Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Ringe und Moduln

27. Febr. bis 5. März 66

Unter der Leitung der Herren Professoren Dr. R. Baer und Dr. F. Kasch fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach erstmals eine Tagung über Ringe und Moduln statt. Die Teilnahme an dieser Tagung übertraf alle Erwartungen. Besonders erfreulich ist zu verzeichnen, daß auch aus dem außereuropäischen Ausland namhafte Spezialisten nach Oberwolfach gekommen waren. So waren die Diskussionen auch entsprechend lebhaft, interessant und anregend. Weit über das schon ungewöhnlich umfangreiche Vortragsprogramm reichten die privaten Unterhaltungen und Kontakte, die für manchen jüngeren Mathematiker neue und tiefere Einsichten ergaben. Auch die Teilnahme bekannter Wissenschaftler aus benachbarten Forschungsgebieten brachte gegenseitige neue Impulse und Ideen, deren Ergebnisse abgewartet werden müssen. Es wurde von vielen Teilnehmern der Wunsch geäußert, diese Tagung regelmäßig stattfinden zu lassen.

Teilnehmer:

Baumgartner, K.	Gießen
Behrens, E.A.	Frankfurt
Betsch, G.	Tübingen
Butler, M.C.R.	Liverpool
Brenner, Sheila	Liverpool
Burgess, W.	Zürich
Cohn, P.M.	London
Croisot, R.	Besancon
Divinsky, N.	London
Fröhlich, A.	London
Gabriel, P.	Straßburg
Goldie, A.W.	Leeds
Hart, R.	Leeds
Heineken, H.	Frankfurt

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Ringe und Moduln

[illegible]. Febr. bis 5. März 68

[illegible] der Leitung der Herren Professoren Dr. [illegible] Baer und Dr. F. Kasch fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach erstmals eine Tagung über Ringe und Moduln statt. Die Teilnahme an dieser Tagung [illegible] besonders erfreulich ist zu verzeichnen, daß aus dem außereuropäischen [illegible] namhafte Spezialisten nach Oberwolfach gekommen waren. So waren die Diskussionen [illegible] lebhaft, interessant und anregend. Weit über das schon ungewöhnlich umfangreiche [illegible]programm reichten die privaten Unterhaltungen und Kontakte, die für manchen jüngeren Mathematiker neue und tiefere Einsichten ergaben. Auch die Teilnahme bekannter Wissenschaftler aus benachbarten Forschungsgebieten brachte gegenseitig neue Impulse und Ideen, deren Ergebnisse abgewartet werden müssen. Es wurde von vielen Teilnehmern der Wunsch geäußert, diese Tagung regelmäßig stattfinden zu lassen.

Teilnehmer:

Baumgartner, K.	Gießen
Behrens, E. A.	Frankfurt
Betsch, G.	Tübingen
Butler, M. C. R.	Liverpool
Brenner, Sheila	Liverpool
Burgess, W.	Zürich
Cohn, P. M.	London
Croisot, R.	Besançon
Divinsky, N.	London
Fröhlich, A.	London
Gabriel, P.	Straßburg
Goldie, A. W.	Leeds
Hart, R.	Leeds
Hein[illegible], H.	Frankfurt

Herstein, T. N.	Chicago
Jain, S. K.	Delhi
Jehne, W.	Köln
Kegel	Frankfurt
Krull, W.	Bonn
Kunz, E.	Heidelberg
Kupisch	Saarbrücken
Lambek, J.	Zürich
Lesieur, L.	Sceaux
Liebert, W.	Frankfurt
Martindale, W. S.	Amherst
McConnell, I. C.	Leeds
Michler, G.	Frankfurt
Müller, B.	Mainz
Nöbauer, W.	Wien
Pareigis, B.	München
Rentschler, R.	München
Rosenberg, A.	Ithaca
Small, L. W.	Berkeley
Stephenson, W.	London
Storrer, H. H.	Zürich
Wall, W.	Newcastle
Wallace, D. A. R.	Aberdeen
Zelinsky, D.	Evanston

In insgesamt 28 Vorträgen wurden neueste Ergebnisse zum Teil aus eigenen Arbeiten, zum Teil als Zusammenfassung neuerer Entwicklungen vorgetragen.

