Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Funktionalanalytische Methoden in der numerischen Mathematik

vom 16. - 21. November 1965

Leitung: Prof. Dr.Dr. h.c. L. Collatz, Hamburg, Prof.Dr.H. Unger, Bonn

Da das Thema der Tagung allgemein formuliert war, wurden Vorträge über verschiedenartige Teilgebiete der numerischen Mathematik gehalten, ausgenommen die Bereiche Rechenmaschinen und Programmieren. Die meisten Vortragenden berichteten über neue oder modifizierte Verfahren und über deren Erprobung an Beispielen, u.a. über kontinuierliche und diskrete Verfahren für Anfangs- und Randwertprobleme, Eigenwertaufgaben, numerische Integration und Differentiation, über Methoden zur Bestimmung des Fourierspektrums und der Approximation. Es seien ferner einige Vorträge hervorgehoben, in denen, wie es scheint, grundlegende Sätze aus einigen Gebieten (z.B. Eigenwertaufgaben, Iterationsverfahren) gebracht wurden, die bekannte Resultate in neuem Zusammenhang erscheinem lassen und Anregungen zur Entwicklung neuer Verfahren geben. Dabei wurden neben der Funktionalanalysis auch andere Gebiete der Mathematik herangezogen.

Insbesondere am Beispiel von Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen wurde der folgende Problemkreis diskutiert: Die vorliegenden Aufgaben können prinzipiell durch Diskretisierungsverfahren näherungsweise gelöst werden. Oft haben jedoch speziell vorgelegte Aufgaben ihre eigenen Schwierigkeiten, die eine allzu schematische Behandlung ausschließen. Die jeweils notwendigen Vorarbeiten, z.B. Wegschaffen von Singularitäten der Lösung durch Transformationen, Auswahl von Ansatzfunktionen und Fehlerorthogonalitäts-Prinzipien sollten für größere Klassen von Aufgaben schematisiert und, soweit möglich, in die Programme für Rechenanlagen eingebaut werden.

Besondere Schwierigkeiten bereitet der Rückschluß von diskreten auf kontinuierliche Probleme. Theoretisch kann dieser Schritt durch Interpolation und verwandte Methoden bewerkstelligt werden. Die abschließende

Mathematisches Institut

Oberw...

Tagungsbericht

für ...lytische ... numerische ...

...mber 1...

...latz, Hambo... ... W. U... ...mer

Da das ... interessiert war, ... die ... erste d. numerische Methoden ... gezogen ... Arbeiten über ... fizierte Ver... an Beispielen, u. ... ntur ... die ... für Anfangs- und Randwert..., Eigenwertaufgaben, numerische ...ration und Differentiation, Methoden zur ...stimmung des Fourierspe... und der Approximation. ... ferner einige Vorträge hervorgehoben, in denen, wie ... scheint, ... liegend Sätze aus einigen Gebieten (z. B. Eigenwertaufgaben, Iterationsverfahren) gebracht wurden, die bekannt ... Zusammenhang ... obachtem ... und Anregungen ... Dabei wurde neben der Funktio... theoretische herangezogen.

... Beispiel von Randwertaufgaben ... Differential- ... Problemkreis ... Di... vorliegende ... durch Diskretisierung ... verfahren ... jedoch speziell vorliegt ... allzu ... Vorarbeiten, z. B. Wegconstanten von ... Transformationen, ... von Ansatz- ... Stütz-Prinzipien ... Klassen ... und, soweit ... Programm für ... worden.

... Rückschluß ... auf kontinuierliche Probleme ... Schritt ... Interpolation und verwendet. ... werden, ... schließende.

Behandlung des kontinuierlichen Problems erfordert aber in der Praxis oft einen beträchtlichen Aufwand. Ein weiteres wichtiges Problem ist der Einfluß der Rundungsfehler und im Zusammenhang damit die Beurteilung der Güte von Näherungen, die auf Rechenanlagen ermittelt worden sind.

