23

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Zur Didaktik des mathematischen Gymnasialunterrichts

vom 25. bis 30. Oktober 1965

Fragen zur Analysis im Gymnasialunterricht waren Gegenstand einer Tagung, die im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach unter Leitung der Herrn Professoren M. Barner (Freiburg) und K. Fladt (Calw/Freiburg) vom 25. bis 30. Oktober 1965 stattfand. Die Teilnehmer waren Gymnasiallehrer, Vertreter der Schulbehörden und Hochschullehrer der deutschsprachigen Länder.

Im Laufe der Vorträge stellte es sich heraus, daß das Hauptanliegen eine saubere, dem Schüler gerecht werdende, Begriffsbildung ist. Darüber waren sich die Tagungsteilnehmer einig, dagegen gab es erregte Diskussionen über die Frage, wie einzelne Begriffe eingeführt werden sollten.

An der Tagung nahmen folgende Herren teil:

Arzt, Gymn.Prof. K., Tübingen
Augustin, Dr. G., Freiburg
Barner, Prof. Dr. M., Freiburg
Beisswanger, Dr. P., Tübingen
Botsch, OST.Dir. O., Heidelberg
Denk, St.Prof. F., Fürth
Dzewas, Dr. J., Ahrensburg
Eggs, A.d.L., H., Freiburg-Merzhausen
Engel, STR, A., Stuttgart-Rohr
Faber, Dr.Doz., Mainz-Bretzenheim
Fladt, Prof. Dr. K., Calw
Flohr, Akad.R., Dr., F., Freiburg
Gall, OschR. H., Düsseldorf
Götz, Gymn-Prof. W., Stuttgart-Bad Cannstatt

Härtig, Prof. Dr. K., Berlin-Karlshorst

Hürten, OSTR. K.-H., Köln-Hohenhaus

Jeger, Dr. M., Luzern

Keil, OSTR. Dr. K.-A., Augsburg

Kirsch, STR. Dr. A., Giessen

Knabe, OschR. P., Duisburg

Kraft, OStD. A., Bad-Hersfeld

Laub, Gym-Dir. Dr. J., Wien

Lindner, STR. H., Hamburg

Maass, Akad. R.D., Karlsruhe

Ostermann, OSTR. Dr. F., Köln

Prade, STA. Dr. H., Freiburg

Raith, Gymn-Prof. F., Freiburg

Röhrl, STA. E., Stuttgart

Rüegg, Dr. A., St. Gallen

Seebach, Prof. Dr. K., München

Stender, Pater, STR. A., Jülich

Stephan, Gymn-Prof. H., Karlsruhe

Thöni, Dr. W., Gockhausen/Schweiz

Wäsche, STR. H., Lübeck

Wigand, OSTR. K., Krefeld

Vortragende

1. Botsch, O.
2. Denk, F.
3. Dzewas, J.
4. Engel, A.
5. Götz, W.
6. Härtig, K.
7. Hürten, K.-H.
8. Jeger, M.
9. Kirsch, A.
10. Lindner, H.
11. Ostermann, F.
12. Seebach, K.

V o r t r a g s a u s z ü g e

BOTSCH, O.: Behandlung von Matrizen und Vektoren in der Unterstufe

An verschiedenartigen Aufgaben wird gezeigt, daß schon ab Sexta Aufgaben aus

dem Erfahrungsbereich der Schüler anfallen, bei denen sich die Matrizenmultiplikation auf natürliche Weise ergibt. Bereits in der Sexta können Zahlen-Quadrate mit vorgegebenen Eigenschaften konstruiert werden. Im besonderen Falle liefert eine gezeigte Papierschablone in acht Stellungen "Basisvektoren", aus denen das Dürersche magische Quadrat als $\Sigma \alpha_i \cdot a_i$ dargestellt werden kann. Mit diesen beiden Beispielen will der Vortragende einen Beitrag geben zu der Forderung, daß viele und vielerlei anschauliche Modelle so früh wie möglich den Schülern vorgeführt werden müssen.

LENK, F.: Die Notwendigkeit der Früherziehung zum mathematischen Denken

Das Kind bringt bereits beim Eintritt in die Grundschule abstrakte mathematische Begriffe mit, wie zum Beispiel "größer als" oder "gegenüber". Hierauf kann der Unterricht aufbauen. Langsam muß dann der Schüler an das Abstrahieren und dann an das Arbeiten mit Abstraktionen herangeführt werden. Dabei darf nicht zu früh Axionatik betrieben werden, die aber als echter Bestandteil mathematischer Bildung auch jedem künftigen Nichtmathematiker bekannt gemacht werden sollte.

