Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Arbeitstagung (Leitung: Professor R. Baer (Frankfurt))

5. Januar bis 9. Januar 1966

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand eine Arbeitstagung des Frankfurter Seminars von Herrn Professor Baer statt, an der außer seinen Mitarbeitern und Schülern auch Frl. Dr. J. Cofman (Imp. College, London), Herr Dr. A. Jackson (Ghana) und Herr Prof. Dr. Dugundji (Univ. of Los Angeles) teilnahmen. Die Diskussionen und Vorträge behandelten Themen aus den Gebieten der diskreten und topologischen Gruppentheorie und Geometrie und ihre gegenseitigen Beziehungen.

Teilnehmer:

Baer, R.,	Liebert, W.,
Bender, H.,	MacDonald, J.,
Birkenstock, H. J.,	Mäurer, H.,
Brungs, H. H.,	Michler, G.,
Cofman, J.,	Newell, M.,
Dugundji, J.,	Plaumann, P.,
Göbel, R.,	Salzmann, H.,
Gräbe, P.,	Schlette, A.,
Grosse, P.,	Schoenwaelder, U.,
Heineken, H.,	Strambach, K.,
Hering, Chr.,	Wille, R.,
Jackson, A.,	Wölk, D.,
Larson, J.,	

Vortragsauszüge:

BENDER, H.: Quasigruppen und 2'-Gruppen

In einer 2'-Gruppe G definieren die durch

$$a \circ b = aba^{-1}$$
$$a + b = a(a^{-1}b)^{1/2}$$
$$a * b = ab + ba$$

gegebenen Verknüpfungen Quasigruppen. Es werden einige Eigenschaften

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

1

Tagungsbericht

Arbeitstagung (Leitung: Professor R. Baer (Frankfurt))

5. Januar bis [illegible] Januar [illegible]

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand eine Arbeitstagung des Frankfurter [illegible] unter Herrn Professor Baer statt, an der [illegible] Mitarbeiter und Schüler [illegible] Frl. Dr. J. Cofman (Imp. College, London), Herr Dr. A. Jackson (Ghana) und Herr Prof. Dr. Dugundji (Univ. of Los Angeles) teilnahmen. Die Diskussionen und Vorträge behandelten Themen aus den Gebieten der abstrakten und topologischen Gruppen-[illegible] und Geometrie und ihre [illegible] Beziehungen.

Teilnehmer:

Baer, R.
[illegible], [illegible]
Birkenstock, H.[illegible]
[illegible], E.H.
Cofman, J.
Dugundji, J.
Göbel, [illegible]
[illegible]
[illegible], P.
Heineken, H.
Herring, Chr.
[illegible]
[illegible]
[illegible], W.
MacDonald, I.D.
[illegible]
[illegible]
Newell, M.
Plaumann, P.
Salzmann, H.
Schleiermacher, A.
Schwarzenbach, [illegible]
[illegible], K.
[illegible]
[illegible]

Vortragsauszüge:

[illegible], H.: Quasigruppen und V-Gruppen

In einer V-Gruppe G definieren die durch

$[illegible] = cbc$

$[illegible] = c(c^{-1}b)^{1/2}$

$[illegible] ab + bc$

gegebenen Verknüpfungen Quasigruppen. Es werden einige Eigenschaften dieser Strukturen angegeben, die Einbettung der Unterquasigruppen in G untersucht und Beziehungen zu involutorischen Automorphismen und 3-engelschen Elementen von G erläutert. Es sei bemerkt, daß sich das Zentrum von G^* als das zweite Zentrum von G erweist und die Abbildung $g \to (a^{-1} * g) * a$ im Falle, daß alle Kommutatoren $a^{-1}x^{-1}ax$ miteinander vertauschbar sind, ein Automorphismus von G ist.

BRUNGS, H.-H.: Ringe mit eindeutiger Faktorzerlegung

SATZ 1: Ein schwacher Bezoutring R mit Maximalbedingung für Hauptrechtsideale und Hauptlinksideale ist ein Ring mit eindeutiger Faktorzerlegung. Je zwei Zerlegungen $a = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_n$; p_i, q_j, $i, j = 1, \dots, n$ irreduzibel gehen durch Ähnlichkeitsvertauschungen auseinander hervor.

LEMMA: Ein linkshalbvererblicher, lokaler Ring mit 1 erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1, falls jedes Element $\neq 0$, keine Einheit, eine Zerlegung in Irreduzible besitzt.

SATZ 2: Die freie, assoziative Algebra R über einem (komm.) Ring A und einer beliebigen Menge $X = \{x_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$ ist ein Ring mit E'-eindeutiger Zerlegung dann und nur dann, wenn A ein Ring mit eindeutiger Faktorzerlegung ist.