Mehrfach wurde betont, daß es notwendig sei, die Methoden immer wieder an den von der Praxis gestellten Aufgaben zu prüfen.

Teilnehmer:

Albrecht, J., Hamburg
Bachmann, K.-H., Berlin
Berg, L., Halle-Rostock
Bertram, G., Hannover
Bittner, L., Dresden
Brakhage, H., Karlsruhe
Bredendiek, E., Hamburg
Bulirsch, R., München
Collatz, L., Hamburg
Dejon, B., Zürich
Ebert, R., Köln
Ehrmann, H., Clausthal
Elsner, L., Hamburg
Filippi, S., Aachen
Forster, P, Hannover
Hacke, J., Wien
Hadeler, K.P., Hamburg
Henze, D., Bonn
Hilgers, H., Bonn
Knapp, H., Innsbruck
Krabs, W., Hamburg
Krawczyck, R., Karlsruhe
Meinardus, G., Clausthal
Nickel, K., Karlsruhe
Niethammer, W., Nagold
Rajeswari, G., Hamburg
Raupach, E., Bonn
Reinermann, J., Bonn
Runck, P.O., Würzburg
Schneider, A., Köln
Schönhage, A., Köln
Schröder, J., Köln
Schwedt, D., Köln
Sprenger, H., Hamburg
Stöhr, A., Berlin
Stetter, H.J., Wien
Troch, J., Wien
Unger, H., Bonn
Weinitschke, H., Hamburg
Wendland, W., Berlin
Werner, H., Münster

Vortragsauszüge:

ALBRECHT, J.: Zur Fehlerabschätzung beim Iterationsverfahren für Anfangswertaufgaben

Bei Anfangswertaufgaben

$$v'(x) = f(x, v(x)), \quad v(x_o) = v_o \qquad \text{in} \quad x_o \le x < ?$$

bzw.

$$v(x) = v_o + \int_{x_o}^{x} f(\xi, v(\xi))\, dx \qquad \text{in} \quad x_o \le x < ?,$$

kurz

$$v = Tv,$$

gilt nach dem Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen für das Iterationsverfahren

$$v_{k+1} = Tv_k \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

unter der Voraussetzung $L < 1$ die Fehlerabschätzung

$$\| v - v_{k+1} \| \le \frac{L}{1-L} \| v_{k+1} - v_k \| \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Dem Charakter einer Anfangswertaufgabe ist es angemessen, die Norm

$$\| v \| = \max_{x_o \le x \le x_1} \frac{|v(x)|}{\alpha(x)} \qquad \text{mit} \quad \alpha(x) > 0$$

nicht für ein festes Intervall, sondern als Funktion der rechten Intervallgrenze zu definieren:

$$\| v \|_{(x)} = \max_{x_o \le \xi \le x} \frac{|v(\xi)|}{\alpha(\xi)} \qquad \text{mit} \quad \alpha(\xi) > 0;$$

entsprechend ist die Lipschitzkonstante $L(x)$ als Funktion der rechten Intervallgrenze einzuführen. (Lit.: J. Albrecht, Zur Wahl der Norm beim Iterationsverfahren für Anfangswertaufgaben, ZAMM 46 (1966)).

ALBRECHT, J.: Der optimale Relaxationsfaktor bei den Gleichungen des Mehrstellenverfahrens für die 1. Randwertaufgabe mit der Differentialgleichung $\Delta u = r(x, y)$ bei quadratischem Grundbereich

Das verallgemeinerte Einzelschrittverfahren

$$v_{k+1} = v_k + \omega \{ T_L v_{k+1} + T_R v_k + r - v_k \} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$v = Tv + r$$

konvergiert bekanntlich unter den Voraussetzungen

1) $T = T'$

2) $\rho(T) < 1$

3) $0 < \omega < 2$.