Um die Fragen der Früherziehung zum mathematischen Denken haben sich besonders folgende Autoren bemüht: Z.P. DIENES, H. BRINKMANN, M. MARGOT, G. PAPY und A. REVUZ.

DZEWAS, J.: Zur Frage einer "strengen" Begründung der Analysis im Schulunterricht und zur Einführung der reellen Zahlen

Ausgangspunkt ist die Menge der nicht negativen rationalen Zahlen Q_+. Eine Teilmenge α von Q_+ wird eine nicht negative reelle Zahl genannt, wenn sie folgende Forderungen erfüllt:

1) $x \in \alpha, \quad y \in Q_+$ und $y \geq x \Rightarrow y \in \alpha$.

2) α hat kein kleinstes Element.

Die Menge der nicht negativen reellen Zahlen sei R_+. Man ordnet jeder nicht negativen rationalen Zahl a die nicht negative reelle Zahl

$$\bar{a} = \{ x \mid x > a \text{ und } a \in Q_+ \}_{Q_+}$$

zu. Auf der durch diese Zuordnung erhaltenen Teilmenge von R_+ wird eine Addition und Miltiplikation mengentheoretisch definiert, die isomorph zu der

bereits bekannten Addition und Multiplikation auf C_+ sind. Diese Verknüpfungsvorschriften werden dann als Definitionen einer Addition und Multiplikation auf der Menge R_+ genommen. Entsprechend wird eine "kleiner gleich" Relation eingeführt. Die Menge R_+ ist vollständig.

ENGEL, A.: Anwendungen der Analysis (Konstruktionen mathematischer Modelle der Wirklichkeit)

A. Engel zeigt, wie die Beziehung zwischen Mathematik und Wirklichkeit von dem Schüler erfahren werden kann. Ausgehend von dem Modell für unabhängiges Wachstum kommt man zur Funktionalgleichung der Exponentialfunktionen; ähnlich gelangt man durch Betrachtung des Raketenantriebes zur Funktionalgleichung für die Funktion des natürlichen Logarithmus. Darauf wird der einfachste Markow-Prozeß ohne Gedächtnis untersucht und die Exponentialverteilung hergeleitet. Die Untersuchung des Wachstums bei beschränktem "Lebensraum" führt auf die logistische oder autokatalytische Kurve von Verhulst und Pearl-Reed. Das gleiche Modell trifft auch auf einfache Epidemien, auf die Autokatalyse in der Chemie sowie auf die Ausbreitung von Gerüchen zu. Zum Schluß zeigt der Vortragende ausführlicher ein komplizierteres Modell für die Ausbreitung eines Gerüchtes und ein Beispiel aus der mathematischen Theorie des "Kampfes ums Dasein".

GÖTZ, W.: "Rollenwechsel" der Variablen

Der Vortragende demonstriert den "Rollenwechsel" der Variablen an dem Beispiel des Kugelstoßes aus der Schulterhöhe. Je nach Fragestellung kann eine Variable Gleichungsvariable, Funktionsvariable oder Formvariable sein. Durch den häufigen "Rollenwechsel" der Variablen soll der Schüler diese Begriffe besser verstehen und dadurch leichter mit ihnen arbeiten können.

HÄRTIG, K.: Die Bedeutung der mathematischen Logik bei der Neugestaltung des Mathematikunterrichts

Im ersten Teil des Vortrags wurden solche Begriffsbildungen und Ergebnisse der mathematischen Grundlagenforschung zusammengestellt und kommentiert, die auch für die Neugestaltung des Mathematikunterrichts nutzbar gemacht werden sollten. Gerade in der Mathematiklehrerausbildung sollte das Studium grundlegender metamathematischer (syntaktischer und vor allem semantischer) [illegible] und Aufgaben [illegible] Definition [illegible] Genommen [illegible] Die Menge [illegible] ist vollständig.

[illegible]: Anwendungen der [illegible] (Konstruktion [illegible] mathematischer Modelle der Wirklichkeit)

[illegible] Wirklichkeit von [illegible] unabhängi- [illegible] zur Funktionsgleichung der Exponentialfunktionen; [illegible] man durch Betrachtung [illegible] Funktional- gleichung für die Funktion [illegible] natürlichen Logarithmus. [illegible] wird der ein- [illegible] Gedächtnis untersucht [illegible] Exponentialver- [illegible]. Die Untersuchung des V[illegible] beschränktem "Le- [illegible] Verhalt [illegible]. Das gleiche Modell trifft auch [illegible] auf [illegible] von Gerüchten u. [illegible] ausführlicher [illegible] Modell [illegible] eines Gerüchtes und [illegible] des Konzeptes [illegible].