Vortragsauszüge:

BEHRENS, E. A.: Prime arithmetische Ringe.

Nach L. Fuchs nennt man einen Ring arithmetisch, wenn der Verband seiner (zweiseitigen) Ideale distributiv ist. Soweit es sich um eine topologische Algebra A mit genügend guter Topologie und genügend großem Grundkörper K handelt, ist die Verbandshalbgruppe $V(A)$ der abgeschlossenen Ideale von A isomorph zu $V(K[S])$, wobei $K[S]$ die Halbgruppen-

Algebra einer geeigneten quasi-einreihigen Halbgruppe S ist. Dabei ist $K[S]$ prim, wenn S nullteilerfrei ist, und noethersch, wenn S nur endlich viele, etwa q, Idempotente ungleich 0 enthält. In diesem Falle ist $K[S]$ eine Ordnung in dem Ring der q-reihigen Matrizen über dem Körper der Potenzreihen in einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus K. - Die obigen Halbgruppen lassen sich durch ihre q-reihigen "Strukturmatrizen" $M = ((jk))$ mit $0 \leq (jk) \in Z$ beschreiben und die M wiederum kann man durch ein einfaches rekursives Verfahren erhalten. Die Einteilung der M nach Klassen isomorpher S läßt sich matrizentheoretisch erfassen, und die sich dabei ergebenden Invarianten führen zu einer Typeneinteilung der S und damit der primen arithmetischen Algebren mit genügend guter Topologie.

BRENNER, Sheila: Endomorphism Algebras of Vector Spaces with sets of distinguished sub-spaces.

Let U be a vector space over a field $\mathfrak{F}$ and $\underline{K}$ be a set of subspaces of M. The algebra of endomorphisms of U which leave invariant each element of $\underline{K}$ will be devoted by $\mathfrak{E}(U; \underline{K})$. If E is an algebra isomorphic to $\mathfrak{E}(U; \underline{K})$, then E is said to be represented by the system $(U; \underline{K})$.

Corner has proved that if E is an associative algebra with identity and has a set of generators of cardinal less than the first strongly inaccessible cardinal, then E can be represented by a system with five subspaces. On the other hand the algebras which can be represented by systems with three subspaces form a very restricted class.

I shall discuss an approach to some of Corner's results which is rather different to his, and also present some further results which have bearing on the "form-subspace" problem.

BUTLER, M.C.R.: Some classes of torsion-free modules over integral domains.

I shall discuss torsion-free modules $M, N, \ldots$ over an integral domain A; let K be quotient field of A, rank $(M) = \dim_K(K \otimes M)$, and call $K \otimes \mathrm{Hom}(M, N)$ the space of quasi-homomorphisms of M into N. A type (as in abelian group theory) is an isomorphism class of rank 1 modules (submodules of K); the set of types is a lattice (distributive if A is Dede-

kind). For each type α and module M, let M^{α} = union of all pure submodules of M of rank 1. Let $\Gamma \subset \Lambda$, and call M a Γ-module if it is determined to within a quasiisomorphism by the map $\alpha \to K \otimes M^{\alpha}$ of Γ into the lattice of subspaces of the injective envelope $K \otimes M$ of M. It will be shown (1) that M is a Γ-module if it is quasi-isomorphic to a module M_o generated by a finite set $\{M_i\}_{i=1,\ldots,n}$ of submodules such that rank $(M_i) = 1$ and type $(M_i) \in \Gamma (i = 1, \ldots, m)$;

(2) that, if Γ is a finite distributive sublattice of Λ, then all Γ-modules are of the form given in (1).

BETSCH, G.: Primitive Fastringe (Ein Dichtesatz für Fastringe).