Durch geeignete Wahl der Reihenfolge, in der die finiten Gleichungen des Mehrstellenverfahrens für $\Delta u = r(x, y)$ durchlaufen werden, gelingt es, den optimalen Relaxationsfaktor ω_{opt}, der durch

$$\rho(L(\omega_{opt})) = \min_{0<\omega<2} \rho(L(\omega))$$

mit $$L(\omega) = (E-\omega T_L)^{-1}((1-\omega)E+\omega T_R)$$

definiert wird, zu bestimmen.

BACHMANN, K.H.: Fehlerschranken für numerische Lösungen von Anfangswertproblemen

Ein Einschließungssatz von J. Schröder (Arch. rat. Mech. Anal. 4 (1959/60), 177-192) wird auf Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen $u' = f(u)$ angewandt. Als Iterationsverfahren dient das Picard-Lindelöffsche Verfahren. Mittels der Vorzeichen der ersten partiellen Ableitungen der Funktion f wird eine Funktion $H(x, y)$ konstruiert, die aus Schranken x und y für die gesuchte Lösung neue Schranken $H(x, y)$ und $H(y, x)$ erzeugt. Die Berechnung von $H(x, y)$ mittels numerischer Quadratur wird an Schranken x und y für eine durch das Eulersche Verfahren gewonnene Näherung ausgeführt. Das entstehende numerische Verfahren ist dem verbesserten Eulerschen Verfahren ähnlich und liefert Einschließungen mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung.

BULIRSCH, R. und J. STOER: Asymptotische Fehlerschranken bei Extrapolationsverfahren

Ein Diskretisierungsverfahren zur Schrittweite h liefere als Approximation für den gesuchten exakten Wert $T(0)$ die Näherung $T(h)$. Für $T(h)$ existiere eine Entwicklung

$$T(h) = T(0) + \tau_1 h^2 + \ldots + \tau_k h^{2k} + \tau_{k+1}(h)\, h^{2k+2} .$$

Berechnet man $T(h)$ für $h_i > h_{i+1} > \ldots > h_{i+k} > \ldots$ und extrapoliert im Sinne von Richardson, so erhält man als Fehler für den extrapolierten Wert T_k^i

$$T_k^i - T(0) = h_i^2 \ldots h_{i+k}^2 \;\sigma(h_i, \ldots, h_{i+k}), \quad \sigma(\ldots) \text{ beschränkt.}$$

Definiert man U_k^i durch $U_k^i := 2T_k^{i+1} - T_k^i$, so gilt für den Fehler

$$U_k^{i} - T(0) = -h_i^2 \cdots h_{i+k}^2 \{\sigma(h_i, \ldots, h_{i+k}) - 2\,\frac{h_{i+k+1}^2}{h_i^2}\,\sigma(h_{i+1}, \ldots, h_{i+k+1})\}.$$

Da $\frac{h_{i+k+1}^2}{h_i^2} \ll 1$ und für $h_i \leq h_{i_o}$ $\sigma(h_i, \ldots, .) \approx \sigma(h_{i+1}, \ldots)$ ist, ergibt sich Einschließung von $T(0)$ durch T_k^i und U_k^i. Bei festem k und $i = i_0, i_o+1, \ldots$ steigt $\min\{T_k^i, U_k^i\}$ monoton und fällt $\max\{T_k^i, U_k^i\}$ monoton (praktische Kontrolle der Einschließung). Anwendung auf num. Quadratur, Eigenwertprobleme, Anfangswertaufgabe für Systeme von Differentialgleichungen u. a. . (nach Modifikation).

COLLATZ, L.: Monotonie bei gewöhnlichen Diffgln. 4. Ordnung

Gegebene Differentialgleichung (Gleichung für Biegung eines Trägers im einfachsten Fall)

$L\varphi = r(x)$ mit $L\varphi \equiv (\alpha\varphi'')''$ im Intervall $J = \langle o, 1\rangle$ der reellen x-Achse, $\alpha(x)$ und $r(x)$ in J gegebene stetige Funktionen, überdies $\alpha > 0$ in J, $\alpha \in C^2\langle J\rangle$.