[illegible]: "Rollenwechsel" der Variablen

Der Vortragende demonstriert den "Rollenwechsel" der Variablen an dem Beispiel [illegible] aus der Schulstoffe. [illegible] Funktionsvariable oder Formvariable [illegible]. [illegible] den häufigen "Rollenwechsel" der Variablen soll der Schüler diese [illegible] besser verstehen und dadurch leichter mit ihnen arbeiten können.

[illegible], K.: Die Bedeutung der mathematischen Logik bei der Neugestaltung des Mathematikunterrichts

[illegible] Vortrags wurden solche Begriffsbildungen und Ergebnisse der mathematischen Grundlagenforschung zusammengestellt und kommentiert, [illegible] die Neugestaltung des Mathematikunterrichts nutzbar gemacht werden sollten. Gerade in der Mathematiklehrerausbildung sollte das Studium [illegible] mathematischer (syntaktischer und vor allem semantischer)

Begriffe und Sätze (z.B. des Satzes von Löwenheim/Skolem und des Gödelschen Vollständigkeitssatzes) einen festen Platz haben. Diesen Minimalanforderungen an die Lehrer stellte der Vortragende einige Hauptziele der logischen Schulung der Schüler gegenüber und erläuterte sie an zahlreichen Beispielen (insbesondere am Beispiel des Arbeitens mit Variablen).

Der zweite Teil des Vortrags zeigte einige der Leitlinien (Pläne, Bücher), an denen sich die Neugestaltung des Mathematikunterrichts in Mitteldeutschland orientiert:

Die Logik darf nicht als eigenes Stoffgebiet in den Unterricht aufgenommen werden, sondern als durchgängiges Prinzip. Das Herausarbeiten klarer inhaltlicher Vorstellungen ist wichtiger als Kalkül und Algorithmus, dabei soll die Sprache vielfältig und lebendig eingesetzt werden.

HÜRTEN, K.H.: Wie soll man über Funktionen reden

Der Vortragende warnt in seinem Vortrag vor der Sprachverwirrung im Mathematikunterricht.

Da der Funktionenbegriff heute als Zuordnungsvorschrift und als Paarmenge mit gewissen Eigenschaften eingeführt wird, muß der Lehrer sich davor hüten, daß er nicht beide Möglichkeiten vermischt. Bei den verwendeten Zeichen und verkürzten Sprechweisen soll er darauf achten, daß der Schüler ihre ganze Bedeutung klar kennen lernt. So erst kann er sie auch richtig gebrauchen. Man denke etwa an f und f(x). Wird ein Begriff an einem Beispiel erklärt, dann darf sich keine für den Begriff nicht charakteristische Eigenschaft des Beispieles zu den definierenden Eigenschaften des Begriffes einschleichen.

JEGER, M.: Spiegelungsgeometrie im dreidimensionalen Raum

M. Jeger gibt in seinem Vortrag einen Bericht über einen Teil der Neugestaltung des Methematikunterrichts für die deutschsprachige Schweiz. Es wird eine Synthese zwischen Stereometrie und Darstellender Geometrie angestrebt. Dabei soll die Darstellende Geometrie stärker in den Dienst der Mathematik treten und die Stereometrie möge primär zur Vermittlung eines richtigen Raumerlebnisses dienen. Dieses Vorhaben wurde genauer illustriert am Beispiel der Erzeugung der Kongruenzgruppe im Raum aus Spiegelungen.

So kommen zugleich modernere Gesichtspunkte in den Unterricht der Darstellenden Geometrie.

KIRSCH, A.: Einheitliche Fassung der Grenzwert- und Stetigkeitsdefinitionen

Betrachtet werden Funktionen mit Definitions- und Wertebereich in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Vorangestellt wird die Grenzwertdefinition.

1) Eine Funktion f von D nach W besitzt in dem Punkt $a \in D$ den Grenzwert g, wenn gilt: Zu jeder Umgebung U von g gibt es eine punktierte Umgebung V von a mit $f(V) \subset U$.
Damit läßt sich die Stetigkeit wie folgt leicht definieren:

2) Eine Funktion f von D nach W heißt in einem Punkt $a \in D$ stetig, wenn sie in diesem Punkt einen Grenzwert besitzt und dieser gleich dem Funktionswert $f(a)$ ist.

Die einheitliche Fassung wird gewonnen durch Arbeiten mit dem Umgebungsbegriff. Zunächst sei eine Umgebung von x ein x enthaltendes offenes Parallelotop. Läßt man die Forderung "offen" fallen, dann kann man z.B. zu den rechts- beziehungsweise linksseitigen Grenzwertdefinitionen kommen.

Besonders für Grenzwertbetrachtungen mit $D \subset \mathbb{R}$ ist es günstig, wenn man $\mathbb{R}$ durch Hinzunahme von ∞ und $-\infty$ erweitert. Dabei muß nur für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten $-\infty < x < \infty$. Durch eine naheliegende Umgebungsdefinition kann man dann auch den Grenzwert "für x gegen unendlich" mit 1) erfassen.

Schließlich steckt in 1) auch noch die Konvergenz von Folgen. Man braucht nur $f(V \cap \mathbb{N})$ statt $f(V)$ zu setzen.

LINDNER, H.: Die Verwendung von Variablen und die Variablemumbenennung in der Analysis

H. Lindner weist in seinem Vortrag auf einige Begriffe und Zusammenhänge hin, die im Unterricht sorgfältig dargelegt werden müssen, damit keine unnötigen Verständnisschwierigkeiten entstehen. Der Schüler muß erkennen, daß Platzhalter Leerstellen kennzeichnen und daß zu jedem Platzhalter die Angabe der Grundmenge gehört. Platzhalter geben die Möglichkeit zum Einsetzen eines Elementes der Grundmenge in die Leerstelle. Es sollte dem Schüler - zumindest aus dem Kontext - klar sein, ob ein Platzhalter eine

Variable oder eine Konstante bezeichnet. Variablenumbenennungen müssen als solche kenntlich gemacht werden, etwa durch Verwenden des ALGOL-Symboles.

OSTERMANN, F.: Baryzentrischer Kalkül als Grundlage des affinen Raumes

Der Vortragende entwickelt einen baryzentrischen Kalkül als Grundlage des affinen Raumes nach einem Unterrichtsversuch in einer Obertertia.

Auf dem cartesischen Produkt einer Menge A sei eine Parallelgleichheit definiert, für die die Parallelogrammaxiome gelten. Weiter werde auf $A \times A$ eine skalare Multiplikation mit natürlichen Zahlen nach A definiert, für die ein Teilbarkeitsaxiom gelte. Hierauf kann man eine Translation, Punktspiegelung und Streckung einführen. Ein hübsches Modell zu solch einer Geometrie ist ein Torus, der zwei Scharen paralleler Kreise trägt.

Durch Auszeichnen eines Punktes $0 \in A$ als Zentrum läßt sich eine Addition und eine Multiplikation auf A so definieren, daß $(A, \odot, \oplus, o)$ einen Vektorraum über dem Körper der rationalen Zahlen Q darstellt. Für baryzentrische Kombinationen $a_o + \ldots + a_n = 1$ ist dann $a_o oP_o \oplus \ldots \oplus a_n oP_n$ von 0 unabhängig. Schließlich kann man Eigenschaften der baryzentrischen Kombinationen herausstellen, die es gestatten, den affinen Raum auf der axionatischen Grundlage des baryzentrischen Kalküls zu beschreiben.

SEEBACH, K.: Behandlung des Integrals im Unterricht der Gymnasien

K. Seebach geht bei der Behandlung des Integrals im Unterricht der Gymnasien von dem Inhaltsproblem aus. Für die Schule läßt sich dann das bestimmte Integral für monotone, nicht notwendig stetige Funktionen "genügend richtig" einführen. Auf Intervalleinteilungen T werden die Ober- und Untersummen (S_T und s_T) betrachtet und deren Verhalten bei zulässigen Teilungsfolgen untersucht. Dabei ist eine Teilungsfolge $\{T_m\}_{m \in N}$ eine zulässige Teilungsfolge, wenn sie der Forderung genügt

$$\lim_{m \to \infty} (\operatorname{Max}_{T_m} (x_n - x_{n-1})) = 0 .$$

Gilt dann unabhängig von der Wahl der Teilungsfolge

$$\lim_{m \to \infty} s_{T_m} = \lim_{m \to \infty} S_{T_m} ,$$

dann nennt man diesen Grenzwert das bestimmte Integral.

Diese konstruktive Fixierung des Grenzwertes mit Hilfe von Teilungsfolgen ist für die Schule einsichtiger als die mathematisch einfachere, aber anspruchsvollere Methode des oberen bzw. des unteren DARBOUX-Integrals. Nach Herleitung der üblichen Rechenregeln soll mit Hilfe des nun analytisch definierten Integrals das Inhaltsproblem neu angegriffen werden. In diesem Punkt bestehen aber noch erhebliche didaktische Schwierigkeiten.