Betrachtet wird die Klasse der Fastringe N mit Eins, die eine treue, monogene, irreduzible N-Gruppe besitzen; die Ringe in dieser Klasse sind genau die primitiven Ringe mit Eins. Für die Fastringe dieser Klasse, die nicht Ringe sind, werden ein Dichtesatz und verschiedene Folgerungen angegeben. Der entsprechende Dichtesatz für Fastringe, die eine treue, monogene, minimale N-Gruppe besitzen, wurde zuerst von Wielandt bewiesen. Der im Vortrag skizzierte Beweis ist eine Modifikation des Beweises von Wielandt.

COHN, P.M.: Anhängigkeit in Ringen.

In einem filtrierten Ring bezeichne man mit a(R) die kleinste Zahl n derart, daß es n Elemente gibt, die rechts R-abhängig sind, aber eins der Elemente größten Wertes in der Menge ist nicht R-abhängig von den anderen (Bezeichnungen wie in Cohn, Rings with a weak algorithm, Trans. Amer. Math. Soc. 109 (1963) 332-356). Verschiedene Ringeigenschaften können mit Hilfe dieser Abhängigkeitszahl a(R) ausgedrückt werden, und zwar ist der Ring je besser, je größer a(R) ist; insbesondere $a(R) = \infty$ ist gleichwertig damit, daß R einen schwachen Algorithmus hat.

DIVINSKY, N.: Lower Radicals.

To prove that the lower radical construction for a homomorphically closed class stops at the first infinite ordinal; that the Baer lower radical stops after just one step in this Kurosh construction.

A discussion of recent group radical theory as applied to rings.

FRÖHLICH, A.: The structure of Galois-homomorphisms.

Let Γ be a finite group of automorphisms of an extension L/K of commutative rings, and C the category of "good" $K(\Gamma)$-modules, with $L \in C$. For each $V \in C$ let $G(V)$ be the module of homomorphisms $V \to L$ in C. The "set" G of Galois homomorphisms for L/K is the "union" of the $G(V)$. Additional structure on G : 1) G has a product making it into a "monoid". 2) There is a family of pairings $G(V) \times G(\hat{V}) \to K$, $\hat{V}$ the dual of V. These yield "discriminants". 3) The pairings $G(V) \times V \to L$ define "resolvents" in L. 4) The morphisms of C act as "endomorphisms" on G. The set-up is functorial with respect to $\{L/K, \Gamma\}$. Main application: L and K Dedekind rings.

GABRIEL, P.: Darstellung nilpotenter Lie-Algebren.

Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale nilpotente Lie-Algebra über einem Körper k der Charakteristik 0. Ein zweiseitiges Ideal I der universellen Hülle $V(\mathfrak{g})$ sei rational genannt, wenn k das Zentrum von $V(\mathfrak{g})/I$ ist. Dixmier hat gezeigt, daß man für ein solches I einen Isomorphismus

$$V(\mathfrak{g})/I \xrightarrow{\sim} k[\frac{\partial}{\partial X_1}, X_1, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n}, X_n]$$

hat.

Außerdem hat er eine natürliche Bijektion zwischen den rationalen Idealen I und den Bahnen der zu $\mathfrak{g}$ gehörigen Gruppe G in $\mathfrak{g}^*$ angegeben. Diese Resultate kann man auf alle Primideale von $V(\mathfrak{g})$ verallgemeinern: Wenn $z(I)$ das Zentrum von $V(\mathfrak{g})/I$ bezeichnet und $k(I)$ den Quotientenkörper von $z(I)$, so ist $k(I) \otimes_{z(I)} (V(\mathfrak{g})/I)$ isomorph zu einem $k(I)[\frac{\partial}{\partial X_1}, X_1, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n}, X_n]$. Außerdem werden die Primideale I durch die Untermannigfaltigkeiten von $\mathfrak{g}^*$ beschrieben, die bezüglich G invariant sind.

GOLDIE, A.W.: Localisation in Non-commutative Rings.