$U\varphi$ sei einer der folgenden 5 Randvektoren (Indices o, 1 bezeichnen die Stellen $x = 0$, bzw. $x = 1$):

$$\{\varphi_o, \varphi_o', \varphi_1, -\varphi_1'\}, \quad \{\varphi_o, -\varphi_o'', \varphi_1, -\varphi_1'\},$$

$$\{\quad '' \quad \varphi_1, -\varphi_1''\}, \quad \{\quad '' \quad \varphi_1, -\varphi_1''\},$$

$$\{\quad '' \quad \varphi_1'', -(\alpha\varphi_1'')'\}.$$

(Diese Randausdrücke entsprechen bekannten Lagerungsfällen eines Trägers).

Dann gilt der elementar beweisbare M o n o t o n i e s a t z:

Für jede Funktion $\varepsilon(x) \in C^4\langle J\rangle$ mit $L\varepsilon \geq 0$ in J, $U\varepsilon \geq 0$ gilt $\varepsilon \geq 0$ in J.

DEJON, B.: Vergleich verschiedener Normen bei Mehrschrittdifferenzenverfahren

Die (starke) Stabilität und die Konsistenz eines Differenzenverfahrens hängen von den verwendeten Normen ab. DAHLQUIST hat für bestimmte

Normen algebraische Stabilitätskriterien hergeleitet. Verschiedene andere Normen sollen daraufhin diskutiert werden, ob sie es gestatten, die von DAHLQUIST benützten Methoden und eine Verallgemeinerung davon zu übertragen. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß man sich bei dem Differenzenverfahren für die stetige Abhängigkeit der Lösung einschließlich gewisser Differenzenquotienten von der rechten Seite und den Anfangswerten interessiert.

ELSNER, L.: Einschließungssätze für Eigenwerte nichtnormaler Matrizen

Sowohl der Satz von Krylow-Bogoljubow wie der Quotientensatz erlauben bei normalen Matrizen die Einschließung eines Eigenwertes, wenn ein Vektor und sein Bild bekannt sind. Beide Sätze können leicht aus einer Ungleichung hergeleitet werden. Mit Hilfe der von Henrici definierten "Abweichung von der Normalität" gelingt es nun, aus derselben Ungleichung auch Einschließungen für die Eigenwerte nichtnormaler Matrizen zu gewinnen. Für den Einschließungsradius sind leicht obere Schranken angebbar. Mit ähnlichen Mitteln können Abschätzungen hergeleitet werden, die die Ordnung des Fehlers besser wiedergeben und die sich auch auf die Abschätzung der Spektralvariation übertragen lassen.

FORSTER, P.: Ein Existenzsatz und Fehlerabschätzungen für gewisse lineare und nichtlineare Randwertaufgaben

1) Für das lin. Randwertproblem $L[y] = \sum_{\mu=0}^{m} (p_\mu(x)\, y^{(\mu)})^{(\mu)} = r(x)$

$$y^{(\mu)}(0) = c_\mu \,, \quad y^{(\mu)}(1) = c'_\mu \qquad (\mu = 0, \ldots, m-1) \quad p_m(x) \geq p > 0$$

werden unter geeigneten Voraussetzungen über die $p_\mu(x)$ und $r(x)$ mit Hilfe der Greenschen Funktion eines Nachbarproblems von x unabhängige und abhängige Fehlerabschätzungen für Näherungslösungen angegeben. Eine Abschätzung von G. Bertram (Num. Math. 1, 181-185 (1959)) wird dabei um den Faktor $1/4^{m-1}$ verbessert.

