#### Tagungsbericht

Arbeitstagung des Mathematischen Seminars für Studienreferendare unter Leitung von Gym. Prof. F. Raith

vom 5. bis 7. Februar 1966

Unter der Leitung von Gymnasialprofessor Fritz Raith trafen sich Anfang Februar die Studienreferendare (Fachrichtung Mathematik) des Freiburger Seminars zu einer Aussprache über Fragen der mathematischen Didaktik im Gymnasialunterricht.

Vier Referate wurden gehalten und anschließend diskutiert:

- 1) Dr. G. Augustin: "Zahlentheoretische Probleme im Schulunterricht",
- 2) Dr. G. Augustin: "Teilbarkeit und eindeutige Primfaktorzerlegung" sowie "Bemerkungen zur Verteilung der Primzahlen",
- 3) Frl. U. Schulze: "Einführung einiger Begriffe der Mengenlehre im traditionellen Unter- und Mittelstufenunterricht",
- 4) Gym. Prof. F. Raith: "Zur Einführung der Vektorrechnung" (?)

### Teilnehmer:

4				1:	T \ -	_	$\sim$
1.	μ	۱ 11 O	1115	tin,	, D1	•	۱÷.
-		- ~ -	,~~		,	•	$\sim$ .

2. Burkhard, Dr.A.

3. Doll, W.

4. Feger, F.

5. Henninger, F.

6. Hübler, D.

7. Krais, J.

8. Kramer, H.

9. Langer, R.

10. Martin, D.

11. Rohrbacher, H.

12. Raith, F., Gym. Prof.

13. Schölzel, H.

14. Schulze, U.

15. Siebert, A.

16. Siegel, H.

17. Stepping,

18. Storch, P.

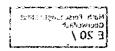
19. Unmüßig, B.

20. Walter, F.

21. Weidenbach, W.

(I) Die Tagung wurde mit einem Referat über "Zahlentheoretische Probleme im Schulunterricht" von Herrn Augustin eröffnet. Der erste Teil beschäftigte sich damit, wie man die "Transzendenten Zahlen" in Mittel- und Oberstufe behandeln könnte. Der Schüler sollte mit dem

#### hito Mathebases Forest urgainstitut Oberwilfsch



tabiradag - 2 3 1

en distiguag des Mars matisches Sommers für Studiensien särb unter Ledde eins Apas. Dist. P. Raig

Vois a bid . Nabrumar 1936

Porce des Callang van Lymaniaiprofeusor Fritz da ich mafen siel. Aufung Februar die elektrieuwerk-nerdare (Enchmishiang Markematik) des Freiburger besmuder va einen Auseptuche über Progen der einthomatischen Didaluk im Gymnasieleuwerricht.

Vier Peferate wurdengehalten er ausschließend diabutischt

- i) flet G. Augertin: "Zahlertbeeretische Probleme im Schulusternicht",
  - 3) Dec. C. Augustin: "Latbackett und eindeutege Primaktonzerlegung!" newfe "Bemerkungen war Verreilung der Primagblon!".
  - 3) Fel. C. Schulze: "Sinführung einigen Degriffe der Vongselehre im endlitzusellen Unter- und Affinkrufenhaltungehicht".
    - 4) Gyra, Prof. F. Raith: "Nur Binführung der Velgererebnung" (2)

### Jellushmur:

12. Raith, F., Tyrn, Prof.	1. Asgrath, Dr.G.
13. Scholzel, E.	2. Statkinsk, Do.A.
1d. Setube, v.	8. Well, W.
15. Swibert, A.	. 毛、红头色蛋白色
i6. Siegel, 16.	C. Herkyleyery M.
17. Stepping.	n tables, D.
Is. Sarray.	N. Watti V.
19. Om de 1g. B.	8. Kremen U.
20. Waltau, F.	9. Langer, C.
Fi. West Space, N.	19. Wartin, B.

- 11. Resphener, 1:
- (i) Die Taging wurde aut errom Waterstüber Tanhanthooretische Probieus an Sebeimenericht von Herrn Auguste auffheit. Der erste Tail beschäftigte eich damit, und and die "Tunklung onde eten Zahlau" in Liffele von Oberstub behanden binnes. Der Schüler sollie mit dam





Begriff der transzendenten Zahl vertraut gemacht werden, bevor von  $\pi$  und e geredet wird. Die Reihenfolge bei der Behandlung transzendenter Zahlen könnte folgende sein:

1.) Definition der algebraischen und transzendenten Zahl.

Eine Zahl heißt algebraisch vom Grade n, wenn sie Lösung der Gleichung  $\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu} x^{\nu} = 0$  ( $a_{n} \neq 0$ ,  $a_{\nu}$  ganzrational) ist. Jede nicht algebraische Zahl heißt transzendent.

- 2.) Nachweis der Existenz transzendenter Zahlen, ohne ein Exemplar anzugeben. Dazu beweist man zunächst den Satz: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar. Mit Hilfe des 2. Cantorschen Diagonalverfahrens erhält man: Die Menge  $M = \{x | v < x \le 1\}$  ist nicht abzählbar. Daraus folgt die Existenz transzendenter Zahlen. (Cantorscher Beweis).
- 3.) Angabe einer als transzendent erkannten Zahl.

Um transzendente Zahlen zu konstruieren, macht man eine Aussage über die Approximierbarkeit einer algebraischen Zahl durch rationale. Das erste Ergebnis in dieser Hinsicht erzielte Liouville, der den Satz bewies: Für jede algebraische Zahl  $\alpha$  vom Grade n>1 existiert eine von  $\alpha$  abhängige Konstante c>0, so daß für alle ganzrationalen Zahlen P, Q mit Q>0 gilt

$$|\alpha - \frac{P}{Q}| > \frac{c}{Q^n}$$
.