(Definition: $a \neq 0$, keine Einheit aus R ist E'-eindeutig zerlegbar, wenn $a = p_1 \dots p_n$, p_i irreduzibel für alle i und wenn aus $a = q_1 \dots q_m$ q_j irreduzibel, für alle j, dann folgt, daß $m = n$ und es existiert eine Permutation $\pi(1, \dots, n)$ und es gibt Elemente $c_i \neq 0$ aus R mit: $Rp_i \cap Rc_i = Rq_{\pi(i)}c_i$ und $(p_i, c_i)_\nu = 1$.)

COFMAN, J.: Über Kollineatiosgruppen endlicher projektiver Ebenen

Es wurde der folgende Satz bewiesen:

Sei π eine projektive Ebene der Ordnung $n \equiv 3, 4 \bmod 8$ mit der folgenden Eigenschaft (E): π besitzt eine Kollineatiosgruppe Δ mit einem Transitivitätsgebiet von $n + 1$ Punkten, die nicht alle auf der selben Geraden liegen, derart, daß Δ auf diesem Transitivitätsgebiet eine zweifach transitive Permutationsgruppe induziert. Dann ist π desarguessch,

$\Delta \supseteq PSL(2, n)$ und das Transitivitätsgebiet ist ein Oval. Δ zerlegt die Punkte von π in drei Transitivitätsgebiete: die Punkte des Ovals, die inneren und die äußeren Punkte des Ovals. Die Geraden von π werden von Δ ebenfalls in drei Transitivitätsgebiete zerlegt: die Tangenten, die Sekanten und die Passanten des Ovals.

GÖBEL, R.: Gruppenerweiterungen

Wir beweisen den

SATZ: Äquivalent sind:

(1) X ist die Klasse der endlichen p-Gruppen

(2) G ist nilpotent, wenn ein p-Normalteiler A von G existiert mit: $G/A \in X$, $G/A \wr A$ ist eine p-Gruppe und A ist nilpotent, von endl. Expon.

(3) G ist hyperzentral, wenn ein p-Normalteiler A von G existiert, daß $G/A \in X$, $G/A \wr A$ ist eine p-Gruppe und A ist hyperzentral.

Zum Beweis werden folgende Sätze abgeleitet:

I) Sei A ein p-Normalteiler von endlichem Index in G. Dann sind äquivalent:

(1) G ist hyperzentral

(2) A ist hyperzentral, G/A nilpotent, $G/A \wr A$ ist eine p-Gruppe

II) Sei $W = A \sim B$ das Hallsche Kranzprodukt. Dann sind äquivalent:

(1) W ist hyperzentral

(2) A, B sind p-Gruppen, A ist hyperzentral, B ist endlich.

Ähnliche Sätze gelten für hyperzyklisch, nilpotent, überauflösbar. Dabei ergibt sich die Untersuchung hyper-$\aleph$-noetherscher (Jedes epim. Bild $\neq 1$ besitzt einen Normalteiler der Mächtigkeit $< \aleph$) Varietäten:

SATZ: Hyper-$\aleph$-noethersche Varietäten sind nilpotent endlicher Klasse.

HEINEKEN, H.: Kommutator-Abschluß-Eigenschaften in Gruppen

Wir betrachten Gruppen mit folgender Eigenschaft: Zu jedem Element x aus G existiert ein y mit $x^{(n)} \circ g = y \circ g$ für alle g aus G (n ist jeweils fest gegeben). Ist eine solche Gruppe endlich, so ist ihre Kommutatorgruppe nilpotent. Ist $n = 2$, so ist G' nilpotent der Klasse 2 (die

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Endlichkeit von G wird dabei nicht benötigt); ist außerdem G/G' endlich erzeugt, so ist G nilpotent modulo der 2-sylowgruppe von G'. Eine unendliche Serie von Gegenbeispielen zeigt, daß die gleiche Aussage für Gruppen, in denen zu jedem x ein y existiert mit $g \circ^{(2)} x = g \circ y$, falsch ist.

HERING, Ch.: Endliche zweifach transitive Möbiusebenen

Die im Thema beschriebenen Möbiusebenen sind miquelsch.

JACKSON, A.: A characterization of conjugate polarities in a free plane of finite degree

A configuration (= finite partical plane) Q is said to be confined relative to a configuration P if every element of Q, not in P, has multiplicity at least 3 in Q. (The multiplicity of an element of a partical plane is the number of elements with which it is incident). If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$ are configurations, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$, it is shown that the free completion $F(\mathfrak{M})$ of $\mathfrak{M}$ contains a unique maximal configuration K confined relative to $\mathfrak{A}$. K is called the closure of $\mathfrak{A}$ in $F(\mathfrak{M})$. The following result is then proved:

Let $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ be the configurations of absolute elements of the polarities ϑ, ϑ' in a given free plane J_n; K, K' the closures of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ in J_n resp. Then ϑ, ϑ' are conjugate if and only if $\exists$ an isomorphism φ of K onto K' such that $x \varphi \vartheta' = x \vartheta \varphi$, all $x \in K$.

LIEBERT, W.: Sockel der Endomorphismenringe abelscher p-Gruppen

Sei A eine abelsche p-Gruppe mit maximaler divisibler Untergruppe D. Der Linkssockel $S_l(EA)$ des Endomorphismenrings EA von A ist dann und nur dann das Nullideal, wenn entweder $A = D$ oder A/D unbeschränkt ist. Ist $A \neq D$ und A/D beschränkt, so ist der Verband aller Untergruppen des Sockels von A isomorph zum Verband aller in $S_l(EA)$ enthaltenen Linksideale von EA.

A habe die Kaplansky-Eigenschaft, d.h. falls A reduziert ist, lassen sich je zwei ihrer Elemente in einen abzählbaren direkten Summanden von A einbetten. Dann ist der Rechtssockel $S_r(EA)$ dann und nur dann das Nullideal, wenn entweder $A = D$ ist oder wenn $D = 0$ und die Länge

von A eine Limeszahl ist. Sei $A \neq D$, und die Länge von A sei keine Limeszahl, falls $D = 0$. Dann existiert eine eineindeutige Zuordnung zwischen den maximalen Untergruppen von A und den minimalen Rechtsidealen von EA. Gleichzeitig ist der Verband der pA-umfassenden Untergruppen von A dann und nur dann zum Verband aller in $S_r(EA)$ enthaltenen Rechtsideale von EA antiisomorph, wenn A/D endlich ist.

MacDONALD, J.L.: Representable Functors

THEOREM: Suppose $\mathbb{A}$ is a well powered and complete category, then the functor $G : \mathbb{A} \to \mathbb{E}ns$ is representable if and only if

(1) G is continuous

(2) There exists a set of objects (A_i, a_i) in $\mathbb{A}_{G^*}$ indexed by I such that for each (A, x) in $\mathbb{A}_{G^*}$ there exists a morphism $(A_i, a_i) \to (A, x)$ for some i in I.

MICHLER, G.: Charakterisierung einer Klasse von halberblichen Ringen

Wir benutzen Goldie's Terminologie und bezeichnen mit J das Jacobson-Radikal. Dann gilt der folgende

SATZ: Der Ring R (mit Eins) ist dann und nur dann ein $n \times n$ Matrixring über einem lokalen Rechts- Bezout-Ring, wenn R ein primärer, $n = \text{Dim } R = \text{Dim}(R/J) < \infty$ erfüllender, halberblicher Primring ist.

NEWELL, M.: On a theorem of Bear and Mal'cev

A result of Mal'cev stated that every almost noetherian soluble group is noetherian (here a group G is called almost noetherian if every abelian subgroup of G is finitely generated). Baer has shown, more generally that almost noetherian hyper-abelian groups are noetherian. The following two theorems were proved:

I. Every almost noetherian hyper-F.C.-group is a finite extension of a noetherian soluble group.

II. Every hyper-F.C.-group of automorphisms of a noetherian hyper-F.C.-group is also a finite extension of a noetherian soluble group.

PLAUMANN, P.: Kompaktheitskriterien in lokal kompakten Gruppen

Der folgende Satz wurde bewiesen:

SATZ: Für eine Liegruppe G mit kompakter Komponente der Eins sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Die Zentrumsfaktorgruppe von G ist kompakt.

(b) 1. G ist über den Normalisatoren aller abgeschlossenen Untergruppen kompakt.

2. Die Klassen konjugierter Elemente haben nur eine beschränkte Anzahl von Komponenten und sind kompakt.

(c) 1. Die abgeschlossene Hülle der Kommutatorgruppe von G ist kompakt.

2. Es gibt einen diskreten abelschen Normalteiler A von G, für den die Faktorgruppe G/A kompakt ist.

Während ein Korrolar dieses Satzes für beliebige Liegruppen angegeben werden konnte, wurde anhand von Beispielen gezeigt, daß für andere als Liesche Gruppen der Satz nicht notwendig richtig ist.