2) Für das Problem $L[y] = F(x, y, \ldots, y^{(m-1)})$ mit denselben Randbedingungen sei für $y, \tilde{y} \in C^{(2m)}[0,1]$

(i) $F(x, y(x), \ldots, y^{(m-1)}(x))$ stetig, und

(ii) $\quad |F(x,y,\ldots,y^{(m-1)}) - F(x,\tilde{y},\ldots,\tilde{y}^{(m-1)})| < K|y^{(m-1)} - \tilde{y}^{(m-1)}|_{\max_x}$

sei erfüllt mit $\quad K < \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot p \cdot Em \quad \left(Em = \frac{4^{2m-1}[(m-1)!]^2 \sqrt{2m-1}}{\frac{\pi}{2}\binom{2m-1}{m-1}} \right).$

Es werden Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des RW problems bewiesen und eine vom Defekt ausgehende Fehlerabschätzung hergeleitet. (Beispiele).

HADELER, K.P.: Ungleichungen zwischen den Momenten linearer Operatoren

Es werden verschiedene Ungleichungen angegeben und ihre Stellung zueinander untersucht. Eine Verallgemeinerung der Ungleichung von Diaz-Metcalf wird hergeleitet und der Zusammenhang mit Einschließungssätzen von N.J. Lehmann dargestellt. Einige andere Ungleichungen lassen sich aus dieser gewinnen. Die Ergebnisse werden benutzt, um untere Schranken für den größten Eigenwert von beschränkten symmetrischen Operatoren, insbesondere von Hilbert-Schmidt-Operatoren, zu berechnen. Es wird gezeigt, daß die Ungleichung von Diaz-Metcalf ein Analogon des Templeschen Satzes ist und in vielen Fällen mit ihm äquivalent ist.

HILGERS, H.: Ein Verfahren zur Hilbert-Tschebyscheff-Approximation stetiger Funktionen

Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $g \in V$, $W \subset V$ ein Unterraum endlicher Dimension und $K \subset W$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge. Ist nun $s : W \to \mathbb{R}$ streng konvex, so existiert eindeutig $x^* \in K$ mit $\|g-x^*\| + s(x^*) = \inf_{x \in K} (\|g-x\| + s(x))$, was auch in folgender Weise gedeutet werden kann: Mit

$$r := \|g-x^*\| \quad \text{und} \quad K_r := \{x \mid x \in K \wedge \|g-x\| \leq r\} \quad \text{gilt} \quad s(x^*) = \inf_{x \in K_r} s(x)$$

Beispiel: $V = C(T)$ mit der Tschebyscheff-Norm $\|x\| = \max_{t \in T} |x(t)|$ und $s(x) = \{g-x,\ g-x\}^{1/2}$ ein durch das gewöhnliche Skalarprodukt induziertes Funktional in diesem Raum. Es wird ein Verfahren zur Minimisierung der Funktion $\|g-x\| + s(x)$ gebracht und gezeigt, wie man mit Hilfe sol-

cher gemischten Approximationen ein x_ρ K mit $\|g-x_\rho\| = \inf_{x\in K} \|g-x\|$ gewinnt.

RUNCK, P.O.: Über die Konvergenz linearer Operatoren in Banachräumen

Es seien X, Y zwei B-Räume und $\{T_n : X \to Y\}$ eine Folge stetiger linearer Operatoren, die X in Y abbilden. Gefragt wird erstens nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen derart, daß für alle x einer linearen Teilmenge $\Omega \subset X$

$\|T_n x - Tx\|_y \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, wobei der Grenzoperator T in Ω erklärt, linear und abgeschlossen sei.

Zweitens interessieren Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\{T_n\}$, die durch

$\|(T_n - T)x\|_y$ $(x \in \Omega^* \subset \Omega)$ definiert sei.

Es wird gezeigt, daß man diese Probleme zurückführen kann auf solche, die durch Sätze vom Banach-Steinhausschen Typ gelöst werden.

Sodann wird eine Anwendung auf ein Problem der Interpolationstheorie und ein Problem der Approximationstheorie gegeben.

