Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Arbeitstagung des Mathematischen Seminars für Studienreferendare unter Leitung von Gym. Prof. F. Raith

vom 5. bis 7. Februar 1966

Unter der Leitung von Gymnasialprofessor Fritz Raith trafen sich Anfang Februar die Studienreferendare (Fachrichtung Mathematik) des Freiburger Seminars zu einer Aussprache über Fragen der mathematischen Didaktik im Gymnasialunterricht.

Vier Referate wurden gehalten und anschließend diskutiert:

1) Dr. G. Augustin: " Zahlentheoretische Probleme im Schulunterricht",
2) Dr. G. Augustin: "Teilbarkeit und eindeutige Primfaktorzerlegung" sowie "Bemerkungen zur Verteilung der Primzahlen",
3) Frl. U. Schulze: "Einführung einiger Begriffe der Mengenlehre im traditionellen Unter- und Mittelstufenunterricht",
4) Gym. Prof. F. Raith: "Zur Einführung der Vektorrechnung" (?)

Teilnehmer:

1. Augustin, Dr.G.
2. Burkhard, Dr. A.
3. Doll, W.
4. Feger, F.
5. Henninger, F.
6. Hübler, D.
7. Krais, J.
8. Kramer, H.
9. Langer, R.
10. Martin, D.
11. Rohrbacher, H.
12. Raith, F., Gym. Prof.
13. Schölzel, H.
14. Schulze, U.
15. Siebert, A.
16. Siegel, H.
17. Stepping,
18. Storch, P.
19. Unmüßig, B.
20. Walter, F.
21. Weidenbach, W.

(I) Die Tagung wurde mit einem Referat über "Zahlentheoretische Probleme im Schulunterricht" von Herrn Augustin eröffnet. Der erste Teil beschäftigte sich damit, wie man die "Transzendenten Zahlen" in Mittel- und Oberstufe behandeln könnte. Der Schüler sollte mit dem

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

T a g u n g s b e r i c h t

Arbeitstagung des Mathematischen Seminars für Studienreferendare unter Leitung von Gym. Prof. F. Raith

vom 2. bis 4. Februar 1956

Unter der Leitung von Gymnasialprofessor Fritz Raith trafen sich Anfang Februar die Studienreferendare (Fachrichtung Mathematik) des Freiburger Seminars zu einer Aussprache über Fragen der mathematischen Didaktik im Gymnasialunterricht.

Vier Referate wurden gehalten und anschließend diskutiert:

1) Dr. G. Augustin: "Zahlentheoretische Probleme im Schulunterricht",
2) Dr. G. Augustin: "Teilbarkeit und eindeutige Primfaktorzerlegung" sowie "Bemerkungen zur Verteilung der Primzahlen",
3) Frl. U. Schulze: "Einführung einiger Begriffe der Mengenlehre im traditionellen Unter- und Mittelstufenunterricht",
4) Gym. Prof. F. Raith: "Zur Einführung der Vektorrechnung" (?)

Teilnehmer:

1. Augustin, Dr. G.	12. Raith, F., Gym. Prof.
2. Burkhard, Dr. A.	13. Schölzel, H.
3. Dell, W.	14. Schulze, U.
4. Fa[illegible], H.	15. Seybert, A.
5. Hengleyn, M.	16. Siegel, U.
6. Hübsch, D.	17. Stepping.
7. Kraus, A.	18. Storm.
8. Kummer, U.	19. Umbach, R.
9. Langer, G.	20. Walter, F.
10. Martin, H.	21. Wendelbach, A.
11. Neuhäuser, H.	

(1) Die Tagung wurde mit einem Referat über "Zahlentheoretische Probleme im Schulunterricht" von Herrn Augustin eröffnet. Der erste Teil beschäftigte sich damit, wie man die "T r a n s z e n d e n t e n Z a h l e n" in Mittel- und Oberstufe behandeln könnte. Der Schüler sollte mit dem

Begriff der transzendenten Zahl vertraut gemacht werden, bevor von π und e geredet wird. Die Reihenfolge bei der Behandlung transzendenter Zahlen könnte folgende sein:

1.) Definition der algebraischen und transzendenten Zahl.

Eine Zahl heißt algebraisch vom Grade n, wenn sie Lösung der Gleichung $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = 0$ $(a_n \neq 0,\ a_\nu$ ganzrational) ist. Jede nicht algebraische Zahl heißt transzendent.

2.) Nachweis der Existenz transzendenter Zahlen, ohne ein Exemplar anzugeben. Dazu beweist man zunächst den Satz: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar. Mit Hilfe des 2. Cantorschen Diagonalverfahrens erhält man: Die Menge $M = \{x \mid \nu < x \leq 1\}$ ist nicht abzählbar. Daraus folgt die Existenz transzendenter Zahlen. (Cantorscher Beweis).