(Zum Beweis vergleiche Hardy-Wight: Zahlentheorie, Oldenburg-Verlag).

Der Satz von Liouville wird herangezogen, um die Transzendenz der Zahl

$$a = \sum_{v=1}^{\infty} 10^{-v!} = 0,11000100...$$

nachzuweisen. Angenommen die Zahl a ist algebraisch vom Grade < N; sei n > N und

$$a_n = \sum_{v=1}^{n} 10^{-v!} = \frac{P}{10^{n!}} = \frac{P}{Q}$$
 (P ganzrational, Q = 10<sup>n!</sup>).

Dann ist



Compiled an answardenten Zahl verbruregement warder, hover von der der Behandlung von der verbrure Zehler Wird. Die deligenfahre int der Behandlung vernezendenter Zehler könnte felrend ent :

## 11.) I Fattor Cor algebraischen und transzeigenten Zahl.

If the sould rely obtained your Grade is, is a solid coung densely decay  $\widehat{\psi}$  of  $\widehat{\psi}$  of the innervals of the space of  $\widehat{\psi}$  of  $\widehat{\psi}$  of the space of  $\widehat{\psi}$  of the s

2.) i d conservation comessatelles Médides, etca et acceptar cologies. In compassion man an Behall data in the Mingels der signbraiseles de color det abzählban. Min Whis der 2. Conservation Diagonaly orient de their mand Dia Mangullet der hand der Ergelles.

sider eine Liber. Personal folgt die Weiter wieden der Schlag.
(Contestable die steer der

## A.) Angaba officer all transfer distributes Eginl.

Under the second of the station of the second of the secon

(30 Tour Control of the Control of t

Description Into Michaelle and in a figurage, assettic Transfordion der Seit.

noubrawain. 1. The grantees of the Zahl of ist signification vota Gradum > 1); and all the Filmond

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \cdot (12 \text{ gaussinion al.}) \cdot = 10^{-11}).$$

Juhana G





$$0 < a - \frac{P}{Q} = a - a_n$$

$$a - a_n = \sum_{v=n+1}^{\infty} 10^{-v!} < 2 \cdot 10^{-(n+1)!} = 2 \cdot (10^{-n!})^{n+1}$$

$$a - a_n < 2 \cdot Q^{-(n+1)} < 2 \cdot Q^{-N},$$

also ist a nach dem Satz von Liouville keine algebraische Zahl vom Grade < N und da N beliebig gewählt war, ist a transzendent.

4.) Das schwierigste Problem, nämlich die Frage ob eine vorgelegte Zahl transzendent ist oder nicht, scheint im normalen Schulunterricht nur selten angreifbar zu sein. Doch hielt es der Vortragende durchaus für möglich, in Arbeitsgemeinschaften und guten Klassen den Hermiteschen Beweis für die Transzendenz von e durchzuführen. Der Beweis beruht auf der folgenden, von Hermite angegegenen Integralformel: Sei g(x) ein Polynom vom Grade N; durch
partielle Integration findet man

(\*) 
$$e^{\alpha} \int_{0}^{\alpha} g(x) \cdot e^{-x} dx = -G(\alpha) + G(0) \cdot e^{\alpha} \text{ mit } G(x) = \sum_{\nu=0}^{N} g^{(\nu)}(x).$$

Die weitere, auf der Integralformel fußende Beweisidee ist folgende: Angenommen e ist algebraisch vom Grade n (der Beweis ist notwendig ein Widerspruchsbeweis!), dann gibt es ganzrationale Zahlen  $a_{\nu}$  ( $\nu = 1, \ldots, n$ ) mit

(\*\*) 
$$\sum_{v=0}^{n} a_{v} \cdot e^{v} = 0 \qquad (a_{n} > 0).$$

Mil tipliziert man (\*) nacheinander mit a , a , ..., a und addiert die erhaltenen Gleichungen, so wird

$$G(0) \cdot \sum_{v=0}^{n} a_{v} \cdot e^{v} - \sum_{v=0}^{n} a_{v} G(v) = \sum_{v=0}^{n} a_{v} e^{v} \int_{0}^{v} g(x) \cdot e^{-x} dx.$$

Mit (\*\*) folgt

$$\sum_{v=0}^{n} a_{v} \cdot G(v) = -\sum_{v=0}^{n} a_{v} \cdot e^{v} \int_{0}^{v} g(x) \cdot e^{-x} dx.$$

Man schätzt nun die rechte und linke Seite dieser Gleichung getrennt ab und erhält einen Widerspruch. Also ist die Annahme (\*\*) falsch, d.h. e ist transzendent. Bei der Durchführung der Rechnung kommt es darauf an, das Polynom g(x) geschickt zu wählen. (Zur Durchführung des Beweises vgl. etwa Ostrowski:



$$\frac{1}{2}a - c = \frac{C}{2a} - a > 0$$

eign ist a fach dur. Satz von Idauville knige eigebreische Zohlvom Gradung – au i da Wijbelidiga guwählte vor, ist a teonszoolunt.

4.) Cas schwidzigsta Probjem, nämiteh die Erme ob zien vorgelente Zobi trangzonden ist oder nicht, nobeid im mynalen Schulunterrief num welt en nyraffen zu sein. Duch hielt as der Vertrup de derchum Wir möglich, it dubytagemeinschaften und guter Klande derchum Wir möglich, it dubytagemeinschaften und guter Klanen den ihremit gebet. Her it im die Transschich von durchzaführen. Duch, de inperiodent und der folgenden, was Harmite ungegege er integrafien und Soleg(z) on deipromet voll ein by durch vorgielle Dubytagefinden nuch nach.

$$(2)^{(4)} = (2)^{(5)} \text{ that } [-\cdot(0) \oplus +(0) \ominus + -26]^{(5)} \oplus \cdot (2).$$

this weither, and der late maliermet fußende Beweisider ist folgent ett personen et ist algebraiden vere Grade at (der Beweis ist bestemmendie ett Viderspruckeboweis!), delle gibt et genschings Table et en weitigness Table et en weitigness Table

vill tiplicierà man (7) e distrarder mit a<sub>o</sub>, a<sub>i</sub>, ..., a<sub>i</sub> and addiem dis exhatenon Cleichungs , so wird

Moss schätzt eus die verbee wed liebe Seile dieser Oksiehung gotrösest ab und erhält die a. Wild rejurelt. Also ist die Arnahme (22) faluel, d.i. er let undeszeiche z. edi der Ourehfibrung der kachnung nervere en deurel es, des leig der eine ein geschicht zu wähle. (Zar Ourehrünung ich Suwelere v.d. etwa Ustrowskit



Vorlesungen über Diff. - und Integralrechnung Bd. III).

In der Diskussion wurde auf die didaktischen Schwierigkeiten beim Beweis des Liouvilleschen Satzes und des Hermiteschen Transzendenzbeweises für e hingewiesen. Man war sich einig, daß der im Referat vorgezeichnete Weg höchstens in einer Arbeitsgemeinschaft einen pädagogischen Erfolg haben wird.

(II) Als Ergänzung zum Unterstufen-Unterricht waren die Ausführungen über "Teilbarkeit und eindeutige Primfaktorzerlegung", sowie die "Bemerkungen zur Verteilung der Prinzahlen" gedacht.

Ist in einem Integritätsbereich I (nullteilerfreier, kommutativer Ring) die Gleichung

 $x \in I$ 

lösbar, so heißt a Teiler von b, geschrieben a/b. Zwei Elemente a,  $b \in I$  heißen invers, wenn  $a \cdot b = 1$  ist. Alle Elemente, die ein Inverses besitzen, heißen Einheiten. Die Einheiten sind Teiler

mit

jedes Elementes von I. Elemente, die durch Multiplikation mit einer Einheit auseinander hervorgehen, nennt man assoziiert. Ein Element, das keine Einheit ist und nur durch sich selbst, durch Einheiten

und assoziierte Elemente teilbar ist, heißt Primelement.

Diese Begriffe werden im Folgenden nur für den Integritätsbereich der ganzen Zahlen  $I_0$  benötigt. Einheiten sind  $\pm 1$ ,
assoziiertes Element zu a ist a und -a, Primelemente sind die
Primzahlen. Bei der Untersuchung von Teilbarkeitsfragen in  $I_0$  genügt es, sich auf positive Teiler zu beschränken.

Der Fundamentalsatz der Arithmetik:

Jede natürliche Zahl n > 1 läßt sich als Produkt von Primzahlen darstellen und zwar, wenn man von der Reihenfolge absieht, auf nur eine Weise.

Zum Beweis benötigt man

1.) den g·g·T zweier Zahlen: Die Zahl d = (a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>) heißt g·g·T von a<sub>1</sub> und a<sub>2</sub>, wenn gilt d/a<sub>1</sub>, d/a<sub>2</sub> und x/a<sub>1</sub> ∧x/a<sub>2</sub> → x/d.
Zur Bestimmung des g·g·T dient der Euklidische Algorithmus.



Vorlessages über Diff. - und Integrale-chaung Ed. III).

I dre stringered worde and die didentarden Solwianiskeiten heim engeweet der Schwianiskeiten heim engeweet der Satzwa und de Berenitaschen Franzende, zzuwenden der enlagewiesen, Wan wer sien die ig, daß der im Mainret engeweiten von Granien von der Schwiere Ver höchsten und diest Arbeitsgemein ahaft einen pakten ein eine Stag inbeweiten.

(i) statement zum Unterstufen-Unterricht waren die freihungen über "Thibarkeit und eindeutige und sichten trackten trackten in bewie die "Bo enrkanden zur "er-zeite und und unterstützen. Die bestättig zu beiten den gedacht.

Isti dana Takegristsberoich a (malkoilerfroium, kommendatyen Ring) da Colarbung

Isz tin den.

losbon, so wold a differ very be gracheraboned. Zweißlemante e, helf being install, and a che i ich. Allo Blemente, die ein hereroe bonitzen, deie e littale (e.u. Die Timbolten died Triler jeden Whe enter ver I. diometro, die derec Weltiplikation mit einer Mishbolten, sinerder hervorpelar, eent met eers een mit Inmont, das eens biebeit is ood me derechte is dert derch Withelten unt aus mittete beroote i Thar is, heife outenoor.

Diera berriffs which into algorida into the dan into perticise berated and garant for the land of bondigh. Districted and [1], and which a Milerant en a let a mai wa. Trickell wents sind die engrand of Tal dar Victory county von Teilberk ittfrages in I, gonight of, alch and positive Weiler en boschuttere.

Dur Fundamontolsand der Arithmetile:

Jode net milene Zald in al light siel ein Predakt von Erfenklien eststell mund grang wegt men von der lielbenfolgt absidet, auf nur dien Village.

near trible of electric and

T.) if a property design the Schletz for application of a property of the state of





2.) Hilfssatz 1: Sei  $a_1$ ,  $a_2 \in I_0$ . Dann ist die diophantische Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = d$$
 in ganzen Zahlen  $x_1$ ,  $x_2 \in I_0$  lösbar.

3.) Hilfssatz 2: (Erster Satz von Euklid). Ist das Produkt  $\prod_{\nu=1}^{n}$  a durch eine Prinzahl P teilbar, so ist wenigstens einer der Faktoren durch P teilbar.

Ist n eine Primzahl, dann gilt der Fundamentalsatz. Sonst wendet man vollständige Induktion an. Für n = 4 gilt die eindeutige Primfaktorenzerlegung. Für m < n sei die eindeutige Primfaktorenzerlegung bewiesen. Ist n keine Primzahl, so folgt aus der echten Zerlegung n = a · b die endlicht Primfaktorenzerlegung von n, etwa n =  $\sqrt[n]{1}$  P<sub>v</sub>. Die Eindeutigkeit beweist man mittels HS 2, indem man die zweite Zerlesung n =  $\sqrt[n]{1}$  q annimmt und zum Widerspruch führt. -

Als Beispiel für einen Integritätsbereich, in dem keine eindeutige Primfaktorzerlegung gilt, wurde der Integritätsbereich mit den Elementen a + i · b ·  $\sqrt{5}$  angegeben. Primelemente sind 2, 3,  $1+i\sqrt{5}$ ,  $1-i\sqrt{5}$ , aber es gilt  $2 \cdot 3 = (1+i\sqrt{5}) \cdot (1-i\sqrt{5})$ .

Nur als kleine Bemerkung war das folgende über Primzahlen Gesagte gedacht:

- 1. Es gibt der Primzahlen mehr, als jede vorgelegte Zahl. (Euklid)
- Das Sieb des Erathostenes kann mit Erfolg schon in der Sexta zur Bestimmung der Primzahlen < N herangezogen werden.</li>
- 3. Eine allgemeine Formel für die n-te Primzahl existiert nicht. Das von Euler angegebene Polynom  $f(x) = x^2 + x + 41$  liefert zwar für x = 1, 2, ..., 39 Primzahlen, aber fortlaufend keine weiteren.
- 4. Es gibt beliebig lange Abschnitte in der Reihe der natürlichen Zahlen, die keine Primzahlen enthalten, nämlich z.B.

$$n! + 2$$
,  $n! + 3$ , ...,  $n! + n$ .

- 5. Als Primzahlzwillinge bezeichnet man 2 Primzahlen, deren Differenz 2 ist, Es ist eine offene Frage, ob die Anzahl der Primzahlzwillinge endlich ist, Beispiele: (5,7); (11,13); (17,19).
- 6. Man interessiert sich dafür, wieviele Primzahlen  $\leq$  N existieren.





2.) Hilfssants Is the T. T. To Downtet dis displantische Olei-

en fragilish na property di Property and the second of

int a sine Fri mably when give or Fundamentalests. Sonst wondet name volkständige knivitie and. When me dogith die sinderstige Principalesters Principalesters powingen. It was in her wall his oblidering Principalesters relegion goberingen. Ist with his interval, and, we folgt are the chiral Exploguing of a be die endlicht frit fibr remaindering vor a, stwar we like F.. Die Mindertigkeit knowlet word with the volkers with the swatte Euclewicht deutschaft was with and well were Viderappend from and the swatte Euclewich.

Als Beispiel für doch fowgrößtsbeneich, in den beine eindeutige Prinsfaktornenbegung (20), we do der in ogrößtscherwich mit den Elemonten a  $\pm i \cdot b \cdot \sqrt{s}$  angegeb a. Fubbeidensate sind 2, 3,  $1 \pm i \sqrt{5}$ , ober en gibt 2  $\pm 0 = (1 \pm i / 5) \cdot (1 - i / 5)$ .

Nur els klates Benerius y was das felgorde über Primzehlen Gesagte gresekt:

- 1. The gibt due that assisted moles, als jode veryok gib babl. (Eniclid)
- 2. Das Silb de Cistrificates as best miturally schouts der Sorte sur Develored Colon Colon Colon Colon Chicagon wardon.
- 8. Teles all condition for the first of the additional axistican along the colet. For the colet and the colet and
- i. We published to be discontinuous to dominate dominated the dominated to be settled to the settled to the discontinuous settles.

. 11 年 11 人 . . . . . 8 中 11 人名中 12

- 5. Als Petachiland Dago for delast mand i rimediler, derum Differrand & Lin latin ist attended Frago, do to August der Francescher anti-
- e. The defendant shall dealth adeviate Princeties T extationer.





Sei 
$$\pi(N) = \sum_{P \le N} 1$$
.

Gauß vermutete, Hadamard und de la Vallé-Poussin beweisen

$$\pi$$
 (N)  $\sim \frac{N}{\log N}$  (Primzahlsatz).

- 7. Jede genügendgroße ungerade Zahl läßt sich als Summe von 3 Primzahlen darstellen (Vinogradoff 1938). Noch unbewiesen ist die Goldbachsche Vermutung: Jede gerade Zahl läßt sich als Summe von 2 Primzahlen darstellen.
- (III.) Im weiteren Verlauf der Tagung referierte Fräulein Ulrike
  Schulze über die "Einführung einiger Begriffe der Mengenlehre
  im traditionellen Unter- und Mittelstufen-Unterricht". Sie zeigte im Verlauf ihres Referates die Möglichkeiten für eine Behandlung
  mengentheoretischer Grundbegriffe in einer Quinta und einer Untertertia.