A method for localising in any noetherian ring with respect to any prime ideal is presented.

HART, R.: Simple rings with uniform right ideals.

The rings R of the title are known to be isomorphic to the endomorphism ring of a torsion-free module M over a right Ore domain K. We show that one can assume that M is finitely generated and projective; this is the same as saying that $R \cong e K_n e$, where e is an idempotent in the complete matrix ring K_n. One consequence is that R has a right quotient ring which is simple Artinian. In special cases K can be chosen to be a simple demain. The result can be extended to certain kinds of maximal orders.

HERSTEIN, T. N.: Theorem of Wedderburn and Burnside Groups.

A torsion group embedded in the multiplicative structure of a ring satisfying a polynomial identity is shown to be locally finite. This gives rise to a theorem on certain types of algebras which satisfy polynomial identities a result extending a theorem proved by Wedderburn in 1937.

KRULL, W.: Galoismoduln.

Es sei N ein separabler Normaloberkörper n-ten Grades mit der Galoisgruppe G über dem Grundkörper K. Unter dem zugehörigen Galoismodul der Dimension g verstehen wir die additive abelsche Gruppe aller g-gliedrigen Spalten, die zu einem Doppelmodul gemacht wird mit dem Ring aller Matrizen g-ten Grades über K als Links- und der Galoisgruppe G als Rechts-Multiplikatorenbereich. Die Galoismoduln spielten eine Hauptrolle bei dem heute uninteressant gewordenen Problem, zu gegebenen "projektiven" Darstellungen von G erzeugende Normalpolynome für N über K zu finden. Im Vortrag werden die allgemeinen Sätze behandelt, die von dem klassischen Ausgangspunkt her für Galoismoduln gefunden wurden. Das Hauptthema ist der Nachweis, daß diese Sätze, die sich teils auf beliebige, teils ausdrücklich auf nicht-absolualgebraische Körper beziehen, in engem Zusammenhang stehen mit gewissen Moduln und Resultaten der modernen algebraischen Zahlentheorie.

KUNZ, E.: Vollständige Durchschnitte und Differenten.

Definition der Dedekindschen, Kählerschen und Neotherschen (= homologischen) Differente für eine Erweiterung $R \subseteq S$ von kommutativen Rin-

[illegible] : [illegible] Simple rings with uniform right ideals.

The rings R [illegible] are known to be isomorphic to the endomorphism rings of [illegible] modules M over a right Ore domain [illegible]. We show that one can assume [illegible] M [illegible] uniform and projective; this is the [illegible] that [illegible], where [illegible] is an idempotent in the complete matrix ring [illegible]. The consequence is that R has a right quotient ring [illegible] simple [illegible]. In special case R can be chosen to be a [illegible] domain. The result can be extended to certain kinds of maximal [illegible].

[illegible] : [illegible] Wedderburn and Burnside Groups.

[illegible] group embedded in the multiplicative structure of a ring satisfying a polynomial identity is shown to be locally finite. This gives rise to new theorems [illegible] types of rings which satisfy polynomial identities [illegible] and [illegible] theorems [illegible] Wedderburn [illegible].

[illegible] : [illegible]

[illegible] Kreisteilungskörper n-ten Grades mit der Galois-gruppe [illegible] über dem Grundkörper [illegible], wobei der zugehörige Galoismodul der Dimension [illegible] ist, [illegible] wird die additive abelsche Gruppe aller g-gliedrigen Spalten, die zu einem Doppelmodul gemacht wird mit dem Ring aller Matrizen [illegible] als Links- und der Galoisgruppe [illegible] als Rechts-Multiplikatorenbereich. Die Galoismoduln spielten eine Hauptrolle bei dem heute [illegible] geworden [illegible] Problem, zu gegebenen "projektiven" Darstellungen [illegible] erzeugende Approximationspolynome für N über [illegible] zu finden. [illegible] die allgemeinen Sätze behandelt, die von dem klassischen [illegible] Standpunkt [illegible] für Galoismoduln gefunden wurden. [illegible] Sätze, die sich teils nur [illegible] Körper beziehen, [illegible] Moduln und [illegible] Resultaten der [illegible].