3.) Angabe einer als transzendent erkannten Zahl.

Um transzendente Zahlen zu konstruieren, macht man eine Aussage über die Approximierbarkeit einer algebraischen Zahl durch rationale. Das erste Ergebnis in dieser Hinsicht erzielte Liouville, der den Satz bewies: Für jede algebraische Zahl α vom Grade $n > 1$ existiert eine von α abhängige Konstante $c > 0$, so daß für alle ganzrationalen Zahlen P, Q mit $Q > 0$ gilt

$$\left| \alpha - \frac{P}{Q} \right| > \frac{c}{Q^n} .$$

(Zum Beweis vergleiche Hardy-Wight: Zahlentheorie, Oldenburg-Verlag).

Der Satz von Liouville wird herangezogen, um die Transzendenz der Zahl

$$a = \sum_{\nu=1}^{\infty} 10^{-\nu!} = 0{,}11000100\ldots$$

nachzuweisen. Angenommen die Zahl a ist algebraisch vom Grade $\leq N$; sei $n > N$ und

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{n} 10^{-\nu!} = \frac{P}{10^{n!}} = \frac{P}{Q} \quad (P \text{ ganzrational, } Q = 10^{n!}).$$

Dann ist

$$0 < a - \frac{P}{Q} = a - a_n$$

$$a - a_n = \sum_{\nu = n+1}^{\infty} 10^{-\nu!} < 2 \cdot 10^{-(n+1)!} = 2 \cdot (10^{-n!})^{n+1}$$

$$a - a_n < 2 \cdot Q^{-(n+1)} < 2 \cdot Q^{-N},$$

also ist a nach dem Satz von Liouville keine algebraische Zahl vom Grade $\leq N$ und da N beliebig gewählt war, ist a transzendent.

4.) Das schwierigste Problem, nämlich die Frage ob eine v o r g e l e g t e Z a h l transzendent ist oder nicht, scheint im normalen Schulunterricht nur selten angreifbar zu sein. Doch hielt es der Vortragende durchaus für möglich, in Arbeitsgemeinschaften und guten Klassen den Hermiteschen Beweis für die Transzendenz von e durchzuführen. Der Beweis beruht auf der folgenden, von Hermite angegegenen Integralformel: Sei $g(x)$ ein Polynom vom Grade N; durch partielle Integration findet man

$$(*) \qquad e^{\alpha} \int_0^{\alpha} g(x) \cdot e^{-x} dx = -G(\alpha) + G(0) \cdot e^{\alpha} \quad \text{mit } G(x) = \sum_{\nu=0}^{N} g^{(\nu)}(x).$$

Die weitere, auf der Integralformel fußende Beweisidee ist folgende: Angenommen e ist algebraisch vom Grade n (der Beweis ist notwendig ein Widerspruchsbeweis!), dann gibt es ganzrationale Zahlen a_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ mit

$$(**) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot e^{\nu} = 0 \qquad (a_n > 0).$$

Miltipliziert man (*) nacheinander mit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und addiert die erhaltenen Gleichungen, so wird

$$G(0) \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot e^{\nu} - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, G(\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, e^{\nu} \int_0^{\nu} g(x) \cdot e^{-x} dx.$$

Mit (**) folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot G(\nu) = - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot e^{\nu} \int_0^{\nu} g(x) \cdot e^{-x} dx.$$

Man schätzt nun die rechte und linke Seite dieser Gleichung getrennt ab und erhält einen Widerspruch. Also ist die Annahme (**) falsch, d.h. e ist transzendent. Bei der Durchführung der Rechnung kommt es darauf an, das Polynom $g(x)$ geschickt zu wählen. (Zur Durchführung des Beweises vgl. etwa Ostrowski:

Vorlesungen über Diff. - und Integralrechnung Bd. III).

In der Diskussion wurde auf die didaktischen Schwierigkeiten beim Beweis des Liouvilleschen Satzes und des Hermiteschen Transzendenzbeweises für e hingewiesen. Man war sich einig, daß der im Referat vorgezeichnete Weg höchstens in einer Arbeitsgemeinschaft einen pädagogischen Erfolg haben wird.

(II) Als Ergänzung zum Unterstufen-Unterricht waren die Ausführungen über "Teilbarkeit und eindeutige Primfaktorzerlegung", sowie die "Bemerkungen zur Verteilung der Prinzahlen" gedacht.

Ist in einem Integritätsbereich I (nullteilerfreier, kommutativer Ring) die Gleichung

$$a \cdot x = b \quad \text{mit} \quad x \in I$$

lösbar, so heißt a Teiler von b, geschrieben a/b. Zwei Elemente a, $b \in I$ heißen invers, wenn $a \cdot b = 1$ ist. Alle Elemente, die ein Inverses besitzen, heißen Einheiten. Die Einheiten sind Teiler jedes Elementes von I. Elemente, die durch Multiplikation mit einer Einheit auseinander hervorgehen, nennt man assoziiert. Ein Element, das keine Einheit ist und nur durch sich selbst, durch Einheiten und assoziierte Elemente teilbar ist, heißt Primelement.

Diese Begriffe werden im Folgenden nur für den Integritätsbereich der ganzen Zahlen I_0 benötigt. Einheiten sind ± 1, assoziiertes Element zu a ist a und -a, Primelemente sind die Primzahlen. Bei der Untersuchung von Teilbarkeitsfragen in I_0 genügt es, sich auf positive Teiler zu beschränken.

Der Fundamentalsatz der Arithmetik:
Jede natürliche Zahl $n > 1$ läßt sich als Produkt von Primzahlen darstellen und zwar, wenn man von der Reihenfolge absieht, auf nur eine Weise.
Zum Beweis benötigt man

1.) den g.g.T zweier Zahlen: Die Zahl $d = (a_1, a_2)$ heißt g.g.T von a_1 und a_2, wenn gilt d/a_1, d/a_2 und $x/a_1 \wedge x/a_2 \rightarrow x/d$.
Zur Bestimmung des g.g.T dient der Euklidische Algorithmus.

2.) Hilfssatz 1: Sei $a_1, a_2 \in I_0$. Dann ist die diophantische Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = d$$

in ganzen Zahlen $x_1, x_2 \in I_0$ lösbar.

3.) Hilfssatz 2: (Erster Satz von Euklid). Ist das Produkt $\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu$ durch eine Primzahl P teilbar, so ist wenigstens einer der Faktoren durch P teilbar.

Ist n eine Primzahl, dann gilt der Fundamentalsatz. Sonst wendet man vollständige Induktion an. Für $n = 4$ gilt die eindeutige Primfaktorenzerlegung. Für $m < n$ sei die eindeutige Primfaktorenzerlegung bewiesen. Ist n keine Primzahl, so folgt aus der echten Zerlegung $n = a \cdot b$ die endlicht Primfaktorenzerlegung von n, etwa $n = \prod_{\nu=1}^{N} P_\nu$. Die Eindeutigkeit beweist man mittels HS 2, indem man die zweite Zerlesung $n = \prod_{\mu=1}^{n} q_\mu$ annimmt und zum Widerspruch führt. -

Als Beispiel für einen Integritätsbereich, in dem **keine** eindeutige Primfaktorzerlegung gilt, wurde der Integritätsbereich mit den Elementen $a + i \cdot b \cdot \sqrt{5}$ angegeben. Primelemente sind $2, 3, 1 + i\sqrt{5}$, $1 - i\sqrt{5}$, aber es gilt $2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5})$.

Nur als kleine Bemerkung war das folgende über Primzahlen Gesagte gedacht:

1. Es gibt der Primzahlen mehr, als jede vorgelegte Zahl. (Euklid)
2. Das Sieb des Erathostenes kann mit Erfolg schon in der Sexta zur Bestimmung der Primzahlen $\leq N$ herangezogen werden.
3. Eine allgemeine Formel für die n-te Primzahl existiert nicht. Das von Euler angegebene Polynom $f(x) = x^2 + x + 41$ liefert zwar für $x = 1, 2, \ldots, 39$ Primzahlen, aber fortlaufend keine weiteren.
4. Es gibt beliebig lange Abschnitte in der Reihe der natürlichen Zahlen, die keine Primzahlen enthalten, nämlich z.B.

   $$n! + 2,\ n! + 3,\ \ldots,\ n! + n.$$
5. Als Primzahlzwillinge bezeichnet man 2 Primzahlen, deren Differenz 2 ist. Es ist eine offene Frage, ob die Anzahl der Primzahlzwillinge endlich ist. Beispiele: (5, 7); (11, 13); (17, 19).
6. Man interessiert sich dafür, wieviele Primzahlen $\leq N$ existieren.

2.) Hilfssatz 2: [illegible] r_n. Dann ist die diophantische Gleichung

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = \text{[illegible]}$$

in ganzen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ [illegible] lösbar.

3.) Hilfssatz 3: (Grosser Satz von Euklid). Ist das Produkt $\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu$ durch die Primzahl [illegible] teilbar, so ist wenigstens einer der Faktoren [illegible] teilbar.

Ist n eine Primzahl, dann gilt der Fundamentalsatz. Sonst wendet man vollständige Induktion an. Für n = 4 gilt die eindeutige Primfaktorenzerlegung. Für [illegible] ist die eindeutige Primfaktorenzerlegung bewiesen. Ist n keine Primzahl, so folgt aus der [illegible] Zerlegung n = a · b die endliche [illegible] Primfaktorenzerlegung von n, etwa $n = \prod_{\nu=1}^{N} p_\nu$. Die Eindeutigkeit [illegible] Hilfssatz 3. [illegible] die zweite Zerlegung $n = \prod_{\mu=1} q_\mu$ [illegible] ist und zum Widerspruch [illegible]. -

Als Beispiel für einen Integritätsbereich, in dem keine eindeutige Primfaktorenzerlegung gilt, wurde der Integritätsbereich mit den Elementen $a + i \cdot b \cdot \sqrt{5}$ angegeben. [illegible] sind 2, 3, $1 + i\sqrt{5}$, $1 - i\sqrt{5}$, aber es gilt $2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5})$.

Nur als [illegible] wurde das folgende über Primzahlen Gesagte gebracht:

1. Es gibt der Primzahlen mehr, als jede vorgelegte Zahl. (Euklid)
2. Das [illegible] mit Erfolg schon in der Schrift zum [illegible] herangezogen werden.
3. [illegible] Primzahl existiert nicht. [illegible] $= x^2 + x + 41$ liefert zwar für $x = 1, \dots, 39$ [illegible] keine weiteren.
4. Es gibt beliebig [illegible] in der Folge der natürlichen Zahlen [illegible] z.B.
$$n! + 2,\ n! + 3,\ \dots,\ n! + n.$$
5. Als Primzahlzwillinge [illegible] Primzahlen, deren Differenz 2 ist. Es ist eine offene Frage, ob die Anzahl der Primzahlzwillinge [illegible]: (5, 7); (11, 13); (17, 19).
6. [illegible] gesetzt sich [illegible], wieviele Primzahlen [illegible] existieren.

Sei $\pi(N) = \sum_{P \leq N} 1.$

Gauß vermutete, Hadamard und de la Vallé-Poussin beweisen

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\log N} \qquad \text{(Primzahlsatz).}$$

7. Jede genügendgroße ungerade Zahl läßt sich als Summe von 3 Primzahlen darstellen (Vinogradoff 1938). Noch unbewiesen ist die Goldbachsche Vermutung: Jede gerade Zahl läßt sich als Summe von 2 Primzahlen darstellen.

(III.) Im weiteren Verlauf der Tagung referierte Fräulein Ulrike Schulze über die "Einführung einiger Begriffe der Mengenlehre im traditionellen Unter- und Mittelstufen-Unterricht". Sie zeigte im Verlauf ihres Referates die Möglichkeiten für eine Behandlung mengentheoretischer Grundbegriffe in einer Quinta und einer Untertertia.

Als ein wesentliches Ziel in Unter- und Mittelstufe ist zunächst das Begreifen von strukturierten Mengen erwünscht. Dabei war das Unterrichtsziel, das sich Frl. Schulze in Quinta gesteckt hatte, Operationen zwischen Durchschnitt und Vereinigung von Mengen einzuführen. Die einzelnen didaktischen Schritte waren: endliche, unendliche, leere Menge, Gleichheit von Mengen, echte, uneigentliche, elementfremde Teilmengen.

Es zeigte sich, daß die Quintanerinnen spontan zahlreiche Beispiele von Mengen mit Elementen des täglichen Lebens zu nennen wußten, und daß auch die Einführung einer symbolischen Schreibweise keine Schwierigkeiten bereitete. Auch die Einführung von endlichen Zahl-Mengen verlief reibungslos.

An einfachen Beispielen wurde dann definiert: endliche, unendliche, leere, gleiche Mengen. Anhand von Venn-Diagrammen wurde Teilmenge, uneigentliche und leere Teilmenge eingeführt.

Interessant war dabei, daß die Quintanerinnen - im Gegensatz zu den Untertertianerinnen - sehr rasch einsahen, daß es vorteilhaft ist, die leere Menge unter die Teilmengen jeder Menge zu rechnen.

Sei $\pi(N) = \sum_{p \leq N} 1$.

Gauß vermutete, Hadamard und de la Vallé-Poussin bewiesen

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\log N} \quad \text{(Primzahlsatz).}$$

7. Jede genügend große ungerade Zahl läßt sich als Summe von 3 Primzahlen darstellen (Vinogradoff 1936). Noch unbewiesen ist die Goldbachsche Vermutung: Jede gerade Zahl läßt sich als Summe von 2 Primzahlen darstellen.

(III.) Im weiteren Verlauf der Tagung referierte Fräulein Ulrike Schulze über die Einführung einiger Begriffe der Mengenlehre im traditionellen Unter- und Mittelstufen-Unterricht. Sie zeigte im Verlauf ihres Referates die Möglichkeit für eine Behandlung mengentheoretischer Grundbegriffe in einer Quinta und einer Untertertia.

Als ein wesentliches Ziel in Unter- und Mittelstufe ist zunächst das Begreifen von strukturierten Mengen erwünscht. Dabei war das Unterrichtsziel, das sich Frl. Schulze in Quinta gesteckt hatte, Operationen zwischen Durchschnitt und Vereinigung von Mengen einzuführen. Die einzelnen didaktischen Schritte waren: endliche, unendliche, leere Menge, Gleichheit von Mengen, echte, uneigentliche, elementfremde Teilmengen.

Es zeigte sich, daß die Kinder [illegible] spontan zahlreiche Beispiele von Mengen mit Elementen des täglichen Lebens zu nennen wußten, und daß auch die Einführung einer symbolischen Schreibweise keine Schwierigkeiten bereitete. Auch die Einführung von endlichen Zahlmengen verlief reibungslos.

An einfachen Beispielen wurde dann definiert: endliche, unendliche, leere, gleiche [illegible]. Anhand von Venn-Diagrammen wurde Teilmenge, uneigentliche und leere Teilmenge eingeführt.

Interessant war dabei, daß die [illegible] – im Gegensatz zu den [illegible] – [illegible], daß es vorteilhaft ist, die leere Menge [illegible] jeder Menge zu rechnen.

Eine Schülerin gab mit der Frage, in welcher Beziehung die beiden Mengen $A = \{1, 4, 7, 10\}$ und $B = \{1, 5\}$ stehen, den Anstoß zu Betrachtungen über Operationen zwischen zwei Mengen, zunächst also des Durchschnitts. Dabei zeigte sich bei der graphischen Darstellung des Durchschnitts von drei Mengen A, B, C, daß die Schülerinnen zwar sofort $A \cap B \cap C$ erkannten, anstelle von $A \cap B$ jedoch nur $A \cap B$ · $A \cap B \cap C$ angaben. Die anschließende Einführung der Vereinigungsmenge zweier Mengen bereitete keine Schwierigkeiten.

In einer abschließenden Klassenarbeit wurde u.a. folgende Aufgabe gestellt:

> A enthält 35, B 40, C 24, $A \cap B$ 12,
> $B \cap C$ 4, $C \cap A$ 3 Elemente, $A \cap B \cap C$ 1 Element.

Gefragt war nach der Anzahl der Elemente in $A \cup B \cup C$. Diese Aufgabe wurde von 1/4 der Klasse gelöst.

In U 3 wurden die grundlegenden Begruffe (endliche, unendliche, leere Menge, Teilmenge, Durchschnitt und Vereinigung von Mengen) methodisch ähnlich eingeführt wie in Quinta.

Aus Mengen-Bildern wurden zusätzlich folgende Gesetze erarbeitet:

1. Kommutativgesetze: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
2. Assoziativgesetze: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

sowie die Distributiv-Gesetze:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Die erarbeiteten Grundbegriffe fanden nun ihre Anwendung bei der Lösung von Gleichungen und Ungleichungen.

Dabei sind die Elemente der Menge festgelegt durch die Bedingung, Lösung einer Gleichung zu sein und einer bestimmten Grundmenge anzugehören.

Beispiel: $M_1 = \{x / x \in Na \wedge x < 10\}$.

An weiteren Beispielen wurde dann graphisch und rechnerisch gezeigt, daß sich bei Änderung der Grundmenge die Lösungsmenge ändern kann.

Eine Schülerin gab mit der Frage, in welcher Beziehung die beiden Mengen $A = \{1, 4, 7, 10\}$ und $B = \{1, 5\}$ stehen, den Anstoß zum Betrachten der Operationen zwischen zwei Mengen, zunächst also des Durchschnitts. Dabei [illegible] bei der graphischen Darstellung des Durchschnitts von drei Mengen A, B, C, daß die Schülerinnen zwar sofort [illegible] erkannten, zunächst von $A \cap B$ jedoch nur $A \cap B \cap C$ angaben. Die anschließende Einführung der Vereinigung zweier Mengen bereitete keine Schwierigkeiten.

In einer der nächsten Unterrichtsstunden wurde u. a. folgende Aufgabe gestellt:

A enthält 56, B 42, C 24, [illegible] 13,
[illegible] 5, [illegible] A 8 Elemente, [illegible] B [illegible] C 1 Element.

[illegible] nach der Anzahl der Elemente [illegible] $A \cup B \cup C$. Diese Aufgabe [illegible] von 1/[illegible] der Klasse gelöst.

In U II wurden die grundlegenden Begriffe (endliche, unendliche, leere Menge, Teilmenge, Durchschnitt und Vereinigung von Mengen) methodisch ähnlich eingeführt wie in Quinta.

Am Mengen-Bild wurden zusätzlich folgende Gesetze erarbeitet:

1. Kommutativgesetz: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
2. Assoziativgesetz: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

sowie die Distributiv-Gesetze:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Die erarbeiteten Grundbegriffe fanden nun ihre Anwendung bei der Lösung von Gleichungen und Ungleichungen.

Dabei sind die Elemente der Menge festgelegt durch die Bedingung, Lösung der Gleichung zu sein und einer bestimmten Grundmenge anzugehören.

Beispiel: $M_1 = \{x / x \in N, x < 10\}$.

An weiteren Beispielen wurde dann graphisch und rechnerisch gezeigt, daß sich bei Änderung der Grundmenge die Lösungsmenge [illegible] ändern kann.

Zum Abschluß wurde dann das Gelernte zur Lösung folgender Ungleichungen verwandt:

$$M_2 = \{ x / x \in Gz \wedge (x+5) \cdot (x-2) > 0 \}$$

wurde aufgelöst in

$$M_{21} = \{ x / x \ Gz \wedge (x+5) > 0 \}$$
$$M_{22} = \{ x / x \ Gz \wedge (x-2) > 0 \}$$
$$M_{23} = \{ x / x \ Gz \wedge (x+5) < 0 \}$$
$$M_{24} = \{ x / x \ Gz \wedge (x-2) < 0 \}$$

er zeigt sich dabei, daß

$$(M_{21} \cap M_{22}) \cup (M_{23} \cap M_{24}) = M_{22} \cup M_{24} .$$

In der abschließenden Diskussion wurde allgemein die Notwendigkeit einer frühen Einführung mengentheoretischer Grundbegriffe anerkannt. Herr Raith regte an, nicht nur Zahlenmengen, sondern auch Mengen zu verwenden, deren Elemente Buchstaben oder sonstige Symbole sind.

(IV.) Zur Ergänzung und Vertiefung der im Herbsttertial erörterten Problemkreise (affine analytische Geometrie) referierte Herr Raith über Probleme, die sich bei der Einführung der Vektorrechnung ergeben. Er gab dabei vor allem eine Einführung in die Möglichkeiten, das alternierende Produkt als Hilfsmittel in der affinen Geometrie zu verwenden.

Zunächst entstand eine lebhafte Diskussion, ob man das Axiomensystem des linearen Vektorraumes "doktrinär" angeben soll, oder ob man sie genetisch motivierend entwickeln sollte.

Eine Fülle von geometrischen Problemen legt die Verwendung von Vektoren nahe, so z.B. beim Tetraeder die Frage nach der eventuellen Existenz des Höhenschnittpunktes oder die Bestimmung des Schwerpunktes.

Eines der Hauptanliegen des Oberstufenunterrichts ist die Behandlung der affinen Abbildungen. Um eine affine Abbildung A zu definieren, genügt es, zu fordern, daß Geraden in Geraden und Parallelen in Parallelen übergehen. Für den zugehörigen Vektorraum bedeutet das:

$$A\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = A(\mathfrak{a}) + A(\mathfrak{b})$$
$$A\,(\lambda\cdot\mathfrak{a}) = A(\mathfrak{a}) \quad \text{und hieraus folgend}$$
$$A\,(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$$

Eine Betrachtung der Produktbildungen von zwei Vektoren zeigt, daß sowohl das übliche skalare Produkt $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ wie auch das sogenannte "Vektorprodukt" $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ in der affinen Geometrie keinen Platz haben. Hierfür empfiehlt sich das alternierende Produkt $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$. Als motivierender Zugang wird die orientierte Parallelogrammfläche, die von den beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannt wird, als deren "Produkt" $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ aufgefaßt. Es handelt sich aber dabei um eine Abbildung der Vektorpaare aus $\mathfrak{B}^2\times\mathfrak{B}^2$ in dem zugrundeliegenden Skalarbereich (meist den Körper der realen Zahlen). Es empfiehlt sich, bei der Behandlung dieses "alternierenden Produktes", zunächst einige Eigenschaften, die dieses Produkt besitzen soll, den geometrischen Kenntnissen über den Flächeninhalt zu entnehmen, um dann etwa folgende Auswahl zur axiomatischen Grundlage für diese Produktbildung zu nehmen:

1.) Das Distributivgesetz:

$$[\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}] = [\mathfrak{a},\mathfrak{c}] + [\mathfrak{b},\mathfrak{c}]$$
$$[\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\mathfrak{c}] = [\mathfrak{a},\mathfrak{b}] + [\mathfrak{a},\mathfrak{c}]\,.$$

2.) Die Homogenität:

$$[\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}] = \lambda[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\,;\ [\mathfrak{a},\mu\mathfrak{b}] = \mu\cdot[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$$

3.) $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = 0$

4.) $[\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2] = 1$

Als Folgerungen ergeben sich hieraus

a) $[\mathfrak{b},\mathfrak{a}] = -[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ (Beispiel für ein nicht kommutatives Produkt!)

b) $[\lambda\,\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = 0$

c) $[\mathfrak{a}+\lambda\,\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a},\mathfrak{b}]+\lambda[\mathfrak{b},\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$

Jeder Vektor des $\mathfrak{B}^2$ ist als Linearkombination der Basisvektoren $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ darstellbar. Dann gilt:

$$[\mathfrak{x},\mathfrak{y}] = (x_1y_2 - x_2y_1)\cdot[\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2] = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$A(b) - (-)A = (1 + \ldots) A$$

$$A(a) = (a \cdot \ldots) A \quad \text{und hieraus folgend}$$

$$A(a) = 0$$

Die Betrachtung der Produktbildungen von zwei Vektoren zeigt, daß sowohl das übliche skalare Produkt $a \cdot b$ wie auch das sogenannte Vektorprodukt $a \times b$ in der affinen Geometrie keinen Platz haben. Hier ergibt sich dann das alternierende Produkt $[a, b]$. Zur Veranschaulichung wird die orientierte Parallelogrammfläche, die von den beiden Vektoren a und b aufgespannt wird, als deren "Produkt" aufgefaßt. Es handelt sich aber dabei um eine Abbildung der Vektorpaare aus E^2 in den zugrundeliegenden Skalarbereich (meist den Körper der reellen Zahlen). Es empfiehlt sich, bei der Behandlung dieses "alternierenden Produktes", zunächst einige Eigenschaften, die dieses Produkt besitzen soll, den geometrischen Kenntnissen über den Flächeninhalt zu entnehmen, um dann etwa folgende Auswahl zur axiomatischen Grundlage für diese Produktbildung zu nehmen:

1.) Das Distributivgesetz:

$$[a+b, c] = [a,c] + [b,c]$$
$$[a, b+c] = [a,b] + [a,c].$$

2.) Die Homogenität:

$$[\lambda a, b] = \lambda [a,b] = [a, \lambda b]$$

3.) $[a,a] = 0$

4.) $[e_1, e_2] = 1$

Als Folgerungen ergeben sich hieraus:

a) $[b,a] = -[a,b]$ (Beispiel für ein nicht kommutatives Produkt!)

b) $[a, \lambda a] = 0$

c) $[a + \lambda b, b] = [a,b] + \lambda [b,b] = [a,b]$

Jeder Vektor des E^2 ist als Linearkombination der Basisvektoren e_1, e_2 darstellbar. Dann gilt:

$$[a,b] = (x_1 y_2 - x_2 y_1)[e_1, e_2] = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen alternierendem Produkt und zweireihigen Determinanten hergestellt, und die Rechenregeln für Determinanten gehen - bis auf die Stürzungsregel - aus denen für das alternierende Produkt hervor.

Aus $[\lambda\,\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = 0$ folgt, daß das alternierende Produkt zweier linear abhängiger Vektoren verschwindet. Es läßt sich zeigen, daß auch die Umkehrung gilt. Zwei Vektoren sind also genau dann linear abhängig, wenn ihr alternierendes Produkt verschwindet. Geometrisch interpretiert: Sind die beiden Vektoren parallel oder ist einer von ihnen der Nullvektor, so verschwindet der Flächeninhalt und umgekehrt.

Weiterhin läßt sich ein beliebiger Vektor $\mathfrak{c}$ im $\mathfrak{V}^2$ als Linearkombination von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ darstellen

$$\mathfrak{c} = \frac{[\mathfrak{c},\mathfrak{b}]}{[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]}\cdot\mathfrak{a} + \frac{[\mathfrak{a},\mathfrak{c}]}{[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]}\cdot\mathfrak{b}\,.$$

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme:

Das homogene System

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= 0 \\ a_2 x + b_2 y &= 0 \end{aligned}$$

besitzt mit $\mathfrak{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und $\mathfrak{b} = \binom{b_1}{b_2}$ entweder nur das triviale Lösungspaar $x = y = 0$ ($[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \neq 0$), oder, wenn $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] = 0$, die Lösungen $x = b_1$, $y = -a_1$, sowie jedes Vielfache dieses Lösungspaares.

Im inhomogenen Fall

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

ergeben sich die Lösungen:

$$x = \frac{[\mathfrak{c},\mathfrak{b}]}{[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]}\,; \qquad y = \frac{[\mathfrak{a},\mathfrak{c}]}{[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]}\,, \quad \text{falls } [\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \neq 0.$$

Untersucht man, wie eine lineare Abbildung A auf das alternierende Produkt wirkt, so zeigt sich, daß im singulären Fall $[A(\mathfrak{r}_1), A(\mathfrak{r}_2)] = 0$ das alternierende Produkt im Bildraum verschwindet, im regulären Fall $k = [A(\mathfrak{r}_1), A(\mathfrak{r}_2)] \neq 0$ dagegen alle alternierenden Produkte mit der gleichen Zahl k multipliziert werden. Geometrisch bedeutet der reguläre Fall, daß die Flächen aller Parallelogramme mit k mul-

Damit ist der Zusammenhang zwischen alternierendem Produkt und zweireihigen Determinanten hergestellt, und die Rechenregeln für Determinanten gehen - bis auf die [illegible] - aus denen für das alternierende Produkt hervor.

Aus $[a,a] = 0$ folgt, daß das alternierende Produkt zweier linear abhängiger Vektoren verschwindet. Es läßt sich zeigen, daß auch die Umkehrung gilt. Zwei Vektoren sind also genau dann linear abhängig, wenn ihr alternierendes Produkt verschwindet. Geometrisch interpretiert: Sind die beiden Vektoren parallel oder ist einer von ihnen der Nullvektor, so verschwindet der Flächeninhalt und umgekehrt.

Weiterhin läßt sich ein beliebiger Vektor c als Linearkombination von a und b darstellen:

$$c = \frac{[c,b]}{[a,b]} \cdot a + \frac{[a,c]}{[a,b]} \cdot b .$$

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme:

Das homogene System

$$a_1 x + b_1 y = 0$$
$$a_2 x + b_2 y = 0$$

besitzt mit $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ entweder nur die triviale Lösung $x = y = 0$, falls $[a,b] \neq 0$, oder, wenn $[a,b] = 0$, die Lösungen $x = b_1$, $y = -a_1$, sowie jedes Vielfache dieses Lösungspaares.

Im inhomogenen Fall

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

ergeben sich die Lösungen:

$$x = \frac{[c,b]}{[a,b]}; \quad y = \frac{[a,c]}{[a,b]}, \quad \text{falls } [a,b] \neq 0 .$$

Untersucht man, wie sich [illegible] Abbildung A auf das alternierende Produkt wirkt, so zeigt sich, daß im singulären Fall $[A(r_1), A(r_2)] = 0$ das alternierende Produkt [illegible] im Flächenraum verschwindet, im regulären Fall $[A(r_1), A(r_2)] \neq 0$ dagegen alle alternierenden Produkte mit dem gleichen [illegible] multipliziert werden. Geometrisch bedeutet der reguläre Fall, daß der [illegible] aller Parallelogramme mit k mul-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

tipliziert werden.

Auch der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C und den Ortsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, c läßt sich mit Hilfe des alternierenden Produktes darstellen:

$$F(A, B, C) = \frac{1}{2} \cdot \{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}, c] + [c, \mathfrak{a}]\}.$$

Es zeigt sich, daß diese Flächeninhalte translationsinvariant, wie auch gegenüber denjenigen affinen Abbildungen invariant sind, für die $k = 1$ ist.

A n w e n d u n g e n   a u f   d i e   a n a l y t i s c h e   G e o m e t r i e :

Ist $\mathfrak{a}$ der Ortsvektor eines festen Punktes A und $\mathfrak{g}$ ein Richtungsvektor, so läßt sich die Gerade darstellen

I) $c = \mathfrak{a} + \lambda \mathfrak{g}$ Beiderseitige alternierende Multiplikation von I) von rechts her liefert:

$$[\mathfrak{r} - \mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = 0.$$

II) $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mu(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$ Ist die Gerade in der Zweipunkteform gegeben, so liefert alternierende Multiplikation mit $\mathfrak{b}$ von rechts:

$$[\mathfrak{r} - \mathfrak{a}, \mathfrak{b} - \mathfrak{a}] = 0.$$

Es folgten die Behandlung der "Allgemeinen Geradengleichung" und von Schnittpunktfragen mittels des alternierenden Produktes.