SCHÖNHAGE, A.: Lebesgue-Konstanten bei numerischer Differentiation

Für stetig dffb. F(x) wird das Lagrangesche Interpolationspolynom

$L_n(x) = \sum_{i=o}^{n} F(x_i)\, l_i(x)$ zu $x_o < x_1 \ldots < x_n$ gebildet und der Zusammenhang zwischen $F'(x) = f(x) \in C$ mit $L'_n(x)$ untersucht. Man erhält Projektionen $A_{n-1} : C \to \{\text{Polynome} \mid n-1\}$ $A_{n-1} f = L'_n$. Die Normen

$$\|A_{n-1}\| = \max_x \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \left| \sum_{i=k}^{n} l'_i(x) \right| \qquad (a \leq x \leq b)$$

werden für die speziellen Knoten $x_\nu^{(n)} = -\cos(\frac{\nu}{n}\pi)$ als $O\cdot(\lg n)$ abgeschätzt. Für beliebige Knotenwahl gilt $\|A_{n-1}\| \to \infty$, so daß nie für alle $f \in C$ $A_n f \to f$ möglich ist.

SCHNEIDER, A.: S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme

Es wird eine umfassende, einheitliche und einfache Theorie für "selbstadjungierte" Rand-Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und -gleichungssystemen gegeben.
Allgemeinheit und Anpassungsfähigkeit erreicht man durch folgende Betrachtungen:

1) Man untersucht Systeme erster(und höherer) Ordnung, auf die man explizite Differentialgleichungen höherer Ordnung zurückführen kann.

2) Es wird eine Verallgemeinerung des Begriffs der Selbstadjungiertheit zu Grunde gelegt. Man bezeichnet ihn mit "S-hermitesch".

3) Die betrachteten Eigenwertprobleme werden auf die Theorie vollstetiger hermitescher Operatoren über einen Satz von Wielandt zurückgeführt. Man erreicht damit eine fast rein linear-algebraische Theorie für die betrachteten Eigenwertprobleme.

Im zweiten Teil wird ein sogenannter "Normalfall" betrachtet. Für ihn kann man alle möglichen Randbedingungen charakterisieren und aufzählen. Anschließend wird gezeigt, daß sich eine große Zahl bekannter Probleme in diesen Normallfall einordnen läßt.

SCHRÖDER, J.: Fehlerabschätzung bei partiellen Differentialgleichungen

Für die erste Randwertaufgabe bei Differentialgleichungen der Form $-\Delta u = f(x, y, u)$ wurde eine Methode zur Berechnung einer Näherungslösung $\varphi(x, y)$ und zur Abschätzung des Fehlers dieser Näherungslösung beschrieben. Es wurde über die numerischen Ergebnisse bei verschiedenen Beispielen berichtet. Z.B. wurde die folgende Aufgabe behandelt: $-\Delta u = e^u$ für $|x|, |y| < 1$, $u = 0$ auf dem Rande. Eine genauere Darstellung der zugrunde liegenden Theorie und eine Beschreibung des benutzten (Rechenanlagen-) Programms bindet man in den Proceedings des IFIP-Congress 65 in New York. Die numerischen Experimente werden fortgesetzt und sollen auch auf komplizierte Probleme ausgedehnt werden.

STETTER, H.J.: Numerische Approximation des Fourier-Spektrums einer gegebenen Funktion

Die Parameterintegrale

$$\int_0^T f(t) \cos \omega t \, dt \quad \text{bzw.} \quad \int_0^T f(t) \sin \omega t \, dt$$

werden als Funktion der Veränderlichen ω durch Polynome in $\frac{1}{\omega}$ approximiert. Die Koeffizienten dieser Polynome werden unmittelbar aus den Funktionswerten von f an diskreten Stellen gewonnen, ohne daß in die Rechnung trigonometrische Funktionen eingehen. In den Fällen, wo die Fouriertransformierte von f wie eine Potenz von $\frac{1}{\omega}$ abklingt, liefert dieses Vorgehen mit geringem Rechenaufwand die numerischen Werte der Fouriertransformierten für eine gewisse Menge Ω_T von ω-Werten mit sehr großer Genauigkeit. Im wichtigsten Fall $T = 2\pi$ (Fourier-Analyse) besteht Ω_T gerade aus allen natürlichen Zahlen.