Als ein wesentliches Ziel in Unter- und Mittelstufe ist zunächst das Begreifen von strukturierten Mengen erwünscht. Dabei war das Unterrichtsziel, das sich Frl. Schulze in Quinta gesteckt hatte, Operationen zwischen Durchschnitt und Vereinigung von Mengen einzuführen. Die einzelnen didaktischen Schritte waren: endliche, unendliche, leere Menge, Gleichheit von Mengen, echte, uneigentliche, elementfremde Teilmengen.

Es zeigte sich, daß die Quintanerinnen spontan zahlreiche Beispiele von Mengen mit Elementen des täglichen Lebens zu nennen wußten, und daß auch die Einführung einer symbolischen Schreibweise keine Schwierigkeiten bereitete. Auch die Einführung von endlichen Zahl-Mengen verlief reibungslos.

An einfachen Beispielen wurde dann definiert: endliche, unendliche, leere, gleiche Mengen. Anhand von Venn-Diagrammen wurde Teilmenge, uneigentliche und leere Teilmenge eingeführt.

Interessant war dabei, daß die Quintanerinnen - im Gegensatz zu den Untertertianerinnen - sehr rasch einsahen, daß es vorteilhaft ist, die leere Menge unter die Teilmengen jeder Menge zu rechnen.





Soi 
$$\pi(N) = \sum_{i=1}^{N} 1_i$$

Can variante', Haddelbard and do la Vall'-Poucair bewalean

- 7. Jode genügenderede ungerade Zahl läft deb da Shmme von 3 Primschlet darsiellen (Vinegradeff 1938). Hech unbewiesen ist die Goldbacksehn Vermutung: Jede gerade Zahl lüst dich als Summe von Früharblich derstellen.
  - (III.) he welfer a Verlant for Magung referierte Princian Ulriber Schulze Schulze über die "Lindührung einiger Hegriffe der Al. Auslehre im traditionalist Unter- und Mittelefere-Urterricht. Sie zeigte im Verläuf ihren Referator die Mügliche it i für en Heinstellung mengenfleeretischer Ceradbegriffe in einer Veinte und einer Untertertig.

Als eir wasentlicher Firl in Unter- und Mittelstufe ist zumächst das Begreifen von strukturierten Mangen erwünscht. Debei wer das Unterrichtsziel, das eich Ert. Schulz, in Duints gesteich hette. Operationen zwinel er Durchschmitt und Vereinigung von Mungen einzuführer. Die einzehner didektionen Schrifts waren: endliche, unschliche, inere Menge, Glenerheit von Mangen, uchte, unsigentliche, elementerede Teilneger, achte, unsigentliche, elementerede Teilneger.

Es zeight viole, that die einicht enimen sporten zeitreiche Reispiele von Wengen mit elementen des täglichen Lobens zu neume untur, und des auch die Einführung virer gembelischen Schreibweien kenne Schwierischen bereitet. Auch die Ebritährung von endlichen Zehle-berger vorlief reibungabe.

An einfachen Beispfeler wurdt dann definiert: om liche, unendliche, loere, gleiche bleuten Ashand von VerneDiegranden wurde Teilmenge, weigeutliche und loore Teilmange eingefährt.

Interpassent van daber, dat die Rainielserieuer - im Gegensetz zulden IV beterdierenienen - edre mast eilendhor, das es verteilheft ist, die leure Man (e. v. ter die Nolle van aljeder Mange zu nachen.





Eine Schülerin gab mit der Frage, in welcher Beziehung die beiden Mengen A =  $\{1, 4, 7, 10\}$  und B =  $\{1, 5\}$  stehen, den Anstoß zu Betrachtungen über Operationen zwischen zwei Mengen, zunächst also des Durchschnitts. Dabei zeigte sich bei der graphischen Darstellung des Durchschnitts von drei Mengen A, B, C, daß die Schülerinnen zwar sofort A  $\cap$  B  $\cap$  C erkannten, anstelle von A  $\cap$  B jedoch nur A  $\cap$  B A  $\cap$  B  $\cap$  C angaben. Die anschließende Einführung der Vereinigungsmenge zweier Mengen bereitete keine Schwierigkeiten.

In einer abschließenden Klassenarbeit wurde u.a. folgende Aufgabe gestellt:

A enthält 35, B 40, C 24, A  $\cap$  B 12, B  $\cap$  C 4, C  $\cap$  A 3 Elemente, A  $\cap$  B  $\cap$  C 1 Element.

Gefragt war nach der Anzahl der Elemente in A U B U C. Diese Aufgabe wurde von 1/4 der Klasse gelöst.

In U 3 wurden die grundlegenden Begruffe (endliche, unendliche, leere Menge, Teilmenge, Durchschnitt und Vereinigung von Mengen) methodisch ähnlich eingeführt wie in Quinta.

Aus Mengen-Bildern wurden zusätzlich folgende Gesetze erarbeitet:

- 1. Kommutativgesetze:  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$ ,
- 2. Assoziativgesetze:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

sowie die Distributiv-Gesetze:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Die erarbeiteten Grundbegriffe fanden nun ihre Anwendung bei der Lösung von Gleichungen und Ungleichungen.

Dabei sind die Elemente der Menge festgelegt durch die Bedingung, Lösung einer Gleichung zu sein und einer bestimmten Grundmenge anzugehören.

Beispiel:  $M_1 = \{x/x \in Na \land x < 10\}$ .

An weiteren Beispielen wurde dann graphisch und rechnerisch gezeigt, daß sich bei Änderung der Grundmenge die Lösungsmenge ändern kann.





Eise Schülleil, gebenit dur Frage, in wolcher Bezichung die beiden Moner der 1, d, 7, 10 und B = {1, 0} sichen, der Martebran Bettrechte der Chartiele Optimationen zwischen zwei Manger, zusächet also des Dereit mitten, Dabei dur ein bei der graphischen Darstellung den Dereit von drei Monger d, B, C, daß die Schüleringer zwer zehert wilbe der Grantlande zwer zehert wilbe der Grantlande zwer zusächt wilbe der Grantlande zu Vereinzung der Vereinzung der Vereinzung der Vereinzung der verge zweiter in der bereitste keine Schwierigkeiten.

Id bit dy abeddie tuden dinaconorbeit wurde e. e. folgende Aufgab – dateilt:

Antonio marched de la sahi fuelliteme i dimikit iki (C. Diaso Amiro...) Penere e vellife din Chase qui i.

In U.S. wurden die grundkenneden Begruife (endliche, unvadiore, leure Monge, Palimenge, Unrebediniti und Vereinigung von Mangen) methodisch ährlich eing elliet wie in Quieta.

Aus Margon-Bildum wurden zuchtzlich folgunde Gesetze erurbeitet:

- 1. Komendativirgutza: A  $ext{UB}$  =  $ext{B}$   $ext{U}$  A  $ext{U}$  =  $ext{B}$   $ext{U}$  =  $ext{V}$  of  $ext{U}$  =  $ext{U}$  =  $ext{U}$   $ext{U}$  =  $ext{U$ 
  - 1. Specially resulted:  $(A \cup B) \circ C = A \cup (B \cup C)$ ,

sowie die Distributive Contact

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
  
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ 

13h. erarb. itelan irundbagriffa imidas ami ibra Anwendung bei der Döeman von Gillidaung and Vrajbachunga.

Bob. i simi die Elman is der Wenge freigelogt durch die Bedie jung. Less pediene Birdeburg zu nei einer bestimmter Brundaus goar rugeichte.

Bright: 
$$M_{\gamma} = \{x/x \in \mathbb{R}^n : x < 10\}$$
.

and the second stage of the second prophers and real colors guzeigt.

(a) Adores der True in de Jöhnen guden in der Lieuwicht der Jöhnen guden in der Lieuwicht der Jesephinen der Stage in der Stage in der Lieuwicht der Stage in der Stag





Zum Abschluß wurde dann das Gelernte zur Lösung folgender Ungleichungen verwandt:

$$M_2 = \{x/x \in G_{\mathbf{Z}} \land (x+5) \cdot (x-2) > 0\}$$

wurde aufgelöst in

$$M_{21} = \{x/x Gz \land (x+5) > 0\}$$
 $M_{22} = \{x/x Gz \land (x-2) > 0\}$ 
 $M_{23} = \{x/x Gz \land (x+5) < 0\}$ 
 $M_{24} = \{x/x Gz \land (x-2) < 0\}$ 

er zeigt sich dabei, daß

$$(M_{21} \cap M_{22}) \cup (M_{23} \cap M_{24}) = M_{22} \cup M_{24}$$
.

In der abschließenden Diskussion wurde allgemein die Notwendigkeit einer frühen Einführung mengentheoretischer Grundbegriffe anerkannt. Herr Raith regte an, nicht nur Zahlenmengen, sondern auch Mengen zu verwenden, deren Elemente Buchstaben oder sonstige Symbole sind.

(IV.) Zur Ergänzung und Vertiefung der im Herbsttertial erörterten Problemkreise (affine analytische Geometrie) referierte Herr Raith über Probleme, die sich bei der Einführung der Vektorrechnung ergeben. Er gab dabei vor allem eine Einführung in die Möglichkeiten, das alternierende Produkt als Hilfsmittel in der affinen Geometrie zu verwenden.

Zunächst entstand eine lebhafte Diskussion, ob man das Axiomensystem des linearen Vektorraumes "doktrinär" angeben soll, oder ob man sie genetisch motivierend entwickeln sollte.

Eine Fülle von geometrischen Problemen legt die Verwendung von Vektoren nahe, so z.B. beim Tetraeder die Frage nach der eventuellen Existenz des Höhenschnittpunktes oder die Bestimmung des Schwerpunktes.

Eines der Hauptanliegen des Oberstufenunterrichts ist die Behandlung der affinen Abbildungen. Um eine affine Abbildung A zu definieren, genügt es, zu fordern, daß Geraden in Geraden und Parallelen in Parallelen übergehen. Für den zugehörigen Vektorraum bedeutet das:



'Ann Absobluß wurde dann das Gelernte zur Lösung folgender Ungleichungen verwendt:

$$\mathbb{N}_{g} = \{\pi/x \, \hat{\mathfrak{c}} \, \Theta_{\mathbf{Z}} \wedge (\operatorname{ct} \delta) \cdot (\mathbf{x} \text{-} 2) > 0\}$$

mi tedloglub abtum . .

$$M_{21} = (x/x)(2x)(x-5) > 0$$
  
 $M_{22} = (x/x)(2x)(x-5) > 0$   
 $M_{23} = (x/x)(2x)(x-5) > 0$ 

as seigt sich dehelt daß

$$(M_{21} + M_{32}) + (M_{23} + M_{34}) = M_{22} + M_{24}$$

in dour absoluted and the Midussian words allgemein die Notwendigmeit einer früher derführung und uganfasoretischen drumbegriffe auserbande. Harr Raite er ste au, wicht dar Zahlenmengen, wondern auch Venger zu verwanden, deren Blen one Buchstaben oder sonstien Symbole sind.

(IV.) Zur Ergissus ond Vertichung der im Herhaltertich erörterten Frebisch reich (Mint norigitische Geometrus) reforiurie Herr Raith George for blace, die sich bei der Ertführung der Vektor-rechnung argeben, die gan den it vor albert eine Einstührung zu die Möglicherteit. Der albert eine Einstührung zu die Möglicherteit. Der albert ein bei der Affinen Geormetrie an werden.

Number of sufate of the Telephassion, ob man das Axigmensystem des linessen. Vestore auch "febreude" engeben soll, oder ob man sie genetiud motivierend e twictels soll sollies.

Eite Fülle von goometrieden Treblemer legt die Verwendung von Vertoren nahe, do z.B. beie. Deur der die Brage nach der eventueilen brietere des Künenschriftpunktes oder die Bestinamung des Schwerganstes.

because der Farmienlingen des Oberstufsennterrichts ist die Behandlatt, der nicht in Norlidungen, Um eine affire Abbildung A. au definiener, gerügt es, zu fordert, das Geraden in Geraden und Farallele,
in bewallele, übergeben, Für den zugehörigen Veltaers um bedautet
den:





A 
$$(a+b) = A(a) + A(b)$$
  
A  $(\lambda \cdot a) = A(a)$  und hieraus folgend  
A  $(a) = a$ 

Eine Betrachtung der Produktbildungen von zwei Vektoren zeigt, daß sowohl das übliche skalare Produkt a·b wie auch das sogenannte "Vektorprodukt" a×b in der affinen Geometrie keinen Platz haben. Hierfür empfiehlt sich das alternierende Produkt [a,b]. Als motivierender Zugang wird die orientierte Parallelogrammfläche, die von den beiden Vektoren a und b aufgespannt wird, als deren "Produkt" [a,b] aufgefaßt. Es handelt sich aber dabei um eine Abbildung der Vektorpaare aus 2 x 2 in dem zugrundeliegenden Skalarbereich (meist den Körper der realen Zahlen). Es empfiehlt sich, bei der Behandlung dieses "alternierenden Produktes", zunächst einige Eigenschaften, die dieses Produkt besitzen soll, den geometrischen Kenntnissen über den Flächeninhalt zu entnehmen, um dann etwa folgende Auswahl zur axiomatischen Grundlage für diese Produktbildung zu nehmen:

1.) Das Distributivgesetz:

$$[a+b,c] = [a,c] + [b,c]$$
  
 $[a,b+c] = [a,b] + [a,c]$ .

2.) Die Homogenität:

$$[\lambda a, b] = \lambda [a, b]; [a, \mu b] = \mu \cdot [a, b]$$

$$[\alpha,\alpha] = 0$$

$$4.) \qquad [ *_1, \mathcal{V}_2] = 1$$

Als Folgerungen ergeben sich hieraus

b) 
$$[\lambda \alpha, \alpha] = 0$$

c) 
$$[a+\lambda b] = [a,b]+\lambda [b,b] = [a,b]$$

Jeder Vektor des  $\mathbb{Z}^2$  ist als Linearkombination der Basisvektoren  $\gamma_h$  ,  $\gamma_h$  darstellbar. Dann gilt:

$$[r, y] = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot [\gamma_1, \gamma_2] = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}.$$





$$A_{-}(x+y) = A_{-}(y)$$
 and hieranc folgered  $A_{-}(y+y) = A_{-}(y)$ 

Fig. Betracuturg der Produktbildungen von zwei Voktorus geigt, doß sove il das Chilche shalare Frodukt c. h wis auch das inganna The Hosprodukt to x a in der affinen Geometrie keinen Plats haben. He offer typicalt sich das altergroral to Produkt [a,b]. Als as tiviewend v Zagang wird die ariantierte Farchelogrammfläche, die von der beiden Wekenen wand haufgesparen wird, ols deren "I redukt" [a,b] aufgefaüt. Es handelt sich aber debei um eine Abbildung der Vektorpaare and fixed in dem ziggenheldsgenden Skularbereich (moist den Kärger der realer Zahlen). Es empfiehlt sich, bei der B.handlung dieses "albernierender Freduktes", zunächst sinige bligenschaften, die dieses Fredukt besitzen soll, den geometrischen Kenninissen über den Flächerssladt zu altschmaß, um dest stwa folgende Auswehl zur sziomatischen Grundlase für disce Troduktildurg zu :asmuloa

# 1.) Das Distributiv, osein:

## 1.) Die Homogenität:

Als Felgenmagen engages sick hierave

(a) 
$$(a+2,0) = (a,2) + (a,3) = (a,4)$$

Jeder Voiter des 2 ist els Tabensbingtier der Basisvektoren

Damit ist der Zusammenhang zwischen alternierendem Produkt und zweireihigen Determinanten hergestellt, und die Rechenregeln für Determinanten gehen - bis auf die Stürzungsregel - aus denen für das alternierende Produkt hervor.

Aus  $[\lambda \alpha, \alpha] = 0$  folgt, daß das alternierende Produkt zweier linear abhängiger Vektoren verschwindet. Es läßt sich zeigen, daß auch die Umkehrung gilt. Zwei Vektoren sind also genau dann linear abhängig, wenn ihr alternierendes Produkt verschwindet. Geometrisch interpretiert: Sind die beiden Vektoren parallel oder ist einer von ihnen der Nullvektor, so verschwindet der Flächeninhalt und umgekehrt.

Weiterhin läßt sich ein beliebiger Vektor c im  $\mathfrak{T}^2$  als Linearkombination von  $\mathfrak{T}$  und  $\mathfrak{b}$  darstellen

$$c = \frac{[c,b]}{[a,b]} \cdot a + \frac{[a,c]}{[a,b]} \cdot b .$$

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme:

Das homogene System

$$a_1 x + b_1 y = 0$$
  
 $a_2 x + b_2 y = 0$ 

besitzt mit  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  entweder nur das triviale Lösungspaar x = y = 0 ( $[a,b] \neq 0$ ), oder, wenn [a,b] = 0, die Lösungen  $x = b_1$ ,  $y = -a_1$ , sowie jedes Vielfache dieses Lösungspaares.

Im inhomogenen Fall

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
  
 $a_2 x + b_2 y = c_2$ 

ergeben sich die Lösungen:

$$x = \frac{[c,b]}{[a,b]};$$
  $y = \frac{[a,c]}{[a,b]}$ , falls  $[a,b] \neq 0$ .

Untersucht man, wie eine lineare Abbildung A auf das alternierende Produkt wirkt, so zeigt sich, daß im singulären Fall  $[A(r_1), A(r_2)] = 0$  das alternierende Produkt im Bildraum verschwindet, im regulären Fall  $k = [A(r_1), A(r_2)] \neq 0$  dagegen alle alternierenden Produkte mit der gleichen Zahl k multipliziert werden. Geometrisch bedeutet der reguläre Fall, daß die Flächen aller Parallelogramme mit k mul-





Damit in der Zusammerkeng swischen alternierendem Produkt und zweirsinigen Determinanten bergestellt, und die Rechenregeln für Determinanten geben bis auf die Bückungsregel - aus denen für den alternierende Produkt berver.

Aver [1, a, v] = 0 folgs, das des alternierende Produkt zweier lineer ablängiger Vuktoren vurgelwindet. Es läst sich zeisen, das auch die Urekehrung gilt. Zwei Vuktoren sind also genou dann linear abhängig, wollt ihr alternierenden brechtt verschwindet. Geometrisch interparation: Sind die beiden Veltoren parallel oder ist einer vor ihnee der Stellweiter, and verschwindel der Pädelischeit und umgeschut.

visitordir läät sieh ib. buliebiget Välgikke og fi als Linearkombivition vor it und butterelien

$$-d \cdot \frac{[0,0]}{[d,0]} + n \cdot \frac{[d,0]}{[d,n]} = 0$$

emslages to canoni line gratema:

motaya sacgement and

$$0 = x^2q + x^2q$$

$$0 = x^2q + x^2q$$

besite that  $c=(\frac{a_1}{a}-\frac{a_2}{a_3})$  and the destruction of the Lösungen substant  $x=y=-\frac{a_1}{a_3}$  and (c,n)=0, the Lösungen  $x=b_1$ ,  $y=-a_1$ , sowid jets Villfocks discos Lösungepanred.

Im inhomogener Pall

$$\frac{3}{3} = X^{\frac{1}{2}}q + X^{\frac{1}{2}}q$$

$$\frac{1}{3} = X^{\frac{1}{2}}q + X^{\frac{1}{2}}q$$

ergeben and the Distungent

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)$$
;  $x = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)$ ;  $x = x$ 

Interpolation, which the Helman Abbildand A auf das alterniars ads Product wiret, so weight side, dad in abegulären Fall  $(A(x_1),A(x_2))$  and das alterniaration harder in Pall  $(A(x_1),A(x_2))$  and das alterniaration of the Pall  $(A(x_1),A(x_2))$  and dageger also alterniarables broken init der gleich a and a maltipliziert worden. Seen etrisch bedaud der regulär abeit, das als Place a aller Farelander bedaud to der regulär abeit das aller Farelanders auf the cut-





tipliziert werden.

Auch der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C und den Ortsvektoren a, b, c läßt sich mit Hilfe des alternierenden Produktes darstellen:

$$F(A, B, C) = \frac{1}{2} \cdot \{[a,b] + [b,c] + [c,a]\}.$$

Es zeigt sich, daß diese Flächeninhalte translationsinvariant, wie auch gegenüber denjenigen affinen Abbildungen invariant sind, für die k=1 ist.

Anwendungen auf die analytische Geometrie:

Ist a der Ortsvektor eines festen Punktes A und g ein Richtungsvektor, so läßt sich die Gerade darstellen

I)  $c = a + \lambda g$  Beiderseitige alternierende Multiplikation von I) von rechts her liefert:

$$[r - a, g] = 0.$$

II)  $r = a + \mu (b - a)$  Ist die Gerade in der Zweipunkteform gegeben, so liefert alternierende Multiplikation mit b von rechts:

$$[r-a,b-a]=0.$$

Es folgten die Behandlung der "Allgemeinen Geradengleichung" und von Schnittpunktfragen mittels des alternierenden Produktes.





tipliziert werder.

Auch der Flächesbehahr sinbeliebigen Dreiecke mit ihr Eckpunkten A. B. Chund den Stimmeren ist, en läftimich sam Hilfs des altorumierender Fredukt und ihre. Eine Eine Eine in der Generalen in d

Discosipticately, destributed and the translations invertent, with such gegenüber desprise another abbitduages invariant sind, für eid her ist.

ls) <sub>i</sub> den Ortsychtor eines festen hemkten in und glein **Biodi**uren **ktor.** Se light die Gerade darstellen

II) Transition (1990) Ist dis Corado in der Zweipunkteform gegeben, so liefer alterniorende Multiplikation mit Voer debteit.

Est folgtonder (A.) addung der "Allgerweiten Geradengbrichtig" und von Scheitsparstüber mittelt des eiterwierender die Autobe.