[illegible] : Vollständige [illegible] und Differenten.

Definition der [illegible] (= homologischen) Differente [illegible] für [illegible] von kommutativen Ringen. Problem: Unter welchen Voraussetzungen über R und S gilt Übereinstimmung der Differenten? Diskussion des Begriffs "vollständiger Durchschnitt". Beweis, daß Kählersche und Noethersche Differente in einer gewissen Situation übereinstimmen, in der als wesentliche Voraussetzung verlangt wird, daß S über R ein vollständiger Durchschnitt ist.

KUPISCH, H.: Über eine Klasse von Ringen mit Minimalbedingung.

R sei ein einreihiger Ring (generalized uniserial ring i.S. von Nakayama), $U_1, \ldots, U_n$ sei ein maximales System nichtisomorpher primitiver Linksideale; für einen R-Linksmodul V sei d(V) = kleinste natürliche Zahl m mit $N^m V = 0$, (N = rad R) und $d_i = d(U_i)$.

Satz 1: R läßt sich charakterisieren durch ein Invariantensystem S(R), das besteht aus numerischen Invarianten und den Endomorphismenringen $R_i = \mathrm{Hom}_R(U_i, U_i)$, $i = 1, \ldots, n$, zwischen denen gewisse Relationen gelten. Die R_i sind VPE-Ringe (d.h. vollständig primäre einreihige Ringe). Zu jedem System S: $R_1, \ldots, R_n$ von VPE-Ringen R_i mit entsprechenden Relationen existiert ein (zweiseitig) unzerlegbarer einreihiger Ring R(S) mit S(R(S)) = S.

LAMBEK, J.: Completions of categories of modules.

Let R be an associative ring with 1, $\mathfrak{A}$ a full category of (right) R-modules. We wish to find the largest full category $\bar{\mathfrak{A}}$ of R-modules containing $\mathfrak{A}$ such that the embedding $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$ preserves all generalized direct limits (in the sense of Kan). Actually $\bar{\mathfrak{A}}$ consists of all R-modules M for which the functor $\mathrm{Hom}_R(-, M) : \mathfrak{A}^{\mathrm{opp}} \to$ Ens preserves all generalized inverse limits, but a more concrete description of $\bar{\mathfrak{A}}$ can often be given. THEOREM: $\bar{\mathfrak{A}}$ consists of all R-modules M such that every nonzero submodule of M has a nonzero factor module in $\mathfrak{A}$, provided $\mathfrak{A}$ contains $R \oplus R$, is closed under submodules, and satisfies one of the following three conditions: (1) $\mathfrak{A}$ is closed under essential extensions. (2) Whenever A and C/A are in $\mathfrak{A}$, so is C. (3) All modules in $\mathfrak{A}$ are projective.

LESIEUR, L.: Sur les anneaux de fractions.

A = anneau avec élément unité; S partie de A stable pour la multiplica-

tion. Dans le cas où S est formée d'éléments réguliers, l'existence de l'anneau de fractions A_S équivaut à la condition:

(C) $\forall a \in A, \quad s \in S, \quad \exists a' \in A, \quad s' \in S \quad$ t.q. $a's = s'a$.

propriété 1. A noethérien à gauche, (C), S est formée d'éléments réguliers à gauche $\Longrightarrow$ S est formée d'éléments réguliers.

propriété 2. (C) $\Longrightarrow$ $As \cap as' \ni \sigma$ (élément de S).

On définit l'anneau de fractions A_S dans le cas où S peut avoir des diviseurs de zéro et on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de A_S. Une condition suffisante simple est:

A noethérien à gauche + (C).

Les anneaux de fractions jouent un rôle dans la caractérisation du coeur d'un A-module au moyen du socle d'un A_S-module (Lesieur et Croisot, Journ. d. Math., 1963, p. 385).