BRUHN, G., Vortr. W. WENDLAND: Die näherungsweise Lösung von linearen Funktionalgleichungen mit nicht vollstetigen Operatoren in Banach-Räumen

Man kann den stetigen aber nicht notwendig vollstetigen Operator einer linearen Funktionalgleichung in einem Banach-Raum durch Näherungsoperatoren, z.B. Operatoren endlichen Ranges ersetzen. Im letzten Fall entsprechen die Näherungsgleichungen linearen Gleichungssystemen. Es werden hinreichende Kriterien angegeben, wann diese Näherungsgleichungen auflösbar sind und die Näherungslösungen gegen die Lösung der Funktionalgleichung konvergieren. Zur Auflösung der Näherungsgleichungen kann man ein rekursives Verfahren angeben.

Anwendungsbeispiele sind lineare Integralgleichungen zweiter Art mit singulärem Kern und unendliche nicht notwendig reguläre Gleichungssysteme. Das Verfahren ist z.B. zur Diskretisierung der Stieltjes-Integralgleichungen der Potentialtheorie verwendbar.

Ist der Banach-Raum ein separabler Hilbert-Raum, so ergibt sich als Spezialfall die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens.

STETTER, H.J.: Numerische Approximation des Fourier-Spektrums einer gegebenen Funktion

Die Parameterintegrale

$$\int_0^T f(t) \cos \omega t \, dt \quad \text{bzw.} \quad \int_0^T f(t) \sin \omega t \, dt$$

werden als Funktion der Veränderlichen ω durch Polynome in $\frac{1}{\omega}$ approximiert. Die Koeffizienten dieser Polynome werden unmittelbar aus den Funktionswerten von f an diskreten Stellen gewonnen, ohne daß in die Rechnung trigonometrische Funktionen eingehen. In den Fällen, wo die Fouriertransformierte von f wie eine Potenz von $\frac{1}{\omega}$ abklingt, liefert dieses Vorgehen mit geringem Rechenaufwand die numerischen Werte der Fouriertransformierten für eine gewisse Menge Ω_T von ω-Werten mit sehr großer Genauigkeit. Im wichtigsten Fall $T = 2\pi$ (Fourier-Analyse) besteht Ω_T gerade aus allen natürlichen Zahlen.

BRUHN, G., Vortr. W. WENDLAND: Die näherungsweise Lösung von linearen Funktionalgleichungen mit nicht vollstetigen Operatoren in Banach-Räumen

Man kann den stetigen aber nicht notwendig vollstetigen Operator einer linearen Funktionalgleichung in einem Banach-Raum durch Näherungsoperatoren, z.B. Operatoren endlichen Ranges ersetzen. Im letzten Fall entsprechen die Näherungsgleichungen linearen Gleichungssystemen. Es werden hinreichende Kriterien angegeben, wann die Näherungsgleichungen auflösbar sind und die Näherungslösungen gegen die Lösung der Funktionalgleichung konvergieren. Zur Auflösung der Näherungsgleichungen kann man rekursive Verfahren angeben.

Anwendungsbeispiele sind lineare Integralgleichungen zweiter Art mit singulärem Kern und unendliche nicht notwendig reguläre Gleichungssysteme. Das Verfahren ist z.B. zur Darstellung der Stieltjes-Integralgleichungen der Potentialtheorie verwendbar.

Ist der Banach-Raum ein separabler Hilbert-Raum, so ergibt sich als Spezialfall die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens.