22

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

der Arbeitsgemeinschaft unter Leitung von
Herrn Prof. Puppe

vom 18. bis 23.10.1965

Diese Arbeitsgemeinschaft behandelte die K-Theorie kompakter oder endlichdimensionaler parakompakter topologischer Räume nach Atiyah-Bott-Hirzebruch, insbesondere den Periodititätssatz von Bott und dessen Anwendungen. Dem Umfang des Themas entsprechend wurde sehr intensiv gearbeitet; nur mit Mühe ließen sich alle Vorträge in einer Woche unterbringen. Im folgenden werden, von den Vortragenden angefertigte, Kurzfassungen der Vorträge wiedergegeben.

Teilnehmer:

Armbrust, Dr., Köln
Brandis, Dr. A., Tübingen
tom Dieck, Dr. T., Saarbrücken
Dold, Prof. Dr. A., Heidelberg
Dreß, Dr. A., Kiel (Berlin)
Gabrien, Prof. Dr. P., Straßburg
Habicht, Prof. Dr. W., Basel
Harder, Dr. G., Hamburg
Hoechsmann, Dr. K., Tübingen
Jehne, Prof. Dr. W., Köln
Knebusch, Dr., Hamburg
Kneser, Prof. Dr. M., Göttingen
König, Prof. Dr. H., Saarbrücken
Kunz, Dr. E., Heidelberg
Kupisch, Dr. H., Saarbrücken
Lamprecht, Prof. Dr. E., Saarbrücken
Legrady, Dr. K., Hamburg
Nastold, Dr. H.-J., Heidelberg
Puppe, Prof. Dr. D., Saarbrücken
Roquette, Prof. Dr. P., Tübingen
Zieschang, Dr. H., Frankfurt

Vortragsauszüge

LEGRADY, K.: Vektorraumbündel

Definition und elementare Eigenschaften der reellen und komplexen Vektorraumbündel endlicher Faserdimension und der Bündelabbildungen. Induzierte Bündel. Beispiele: Tangentialbündel der C^∞-Mannigfaltigkeiten, kanonische Geradenbündel der projektiven Räume. Operationen mit Vektorraumbündel: Satz: Jeder stetige n-stellige Funktor $\mathfrak{T}$ der Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume in sich definiert für jeden topologischen Raum B einen analogen Funktor $\mathfrak{T}_B$ der Vektorraumbündel auf B, jeder natürlichen Transformation $\mu : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}'$ entspricht eine natürliche Transformation $\mu_B : \mathfrak{T}_B \to \mathfrak{T}_B'$.

Beispiele: Whitneysumme, Tensorprodukt, äußere Potenzen, Hom. Zur Konstruktion dieser Funktoren $B \rightsquigarrow \mathfrak{T}_B$ wurde der Satz benutzt und bewiesen, daß ein k-Vektorraumbündel "dasselbe" ist, wie ein Faserbündel mit Faser k^n und Strukturgruppe $GL(n, k)$.

KNEBUSCH, m.: Homotopiesatz, Abspaltungssatz, Kürzungssatz

1. Homotopiesatz: Sei η ein Faserbündel über Y; f_o, $f_1 : X \to Y$ homotope Abbildungen. Ist X parakompakt, so sind die induzierten Bündel $f_o{}^*\eta$ und $f_1{}^*\eta$ äquivalent (vgl. z. B. J. Milnor, Microbundles I, Topology 3, Suppl. 1, § 6).

2. In einem numierbaren Vektorraumbündel ξ läßt sich eine positiv definite hermitesche Metrik konstruieren. Daher läßt sich die Strukturgruppe von ξ auf die Gruppe der Isometrien $0(\mathfrak{g}_o)$ der Standardform des zu ξ gehörigen Standard-Vektorraumes reduzieren. Daher zerfällt ferner stets eine kurze exakte Sequenz numierbarer Bündel.

3. Sei ξ ein Faserbündel über dem CW-Komplex B mit Faser F. Ist $\pi_i(F)=0$ für $i < \dim(B\setminus A)$, so läßt sich jeder Schnitt eines Teilkomplexes A in den Totalraum von ξ auf ganz B fortsetzen.

Anwendungen: Ist ξ ein Vektorraumbündel der Dimension k über dem CW-Komplex B (K sei der zugrunde liegende Körper), so läßt sich von ξ ein triviales Geradenbündel θ abspalten, sofern

$$\dim B \leq \begin{cases} k-1 & \text{falls } K = \mathbb{R} \text{ ist} \\ 2k-1 & \text{falls } K = \mathbb{C} \text{ ist} \\ 4k-1 & \text{falls } K \text{ der Quaternionenkörper ist.} \end{cases}$$

Ist $\xi \oplus o = \eta \oplus o$ für zwei Geradenbündel über B, so ist $\xi = \eta$, sofern

$$\dim B < \begin{cases} k-1 \\ 2k-1 \\ 4k-1 \end{cases} \quad \text{ist.}$$

KÖNIG, H.: Der Bottsche Periodizitätssatz (1. Teil)

Es handelt sich um den Beweis von Atiyah-Bott in Acta Math. 112 (1964) für den Fall komplexer Vektorraumbündel. Der Vortrag bringt die in §§ 1, 2 der zitierten Arbeit enthaltenen Vorbereitungen zu dem eigentlichen Beweis; hauptsächlich die beiden folgenden Punkte:

1) Verheften von Vektorraumbündeln. Konstruktion und Eigenschaften des Vektorraumbündels $E_1 \cup_\varphi E_2$ auf $X = X_1 \cup X_2$; dabei sei X parakompakt, $X_1, X_2 \subset X$ abgeschlossen mit $A = X_1 \cap X_2$; E_i seien Vektorraumbündel über X_i; und $E_1 | A \to E_2 | A$ ein Isomorphismus.

2) Korrespondenz zwischen den Vektorraumbündeln über einem parakompakten X und denen über $X \times S^2$.

ARMBRUST, M.: Der Bottsche Periodizitätssatz (2. Teil)

Zum Beweis des Satzes für kompaktes X wird gezeigt, daß

$$\mu : K(X)[t]/(t-1)^2 \to K(X \times S^2),$$

definiert durch $\mu(t) := [H]$ (H = Hopfsches Bündel über $X \times S^2$), ein Ringisomorphismus ist. Dazu wird zunächst $([H]-1)^2 = 0$ gezeigt; sodann wird eine Umkehrung ν konstruiert: Ein Vektorraumbündel E über $X \times S^2$ ist darstellbar als Verheftung über $X \times S^1$ eines geeigneten Bündels E^o über X mittels einer "Verheftungsfunktion" f; f wird nach Fejer gleichmäßig approximiert durch die Cesaro-Mittel f_n der Fourierreihe für f; für hinreichend großes n ist daher f_n Verheftungsfunktion für E^o und homotop zu f, also E isomorph der Verheftung von E^o mittels f_n. Durch Linearisierung des Verheftungspolynoms $p_n := z^n f_n$ nach dem Prinzip der Erniedrigung der Ordnung bei Differentialgleichungen höherer Ordnung erhält man eine lineare

Verheftungsfunktion $L^{2n}(p_n)$ für $(2n+1)E^o$; diese zerfällt über $(2n+1)E^o = V^o_+ \oplus V^o_-$, der Zerlegung zum Projektionsoperator

$$\frac{1}{2\pi i} \; {}_{S^1} (L^{2n}(p_n))^{-1} dL^{2n}(p_n) .$$

Man definiert dann

$$\nu([E]) := [V^o_+](t^{n-1} - t^n) + [E^o]\, t^n .$$

ROQUETTE, P.: Der Funktor K

Definition des Funktors K auf beliebigen topologischen Räumen. Klassifikationssatz für kompakte oder parakompakte, endlich-dimensionale Räume. Halbexaktheit unter denselben Voraussetzungen. Diskussion von K für direkte Produkte $X \times Y$ und Quetsdeprodukte $X \wedge Y$.

KUPISCH, H.: Klassifikationssatz

Konstruktion der Grassmann-Mannigfaltigkeiten $BU(n)$ und der universellen Bündel ξ_n darüber.