SCHOENWAELDER, U.: Über die Existenz Hallscher Normalteiler

SATZ: Für eine endliche Gruppe G sind äquivalent:

(1) π-abgeschlossene Untergruppen von G sind π'-abgeschlossen;

(2) G ist π-homogen;

(3) biprimäre Untergruppen von G sind π'-abgeschlossen;

(4) einstufig nicht-nilpotente Untergruppen von G sind π'-abgeschlossen.

Hieraus folgt unter anderem:

SATZ: Eine endliche Gruppe G ist π'-abgeschlossen, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(N) π-Untergruppen von G sind hyperfokal in G.

(S) G ist π-homogen und besitzt eine π-Hall-Untergruppe H mit Sylowturm, so daß jede einstufig nicht-nilpotente π-Untergruppe von G zu einer Untergruppe von H konjugiert ist.

PLAUMANN, P.: Kompaktheitskriterien in lokal kompakten Gruppen

Der folgende Satz wurde bewiesen:

SATZ: Für eine Liegruppe G mit kompakter Komponente der Eins sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Die Z[illegible]faktorgruppe von G ist kompakt.

(b) 1. G ist über den Normalisatoren aller abgeschlossenen Untergruppen kompakt.

2. Die Klassen konjugierter Elemente haben nur eine beschränkte Anzahl von Komponenten und sind kompakt.

(c) 1. Die abgeschlossene Hülle der Kommutatorgruppe von G ist kompakt.

2. Es gibt einen diskreten abelschen Normalteiler A von G, für den die Faktorgruppe G/A kompakt ist.

Während ein K[illegible] für beliebige Liegruppen angegeben werden konnte, wurde [illegible] Beispiele gezeigt, daß für andere als Liesche Gruppen [illegible] nicht notwendig richtig ist.

SCHOENWAELDER, U.: Über die Existenz Hallscher Normalteiler

SATZ: Für eine endliche Gruppe G sind äquivalent:

(1) π-abgeschlossene Untergruppen von G sind π'-abgeschlossen;

(2) G ist π-homogen;

(3) π-primäre Untergruppen von G sind π'-abgeschlossen;

(4) einstufig nicht-nilpotente Untergruppen von G sind π'-abgeschlossen.

Hieraus folgt unter anderem:

SATZ: Eine endliche Gruppe G ist π'-abgeschlossen, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) π-Untergruppen von G sind hyperfokal in G.

(2) G ist π-homogen und besitzt eine π-Hall-Untergruppe H mit Sp[illegible], so daß jede einstufig nicht-nilpotente π-Untergruppe von G zu einer Untergruppe von H konjugiert ist.

STRAMBACH, K.: Sphärische Möbiusebenen

Es wurden folgende Sätze über sphärische Möbiusebenen (d.h. Möbiusebenen, deren Punktmenge homöomorph zur 2-Sphäre S_2 ist und deren Kreise ein System von Jordankurven auf S_2 bilden) bewiesen:

Ist Γ eine Liegruppe, die auf einer sphärischen Möbiusebene $\mathfrak{M}$ als Automorphismengruppe operiert, so muß $\dim \Gamma \leq 6$ sein.
Operiert auf $\mathfrak{M}$ eine sechsdimensionale Liegruppe Γ als Automorphismengruppe, so ist $\Gamma \simeq PSL_2(C)$, und $\mathfrak{M}$ ist miquelsch, d.h. die klassische Geometrie der Kugelfläche.

Keine sphärische Möbiusebene $\mathfrak{M}$ gestattet eine fünfdimensionale Liegruppe als Automorphismengruppe.

Gibt es in $\mathfrak{M}$ Inversion an jedem Kreis, so ist $\mathfrak{M}$ miquelsch, und die Zusammenhangskomponente von Γ ist gleich $PSL_2(C)$.

WILLE, R.: Verbandstheoretische Charakterisierung n-stufiger Geometrien

In einer Punktmenge seien gewisse Teilmengen als Kurven und gewisse Teilmengen als Flächen ausgezeichnet. Dann werden folgende Forderungen aufgestellt:

(1) Durch $n + 1$ Punkte geht genau eine Kurve, und auf jeder Kurve liegen mindestens $n + 1$ Punkte.

(2) Durch $n + 2$ Punkte, die nicht auf einer Kurve liegen, geht genau eine Fläche, und auf jeder Fläche liegen mindestens $n + 2$ Punkte.

(3) Mit $n + 1$ Punkten enthält eine Fläche auch die Verbindungskurve dieser Punkte.

Eine Menge von Punkten heiße Teilraum, wenn sie mit $n + 1$ Punkten deren Verbindungskurve und mit $n + 2$ nicht auf einer Kurve liegenden Punkten deren Verbindungsfläche enthält.

