V_n = S0/_{S0(n)}$). Some devices for showing $J(i_{1*}\alpha) \neq 0$ were discussed and these ideas were applied to check $[1_n, \alpha]$ for $\alpha \in \pi_j(S^n)$, $j \leq n+13$ or $\alpha \in im(J)$ stably. With a few exceptions this gives complete information in this range for n "large enough" and n not "near" a power of 2.

ZEEMAN, E.C.: Piecewise Linear Transversality

We work in the PL category.

Theorem: Let M, P, Q, be manifolds, and let $P \supset Q$. Let $f: M \to P$ be an embedding. Then we can ambient isotop f until it cuts Q transversely.

The theorem can be extended to maps as well as embedding with the consequence that if f is transversal to Q then $f^{-1}Q$ is a submanifold of M of the same codimension as Q in P. Moreover the homotopy class of f determines the cobordism class of $f^{-1}Q$. The application is PL-cobordism theory.

Another application is to develop a theora of regular neighbourhoods in the PL-category, analogous to the theory of tubular neighbourhoods and vector bundles in the differential category. The theorem enables us to define Whitney sum, and induced regular neighbourhoods.

BOLAND, J.Ch.: Embedding of Graphs in Orientable Surfaces

There exists a theorem of MacLane giving necessary and sufficient conditions for embeddability of a graph in the 2-sphere. The theorem of MacLane depends essentially on the unicoherence of the sphere. The MacLane theorem can be generalized to orientable surfaces T_n of genus n, if we use homotopy groups in the place of homology groups. The following theorem is proved: A non-separable graph G is embedding in T_n (orientable surface of genus n) if and only if there exists a set of circuits $\{C_1 \ldots C_m\}$ in G, determining a normal subgroup N in $\pi_1(G, g_o)$ such that:

1) every edge of G is on at most two of the circuits C_i $(1 \leq i \leq m)$

2) $\pi_1(G, g_o)/_N = F_{n_o} * \pi_1(T_{n_1})$ with $n_o + n_1 \leq n$, where F_{n_o} means a free group of rank n_o and $*$ means the free product.

ROURKE, C.P.: Spanning spheres in Balls

The following extension to Zeemans unknotting theorem for spheres and balls in codimension ≥ 3 was discussed:

PROBLEM: Given an embedding $S^n \subset B^K$; $k - n \geq 3$ (everything piecewise linear);

$$\exists\, B^{n+1} \subset B^K \text{ with } \partial B^{n+1} = S^n \,?$$

The answers (so far as is known to date) are:

(1) Yes if S^n is embedding properly in B^K, i.e. $S^n \subset \operatorname{int} B^K$. -This follows from Zeeman.

(2) Yes if $K > \frac{3}{2}(n+1)$

(3) Yes if $K \leq \frac{3}{2}(n+1)$ and $S^n \cap \partial B^K = M^n \cup X$ where $S^n - M^n$ is $2n+1-K$ - connected and X has dimension $\leq K-n-3$.

The problem of existence of unspannable embeddings of $S^n \subset B^K$, $K - n \geq 3$ is still unsolved.

WEBER, C.: Piecewise-Linear Embeddings in a Euclidean Space

If $f : K^n \to R^m$ is a piecewise linear embedding, $\hat{f} : K \times K - \Delta_K = \hat{K} \to S^{m-1}$ defined by $\hat{f}(x, y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}$ is an equivariant map

THEOREM 1: If $m \geq 3/2\,(n+1)$, and if $F : \hat{K} \to S^{m-1}$ is an equivariant map, one can construct a piesewise linear embedding f of the polyhedron K in R^m such that $\hat{f}$ is equivariantly homotopic to F.

THEOREM 2: If $m > 3/2\,(n+1)$, and if $f, g, K^n \to R^m$ are piecewise linear embeddings such that $\hat{f}$ is equivariantly homotopic to $\hat{g}$, then f is isotopic to g.

Among some corollaries, using Haefliger's and Massey's computations, one can state:

THEOREM 3: If an n-dimensional, piecewise linear, closed manifold

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

does not embed in R^{2n-1}, then it is non-orientable and n is a power of 2.

THEOREM 4: If V^n is an n-manifold, closed orientable, homologically K-connected, and if $2(K+2) \leq n$, the isotopy classes of embeddings of V^n in R^{2n-K} correspond bijectively to:

$H^{n-K-1}(V, Z)$ if $(n-K)$ is odd $H^{n-K-1}(V, Z_2)$ if $(n-K)$ is even.

EPSTEIN, D.: Eilenberg-Zilber a la Dold.

The Eilenberg-Zilber Theorem is proved in a very functorial manner. We work in the category $M^{[r]}$ with objects $M(i_1, \ldots, i_r)$ where $i_1, \ldots, i_r$ are nun-negative integers and with morphisms from $M(i_1, \ldots, i_r)$ to $M(j_1, \ldots, j_r)$ being formal sums of symbols $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_r$, where $\alpha_K : \{0, 1, \ldots, j_K\} \to \{0, 1, \ldots, i_K\}$ is a monotone function. This theorem is applied to obtain cohomology operations in cohomology with coefficients in a sheaf.

BOARDMAN, J.M.: A Category for Stable Homotopy Theory.

For stable homotopy theory, one must construct a category which possesses all the desirable properties of CW-complexes in ordinary homotopy theory, together with those one finds in stability theorems. To achieve this, it is necessary to analyse J.H.C. Whitehead's work on CW-complexes in detail. The resulting category has further useful properties; for example, all (suitable) cohomology theories (including K-theory) are representable, and one can write down an Adams spectral sequence valid without restriction.

KRISTENSEN, L.: A Higher Product Structure in Cohomology

Let $R : \hat{\alpha} S_q^j + S_q^{\frac{i+1+j}{2}} \hat{\beta} + \Sigma \hat{\alpha}_\nu \hat{a}_\nu + \hat{e} = 0$ be a relation of degree $i+1$ in the steenrod algebra $\mathfrak{A}$ with excess - $(\hat{e}) \geq N+1$, $j < N$, and excess - $(\hat{\alpha}_\nu \hat{a}_\nu) \geq j+1$ for all ν. Let $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ be the diagonal in $\mathfrak{A}$, and

$$\psi(\hat{\alpha}) = \Sigma_S \hat{\alpha}'_S \otimes \hat{\alpha}''_S = \Sigma \hat{\alpha}''_S \otimes \hat{\alpha}'_S + \hat{\beta} \otimes \hat{\beta} \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}.$$

THEOREM: There is a secondary cohomology operation Φ associated with R, with the property does not embed in R^{n-1}, then it is non-orientable and n is a power of 2.

THEOREM 4: If V^n is an n-manifold, closed orientable, homologically k-connected, and if [illegible], the isotopy classes of embeddings of V^n in R^{n-1} correspond bijectively to:

[illegible] if $(n-k)$ is even.

[illegible], L.: Eilenberg-Zilber à la Dold.

The Eilenberg-Zilber Theorem is proved in a very functorial manner. [illegible] work in the category $M^{[r]}$ with objects $M(i_1, \dots, i_r)$ where $i_1, \dots, i_r$ are non-negative integers and with morphisms from $M(i_1, \dots, i_r)$ to $M(j_1, \dots, j_r)$ being formal sums of symbols $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_r$, where $\alpha_k : \{0, 1, \dots, j_k\} \to \{0, 1, \dots, i_k\}$ is a monotone function. The theorem is applied to obtain cohomology operations in cohomology with coefficients in a sheaf.

BOARDMAN, J. M.: A Category for Stable Homotopy Theory.

For stable homotopy theory, one must construct a category which possesses all the desirable properties of CW-complexes in ordinary homotopy theory, together with those one finds in stability theorems. To achieve this, it is necessary to analyse J. H. C. Whitehead's work on CW-complexes in detail. The resulting category has further useful properties: for example, all (suitable) cohomology theories (including K-theory) are representable, and one can write down an Adams spectral sequence valid without restriction.

[illegible], L.: A Higher Product Structure in Cohomology

Let [illegible] be a relation of degree $i+1$ in the Steenrod algebra [illegible] with excess [illegible] $j < N$, and excess [illegible] for all [illegible]. Let [illegible] the diagonal in [illegible], and

$$\phi(\ ) = [illegible]$$

THEOREM: There is a secondary cohomology operation [illegible] associated with R, with the property

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \deg x < j-1 \\ \Sigma\, \alpha_S'(\hat{x})\, a_S''(\hat{x}) & \text{if } \deg \hat{x} = j-1. \end{cases}$$

to investigate ψ in dimension j, let $\hat{a} \in \mathfrak{A}_{i+1}$ and let

$$A : \begin{cases} \hat{a} = \Sigma\, \hat{\alpha}_\nu\, \hat{a}_\nu \\ \psi(a) = \Sigma\, \hat{b}_i \otimes \hat{c}_i + \Sigma\, \hat{b}_K \otimes \hat{c}_K \end{cases}$$

be a relation for $\hat{a}$; then there is a secondary product operation

$$\hat{x} \overset{A}{\cup} \hat{y} \in H^{h+q+i}(x) \,/\, \mathrm{Ind}.$$

defined for $\hat{x} \in H^p(x)$; $\hat{y} \in H^q(x)$ s.th. $\hat{a}_\nu(\hat{x}\,\hat{y}) = 0$, $\hat{b}_i(\hat{x}) = 0$ and $\hat{c}_K(\hat{y}) = 0$ for all ν, i, K.

$$\mathrm{Ind} = \Sigma\, \hat{\alpha}_\nu H^*(x) + \Sigma\, \hat{b}_i(H^*(x)) \cdot \hat{c}_i(\hat{y}) + \Sigma\, \hat{b}_K(\hat{x}) \cdot \hat{c}_j(H^*(x)).$$

This product behaves very much like the cup-product, however it is not always commutative.

KUIPER, N.H.: Microbundles and Bundles

(joint work with R. Lashof) A new (but equivalent) definition of microbundle is given and the following theorems are proved:

THEOREM 1: In the topological and in the piecewise linear category every micro n-bundle contains a R^n-bundle and a S^n-bundle with zero crossection, and these bundles are unique up to equivalence.

THEOREM 2: In the same categories every micro-(p+n, p)-bundle contains a bundle of type (fibre-pair) (R^{p+n}, R^p), unique up to equivalence.

THEOREM 3: If ω is a R^n-bundle over X with zerosection $sX \subset E$, E the total space, U an open set in E which contains sX, then there exists a bundle ω' microidentical with ω, with total space contained in U.

The topological version of Theorem 1 is due to Kister.

WALDHAUSEN, F.: Eine Verallgemeinerung der Seifert'schen Faserräume

Es werden kompakte 3-dim. Mannigfaltigkeiten M der folgenden Art betrachtet: In M gibt es ein System (endl. vieler) disjunkter Tori, so daß M von diesen Tori in S'-Bündel zerschnitten wird. Nach geeigneten Reduktionen (d.h. es werden möglichst viele der Tori "weggelassen", und

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \deg x < j-1 \\ \sum a_S'(\hat{x})\, a_S''(\hat{x}) & \text{if } \deg \hat{x} = j-1 \text{ [illegible]} \end{cases}$$

to investigate φ in dimension j, let [illegible] and let [illegible]

[illegible]

be a relation for $\hat{x}$; then there is a secondary product operation

$\hat{x} \cup \hat{y} \in H^{p+q+1}(x) / \text{Ind.}$

defined for $\hat{x} \in H^p(x)$; $\hat{y} \in H^q(x)$ s.th. $\hat{a}_\nu(\hat{x}, \hat{y}) = 0$, $\hat{b}_i(\hat{x}) = 0$ and $\hat{c}_\kappa(\hat{y}) = 0$ for all ν, i, κ.

$\text{Ind} = \sum \hat{a}_\nu H^*(x) + \sum \hat{b}_i(H^*(x)) \cdot \hat{c}_i(\hat{y}) + \sum \hat{b}_\kappa(\hat{x}) \cdot \hat{c}_\kappa(H^*(x))$.

This product behaves very much like the cup-product, however it is not always commutative.

KUIPER, N. H.: Microbundles and Bundles

(joint work with N. Lashof) A new (but equivalent) definition of micro-bundle is given and the following theorems are proved:

THEOREM 1: In the topological and in the piecewise linear category every micro n-bundle contains a R^n-bundle and a D^n-bundle with zero cross-section, and these bundles are unique up to equivalence.

THEOREM 2: In the same categories every micro-(n+m, p)-bundle contains a bundle of type (fibre-pair) (R^{n+m}, R^p), unique up to equivalence.

THEOREM 3: If ω is a R^n-bundle over X with zero-section $sX \subset E$, E the total space, U an open set in E which contains sX, then there exists a bundle ω' microidentical with ω, with total space contained in U.

The topological version of Theorem 1 is due to Kister.

WALDHAUSEN, F.: Eine Verallgemeinerung der Seifert'schen Faserräume

Es werden kompakte 3-dim. Mannigfaltigkeiten M der folgenden Art betrachtet: In M gibt es ein System (endl. vieler) disjunkter Tori, so daß M von diesen Tori in Seifert-Blätter zerschnitten wird. Nach geeigneten Reduktionen (d.h. es werden möglichst viele der Tori "weggelassen", und

M wird eventuell in eine zusammenhängende Summe aufgespalten) ist diese Struktur "i. a." eine topologische Invariante; die Ausnahmen lassen sich explizit angeben.

Daraus folgt, daß die von Seifert angegebene Klassifikation der Seifertschen Faserräume [Acta Math. 60] "i. a." auch eine topologische Klassifikation ist.

ANDRE, M.: Homology of Group Extensions

Let us consider an extension of groups $K \to G \to S$ and a G-module M. A differential ∂ is described on the tensor product of the groups of non-homogeneous chains $C_*(K, M)$ and $C_*(S, Z)$ such that the homology groups are exactly the $H_n(G, M)$. In the case where K is abelian and acts trivially on M, the group G does not appear explicitly in ∂, a 2-cocycle representing the element ρ of $H^2(S, K)$ corresponding to the extension is sufficient, with the S-structures of K and M. In this case the differential d_2 of the spectral sequence

$$H_p(S, H_q(K, M)) \Longrightarrow H_n(G, M)$$

is computed; the element ρ of $H^2(S, K)$ "represents" in some sense a difference of characteristic classes (for the split extension and for the considered extension both with the same S-structure on K).

ULMER, F.: Satellites in General Categories and Applications

The right satellites $(S^j t)_{j \in Z_+}$ (and dually left satellites $(S_j t)_{j \in Z_+}$) of a functor $t : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ can be defined relative to a distinguished class S of three term sequence of $\mathfrak{K}$ by an universal property, and also constructed under some conditions on $\mathfrak{K}'$ and S. The first satellite of $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{K}}[A, -] : \mathfrak{K} \to$ Sets classifies the extensions of S, i.e. the set $S^1\mathrm{Hom}_{\mathfrak{K}}[A, -](B)$ is isomorphic to the set of sequence $B \to X \to A$ of S (under the usual equivalence relation). The higher satellites of $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{K}}[A, -]$ can be interpreted analogously to $\mathrm{Ext}^j(A, -)$. If t is an additive functor between abelian categories, then our satellites coincide with those of Cartan-Eilenberg (chap III 5.1) resp. Grothendieck.

Several examples were discussed.

A wird eventuell in eine zusammenhängende Summe aufgespalten) ist diese Struktur "i.a." [illegible] eine topologische Invariante; die Ausnahmen lassen sich explizit angeben.

Daraus folgt, daß die von Seifert angegebene Klassifikation der Seifertschen Faserräume [Acta Math. 60] "i.a." auch eine topologische Klassifikation ist.

[illegible], M.: <u>Homology of Group Extensions</u>

Let us consider an extension of groups $K \to G \to Q$ and a G-module M. A differential d is described on the tensor product of the groups of non-homogeneous chains $C_*(K, M)$ and $C_*(S, Z)$ such that the homology groups are exactly the $H_n(G, M)$. In the case where K is abelian and acts trivially on M, the group G does not appear explicitly in d, a 2-cocycle representing the element e of $H^2(Q, K)$ corresponding to the extension is sufficient, with the Q-structures of K and M. In this case the differential d_2 of the spectral sequence

$$H_p(Q, H_q(K, M)) \Longrightarrow H_n(G, M)$$

is computed: the element e of $H^2(Q, K)$ "represents" in some sense a difference of characteristic classes (for the split extension and for the considered extension both with the same Q-structure on K).

ULMER, F.: <u>Satellites in General Categories and Applications</u>

The right satellites $(S^j t)_{j \in Z_+}$ (and dually left satellites $(S_j t)_{j \in Z_+}$) of a functor $t : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ can be defined relative to a distinguished class S of three term sequences of $\mathcal{A}$ by an universal property, and also constructed under some conditions on $\mathcal{A}$ and S. The first satellite of $\mathrm{Hom}[A, -] : \mathcal{A} \to \mathrm{Sets}$ classifies the extensions of S, i.e. the set $S^1\mathrm{Hom}[A, -](B)$ is isomorphic to the set of sequences $B \to X \to A$ of S (under the usual equivalence relation). The higher satellites of $\mathrm{Hom}[A, -]$ can be interpreted analogously to $\mathrm{Ext}^i(A, -)$. If t is an additive functor between abelian categories, then our satellites coincide with those of Cartan-Eilenberg (chap III 5.1) resp. Grothendieck.

Several examples are discussed.

BOLTJANSKII, G.W.: Gewisse Anwendungen topologischer Halbkörper

Der Begriff "Topologische Halbkörper" stammt von M.Ja. Antonoffskii, T.A. Sarymßakoff und dem Autor. Ein top. Halbkörper ist ein halbgeordneter top. Ring, in dem die Bildung des reziproken Elementes teilweise möglich ist. Die Axiome eines top. Halbkörpers erinnern in vielem an die Körper der reellen Zahlen.

Das gibt die Möglichkeit, metrische Räume über Halbkörpern zu betrachten, d.h. Räume, bei denen der Abstand zwischen zwei Punkten eine positive Zahl aus einer gewissen Halbgruppe ist.

Die Betrachtung metrischer Räume über Halbkörpern erlaubt die Verallgemeinerung und Verschärfung einer Reihe klassischer Sätze der Analysis, wie z.B. des Satzes von KAKUTANI über die Existenz invarianter Metriken in Gruppen, des Satzes von Banach über offene Abbildungen und andere. Gleichzeitig erweist sich der Begriff "top. Halbkörper" als bequem zur Betrachtung einer Reihe von Fragen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Ergodentheorie.

BRÜCKER, Th.: Homologie symmetrischer und alternierender Gruppen

Sei $S(n)$ die symmetrische, $A(n)$ die alternierende Gruppe vom Grad n, p eine Primzahl $\neq 2$, dann folgt aus einer allgemeinen Überlegung über Gruppen mit endlicher zyklischer Faktorgruppe:

$$H_*(A(n); Z_p) = H_*(S(n); Z_p^{(o)}) \quad H_*(S(n); Z_p^{(1)}).$$

Die Gruppen der rechten Seite operieren als Steenrod-Operationen auf der Kohomologie topologischer Räume. Sie lassen sich daher mit Hilfe des Cartanschen Struktursatzes für die Eilenberg-MacLane-Gruppen berechnen. Der Struktursatz für $H_*(S(n); Z_p^{(q)})$ (für $q = 0$ von Nakaoka) wurde angegeben. (i.d. Math.Ztschr. eingereicht).

PUPPE, V.: Cohomologieoperationen in symmetrischen Produkten

Sei X ein topologischer Raum und ${}^{\Gamma}X = X \times X \ldots \times X/_{\Gamma}$ das Γ-Produkt von X, wobei Γ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $S(n)$ ist, dann gilt folgender Satz:

SATZ: a) Sind die Cohomologiespektren (d.h. die Cohomologieringe [illegible]LETJANSKI, O.W.: Gewisse Anwendungen topologischer Halbkörper

Der Begriff "Topologische Halbkörper" stammt von [illegible] Antonofski, T.A. Sarymsakoff und dem Autor. Ein top. Halbkörper ist ein halbgeordneter top. Ring, in dem die Bildung des reziproken Elementes teilweise möglich ist. Die Axiome eines top. Halbkörpers erinnern in vielem an die Axiome der reellen Zahlen.

[illegible] Möglichkeiten, [illegible] Halbkörper zu betrachten, z.B. [illegible] Abstand zwischen [illegible] sich [illegible] Halbgruppe [illegible].

[illegible] Halbkörper [illegible] die Vervoll-[illegible], und [illegible] Beschreibung [illegible] die Klassifikation [illegible] der Analysis, wie z.B. der Satz von [illegible] über die Existenz invarianter Mittel in Gruppen, der Satz von [illegible] über [illegible] Abbildungen und and. [illegible] erweist sich der Begriff "top. Halbkörper" als bequem zur Betrachtung einer Reihe von Fragen aus der [illegible] Wahrscheinlichkeitstheorie und der Ergodentheorie.

[illegible], Th.: Homologie symmetrischer und alternierender Gruppen

Ist S(n) die symmetrische, A(n) die alternierende Gruppe vom Grad n, p eine Primzahl $\neq 2$, dann folgt aus einer allgemeinen Überlegung über Gruppen mit endlicher zyklischer Faktorgruppe:

$$H_*(A(n); Z_p) = H_*(S(n): Z_p^{(o)}) \quad H_*(S(n); Z_p^{(1)}).$$

Die Gruppen der rechten Seite operieren als Ste-mod-Operationen auf der Kohomologie topologischer Räume. Sie lassen sich daher mit Hilfe des Cartanschen Struktursatzes für die Eilenberg-MacLane-Gruppen berechnen. Der Struktursatz für $H_*(S(n); Z_p^{(p)})$ (für $n = 0$ von Nakaoka) wurde angegeben. (i.d. Math. Ztschr. eingereicht).

[illegible], V.: Cohomologieoperationen in symmetrisch [illegible] reduzierten [illegible]

Sei [illegible] ein topologischer Raum und [illegible] $= X \times X \ldots \times X$ [illegible] das [illegible]-Produkt von [illegible], wobei [illegible] eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S(n) ist, dann gilt folgender Satz:

SATZ: a) Sind die Cohomologiespektren (d.h. die [illegible]ringe mit allen Koeffizienten Z_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ einschließlich der Bockstein- und Koeffizientenhomomorphismen) zweier in jeder Dimension endlicher CW-Komplexe X und Y isomorph, so gilt dies auch für die Γ-Produkte ΓX und ΓY.

b) Ist der Isomorphismus der Spektren außerdem noch mit allen von der zyklischen Gruppe Z_p induzierten Steenrodschen Cohomologieoperationen vertauschbar, so gilt dies auch für ΓX und ΓY.

Man kann Teil b) auch für alle Cohomologieopertaionen formulieren und den Satz auf Koeffizienten in einem nullteilerfreien Hauptidealring verallgemeinern. Insbesondere gilt der Satz mit Koeffizienten Z_p; das Spektrum reduziert sich dabei auf den Cohomologiering mit Koeffizienten Z_p und die Cohomologieoperationen auf die Sq^i bzw. P^i.

BOS, W.: Über die Ringvermutung und die Theorie der stabilen Mannigfaltigkeiten

Zwei verdickbare disjunkte $(n-1)$ Sphären Σ_1, Σ_2 in S^n beranden genau dann einen Ring $A \approx S^{n-1} \times [0, 1]$, wenn es zwei $(n-1)$-Vollkugeln $B_i \subset \Sigma_i$, $i = 1, 2$ gibt, die durch eine verdickbare $(n-1)$-Vollkugel B verbindbar sind, d.h. B_i enthält für $i = 1, 2$ je eine nicht leere, offene Menge von B. Die Verbindbarkeit liefert eine Äquivalenzrelation in der Menge aller verdickbaren $(n-1)$-Vollkugeln von S^n. Diese Relation ist genau dann trivial, (d.h. stets erfüllt), wenn die Ringvermutung der Dimension n richtig ist. Die gleiche Definition ergibt eine Äquivalenzrelation in der Menge aller verdickbaren $(n-1)$-Vollkugeln einer beliebigen topologischen Mannigfaltigkeit M^n. Die Trivialität dieser Relationen für eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit würde ebenfalls aus der Richtigkeit der Ringvermutung folgen. Die Bedingung der Verbindbarkeit zweier $(n-1)$-Vollkugeln läßt sich zu einer Verbindbarkeit längs eines Weges verschärfen. Falls die Mannigfaltigkeit eine stabile Struktur zuläßt, sind die beiden Verbindbarkeitsrelationen äquivalent. Die Ringvermutung ist äquivalent mit der Trivialität der Verbindbarkeitsrelation einer einzigen beliebigen stabilen Mannigfaltigkeit.

(weitere Resultate erscheinen in den Math. Annalen).

DOLD, A.: Halbexakte Funktoren und Postnikov-Zerlegung

Sei $\underline{W}_*$ die Kategorie der kompakten zusammenhängenden CW-Räume mit Grundpunkt. Ein kontravarianter additiver Funktor t von $\underline{W}_*$ in die Kategorie der Mengen heißt halbexakt, wenn er homotopieinvariant ist und wenn die Folge

$$t(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{(tj_1,\, tj_2)} (t\, X_1) \times (t\, X_2) \underset{t\, i_2}{\overset{t\, i_1}{\rightrightarrows}} t(X_1 \cap X_2)$$

stets exakt ist (i_μ, j_ν Inklusionen).

Typisches Beispiel: $t\, X = \pi(X, K)_*$ = Menge der punktierten Homotopieklasse von Abbildungen $X \to K$, wo K ein fester (CW)-Raum ist; in diesem Beispiel ist K bis auf Homotopieäquivalenz durch t bestimmt. Die klassische Postnikovzerlegung für Räume K wird auf halbexakte Funktoren t verallgemeinert; die Verallgemeinerung erweist sich gleichzeitig als einfacher.

NGUYENDINH NGOC: On Some Categorical Algebraic Aspects of K-Theory

Description of Karoubi's extraordinary cohomology theories of linear categories and Banach W-categories, where Bott's periodicity is a consequence of a categorical periodicity. Description of unstable characteristic classes, Shiweishu's isomorphism theorems, and motivation of the calculation of the cohomology of BH. definition of a problem of "covariantization" of diagrams whose solution are Rieman-Roch theorems. Some possible applications and open questions were pointed out - for details c.f. Seminaire de K-Theorie Topologique (exp. Shihweishu, Karoubi, Nguyendinh Ngoc), I.H.E.S. Bures-sur-Yvette, France, 1964-1965 (to appear).