<u>Klassifikationssatz:</u> Sei X parakompakt, $L_n(X)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von C-Vektorraumbündeln über X mit konstanter Faserdimension $n (C = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R})$. Sei $[X, BU(n)]$ die Menge aller Homotopieklassen $f : X \to BU(n)$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : [X, BU(n)] &\to L_n(X) \\ [f] &\to f^*\xi_n \end{aligned}$$

ist bijektiv.

JEHNE, W.: Clifford-Moduln

Sei C_k die Clifford-Algebra von $\mathbb{R}^k$ zur negativ definiten quadratischen Form, $K(C_k)$ die Grothendieck-Gruppen der graduierten endl. erz. C_k-Moduln, $K(C_{k+1}) \to K(C_k)$ der durch Modulerweiterung induzierte Homomorphismus. Für die Kokerne A_k kann $A_* = \bigoplus_{k=o}^{\infty} A_k$ zu einem graduierten Ring gemacht werden, dessen Struktur explizit bekannt ist: A_* ist der antikommutative Ring (graduiert), der von den homogenen Elementen

$1 \in A_o, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_8$ mit den Relationen $2\lambda_1 = 0, \lambda_1^3 = 0, \lambda_4^2 = 4\lambda_8, \lambda_1\lambda_4 = 0$ erzeugt wird. Die Eulercharakteristik (Differenzenbündel) ergibt einen Isomorphismus dieses Ringes mit dem K-Ring $\bigoplus_{k=o}^{\infty} KO^{-k}$(Punkt).

DRESS, A.: Operationen für $K(X)$.

Die äußeren Potenzen von Vektorraumbündeln induzieren Abbildungen: $\lambda^i: K(X) \to K(X)$, die leicht als natürliche Transformationen des Funktors K in sich zu erkennen sind. Daraus gewinnt man Operationen $\psi^k: K(X) \to K(X)$, indem man $\psi^k(a) = Q^k(\lambda^1(a), \ldots, \lambda^k(a))$ setzt mit $Q^k(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)) = x_1^k + \ldots + x_n^k$ (σ_i: i-te symmetrische Funktion in $x_1, \ldots, x_n$).

Es gilt:

1) ψ^k ist ein Ringhomomorphismus von $K(X)$ in sich

2) $\psi^k(\psi^l(a)) = \psi^{kl}(a)$,

3) ist ξ 1-dim über X, si ist $\psi^k([\xi]) = [\xi]^k$

4) ist $I: \tilde{K}(x) \to \tilde{K}(S^2 \wedge X)$ der Bottsche Isomorphismus, so gilt

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(x) & \xrightarrow{I} & \tilde{K}(S^2 \wedge X) \\ \psi^k \downarrow & & \downarrow \psi^k \\ \tilde{K}(x) & \xrightarrow[kI]{} & \tilde{K}(S^2 \wedge X) \end{array}$$ ist kommutativ .

5) $a \in \tilde{K}(S^{2q}) \Rightarrow \psi^k(a) = k^q a$.

PUPPE, D.: Nichtexistenz von Divisionsalgebren über R

Satz: Gibt es eine stetige 'Multiplikation' $\rho: (\mathbb{R}^n - 0) \times (\mathbb{R}^n - 0) \to \mathbb{R}^n - 0$ mit einem (zweiseitigen) Einselement, so ist $n = 1, 2, 4$ oder 8.

Beweis: (Atiyah): Liefert $f: S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ vom Typ $(1,1)$ - und mit der Hopfschen Konstruktion $g: S^{2n-1} \to S^n$. Sei $X = S^n \cup_g e^{2n}$. Für gerades $n = 2q$ ist $K_{\mathbb{C}}X = \mathbb{Z}[a]/(a^3)$. (Das kann ohne Verwendung der gewöhnlichen Cohomologie bewiesen werden.) Aus dem Vergleich von $\psi^3\psi^2 a$ mit $\psi^2\psi^3 a$ und den Regeln (1), (2), (5) aus dem Vortrag von Herrn Dress schließt man $3^q \equiv 1 \mod 2^q$. Daraus folgt rein zahlentheoretisch $q = 1, 2$ oder 4. Daß n nicht ungerade und > 1 sein kann, ergibt sich aus $H^*(X;Z) \cong Z[t]/(t^3)$.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