(4) Haben zwei Flächen, die in einem von $n + 3$ Punkten aufgespannten Teilraum liegen n Punkte gemein, dann haben sie schon $n+1$ gemein.

Eine Inzidenzstruktur, die den voranstehenden Forderungen genügt, soll n-stufige Geometrie genannt werden. Für $n = 0$ erhält man gerade die projektiven Geometrien, für $n = 1$ die affinen Geometrien ohne

STRAMBACH, K.: Sphärische Möbiusebenen

Es wurden folgende Sätze über sphärische Möbiusebenen (d.h. Möbiusebenen, deren Punktmenge [illegible] homöomorph zur 2-Sphäre S_2 ist und deren Kreise ein System von Jordankurven auf S_2 bilden) bewiesen:

Ist [illegible] kompakt [illegible] auf einer sphärischen Möbiusebene [illegible] als Automorphismengruppe [illegible], so muß dim [illegible].

[illegible] auf [illegible] sechsdimensionale Liegruppe [illegible] als Automorphismengruppe, so [illegible] $PSL_2(C)$, und [illegible] ist [illegible], d.h. die [illegible] geometrie [illegible] Kugelfläche.

[illegible] sphärische Möbiusebene [illegible] gestattet ein fünfdimensionale Liegruppe als Automorphismengruppe.

Gibt es in [illegible] Inversion an jedem Kreis, so ist [illegible] miquelsch, und die Zusammenhangskomponente von [illegible] ist gleich $PSL_2(C)$.

WILLE, R.: Verbandstheoretische Charakterisierung n-stufiger Geometrien

[illegible] Punktmenge seien gewisse Teilmengen als Kurven und gewisse Teilmengen als Flächen ausgezeichnet. Dann werden folgende Forderungen aufgestellt:

(1) Durch n + 1 Punkte geht genau eine Kurve, und auf jeder Kurve liegen mindestens n + 1 Punkte.

(2) Durch n + 2 Punkte, die nicht auf einer Kurve liegen, geht genau eine Fläche, und auf jeder Fläche liegen mindestens n + 2 Punkte.

(3) Mit n + 1 Punkten enthält eine Fläche auch die Verbindungskurve dieser Punkte.

Eine Menge von Punkten heißt Teilraum, wenn sie mit n + 1 Punkten deren Verbindungskurve und mit n + 2 nicht auf einer Kurve liegenden Punkten deren Verbindungsfläche enthält.

(4) Haben zwei Flächen, die [illegible] einem von n + 3 Punkten aufgespannten Teilraum liegen, [illegible] Punkte gemein, dann haben sie schon n + 1 gemein.

Eine Inzidenzstruktur, die den voranstehenden Forderungen genügt, soll n-stufige Geometrie genannt werden. Für n = 0 erhält man gerade die projektiven Geometrien, für n = 1 die affinen Geometrien ohne

Parallelenaxiom und für $n = 2$ die Moebius-Geometrien ohne Berühraxiom.

SATZ: Man kann die n-stufigen Geometrien (über die Verbände aller Teilräume) mit den matroiden Verbänden identifizieren, in denen für jedes Element a mit $l(a) = n$ $[0, a]$ distributiv und $[a, \to]$ modular ist.

WÖLK, D.: Topologische Möbiusebenen

Die Elemente einer Menge IP von "Punkten" und einer Menge IK von "Kreisen" sollen den Inzidenzaxiomen einer Möbiusebene im engeren Sinn unterliegen. Sind die Verknüpfungsrelationen bezüglich gegebener Topologien von IP und von IK stetig, so sprechen wir von einer topologischen Möbiusebene.

SATZ I: Lassen sich in einer zur 2-Sphäre homöomorphen Möbiusebene die Kreise als Jordankurven darstellen, so gibt es eine eindeutig bestimmte Topologie des Kreisraumes, bezüglich der die Möbiusebene topologisch ist.

SATZ II: In einer topologischen Möbiusebene sind äquivalent:

(1) IP ist lokal kompakt u. dim IP = 2 ;

(2) IP $\approx S_2$;

(3) Eine affine Unterebene ist lokal kompakt und zweidimensional;

(4) Jede affine Unterebene ist homöomorph R^2.

(5) Ein Kreis ist lokal kompakt und eindimensional;

(6) Alle Kreise sind homöomorph S_1 .

(7) Die Kreise durch einen Punkt bilden eine 2-Mannigfaltigkeit;

(8) Die Kreise durch zwei Punkte bilden eine 1-Mannigfaltigkeit;

(9) IK ist lokal kompakt und dreidimensional;

(10) IK ist eine 3-Mannigfaltigkeit;