HOECHSMANN, Klaus: Chern'sche Klassen

Die natürlichen Abbildungen $c : L \to H^*(\ , Z)$ und $ch : L \to \bar{H}(\ , Q)$ werden durch Festsetzung auf den klassifizierenden Räumen B_k definiert. Dabei wird ein Satz von Borel (Ann. Math. 53) benutzt. Eigenschaften: $c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F)$; ch ist ein Ringhomomorphismus. Verträglichkeit von ch mit dem Vott'schen Isomorphismus und das Verhalten bei Zwischenschaltung von ψ^k folgen ohne weiteres. Aus Bott folgt: ch(E) für ein Vektorbündel über S^{2n} hat ganze Koeffizienten. Berechnung von ch(E) zeigt, daß $ch(E) \equiv \dfrac{nc_n(E)}{n!} \pmod{Z}$.

NASTOLD, H.-J.: Die Spektralsequenz der K-Theorie

Sei $\tilde{K} = \{\tilde{K}^p\}_{p \in Z}$ eine verallgemeinerte reduzierte Cohomologietheorie, d.h. eine Folge von halbexakten Funktoren $\tilde{K}^p$ von der Kategorie der punktierten Räume, die vom Homotopietyp eines endlichen CW-Komplexes sind, in die Kategorie der abelschen Gruppen (halbexakt: für $X \xrightarrow{f} Y \to Cf$ ist $\tilde{K}^p(X) \leftarrow \tilde{K}^p(Y) \leftarrow \tilde{K}^p(Cf)$ exakt) mit natürlichen Isomorphismen $\tilde{K}^p\Sigma \xrightarrow{\sim} \tilde{K}^{p-1}$. Dann hat man eine stark konvergente spektrale Folge mit $E_2^{p,q} = \tilde{H}^p(X, \tilde{K}^q(S^o))$, wo $\tilde{H}^p$ die gewöhnliche reduzierte Cohomologie bedeutet ($\tilde{H}^p(X) = \tilde{H}^p(X,*)$), gegen $\tilde{K}^n$ mit $E_\infty^{p,n-p}(X) = F^p\tilde{K}^n(X)/F^{p+1}\tilde{K}^n(X)$, $F^p\tilde{K}^n(X) = \operatorname{Ker}(\tilde{K}^n(x) \to \tilde{K}^n(X^{p-1}))$, X^{p-1} das p-1-Gerüst des CW-Komplexes X. Anwendung auf die K-Theorie und die natürliche Transformation ch (Chern-charakter) der K-Cohomologietheorie $\tilde{K}$ in die gewöhnliche Cohomologie $\tilde{H}$.

HARDER, G.: Vektorfelder auf Sphären

Es wurde ein Beweis des folgenden Satzes Skizziert: Sei S^{n-1} die n-1 dimensionale Sphäre. Sei $n = 2^b(2n+1)$. Wir setzen $b = c+b+d$ mit $0 \leq c < 4$ und $\rho^{(n)} = 2^c + 8d$. Dann besitzt die S^{n-1} $\rho^{(n)}-1$ linear unabhängiger Vektorfelder aber nicht $\rho^{(n)}$ linear unabhängige Vektorfelder. Der Satz wurde auf den Satz von Adams zurückgeführt, daß $P_{m+\rho(m)}/P_{m-1}$ nicht koreduzibel ist (Vortrag von Zieschang).

ZIESCHANG, H.: Vektorfelder aus Sphären II

Es wurde $\tilde{K}_c(RP^n/RP^m)$ einschließlich ψ-Operationen berechnet (nach J.F. Adams, Ann. of Math. 75) und $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(RP^n/RP^m)$ angegeben. Danach wurde ge-

zeigt: Es gibt keine Abbildung $f: RP^{m+\rho(m)}/RP^{m-1} \to S^m$ so daß die Komposition iof von f mit der natürlichen Einbettung $S^m = RP^m/RP^{n-1} \xrightarrow{i} RP^{m+\rho(m)}/RP^{m-1}$ den Grad 1 hat.