On revient ensuite au cas S régulier pour l'existence de l'anneau total de fractions pour certains anneaux de Johnson (anneaux noethériens à gauche à idéal à gauche singulier nul) comprenant comme cas particulier les anneaux de Goldie (anneaux noethériens à gauche semi-premiers). Dans certains cas la condition de la propriété 2 est suffisante (travaux de Djabali).

LIEBERT, W.: Endomorphismenringe beschränkter p-Gruppen.

Ein Rechtsideal eines Ringes E heißt "potent", wenn es kein Nilideal ist. Der potente Rechtssockel $S_r(E)$ ist die Summe seiner minimalen potenten Rechtsideale. Für $T \subseteq E$ bezeichnet LT bzw. RT den Links- bzw. Rechtsannullator von T in E. I = Ring der ganzen rationalen Zahlen.

Satz: Ein Ring E ist dann und nur dann zum vollen Endomorphismenring einer beschränkten abelschen p-Gruppe isomorph, wenn die folgenden sechs Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es gibt ein $k \in I$, so daß $p^k E = 0$.
(2) $0 \neq p^{k-1} S_r(E) \subseteq Z$ für alle zweiseitigen Ideale $Z \neq 0$ von E.
(3) Ist J ein minimales potentes Rechtsideal vom genauen Exponenten p^k, dann gilt $LRH \cap J = H \cap J$ für alle Linksideale H von E.

(4) Die Summe zweier Linksannullatoren, deren Durchschnitt das Nullideal ist, ist wieder ein Linksannullator.

(5) Für jedes primitive Idempotent τ aus E mit $p^{k-1}\tau \neq 0$ gilt $\tau E \tau = I\tau$.

(6) E besitzt ein Einselement.

MARTINDALE, WALLACE, S.: Jordan Homomorphisms of Symmetric Elements.

At the November, 1964, meeting of the American Mathematical Society at Evanston, Illinois, we presented a result which we have since generalized as follows: Let R be a ring with involution * such that (1) R contains 3 non-zero orthogonal symmetric idempotents e_1, e_2, e_3 whose sum is 1, and (2) $Re_iR = R$, $i = 1, 2, 3$. Let Φ be a Jordan homomorphism of the symmetric elements S of R into an arbitrary ring R' of characteristic unequal to 2. Then Φ can be extended uniquely to an associative homomorphism of R into R'.

A similar result for the case of two idempotents has also been obtained. Corresponding theorems on Jordan derivations follow as corollaries to the above. Lastly, some results on Jordan derivations are shown to hold whereas the corresponding conjectures for Jordan homomorphisms are not necessarily valid.

McCONNELL, J. C.: The intersection theorem in rings generated by nilpotent Lie rings.

Let R be a commutative noetherian ring and I be a proper ideal of R. The Intersection Theorem states that if $K \in I^{\omega} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$ then $\exists\, i \in I$ such that $\varkappa = \varkappa i$. This result is generalized to non-commutative rings as follows.

Theorem. Let R be a right noetherian ring which is generated by a nilpotent Lie ring and I be a non-zero ideal of R. Denote the centre of R by C(R). Then

(i) $I \cap C(R) \neq 0$.

(ii) If $\varkappa \in I^{\omega} \cap C(R)$ then $\exists\; i \in I$ such that $\varkappa = \varkappa i$.

Corollary. Let R be a prime ring satisfying the conditions of the theorem. If I is a proper ideal of R then $I^{\omega} = 0$.

(4) Die Summe zweier Linksmultiplikatoren, deren Durchschnitt das Nullideal ist, ist wieder ein Linksmultiplikator.
(5) Für jedes [illegible] Idempotent e aus R mit e^{k-1} [illegible] $\neq 0$ gilt $eR = [illegible]$.
(7) T besitzt [illegible] Element.

[illegible] C. [illegible]: Jordan Homomorphisms of Symmetric [illegible].

At the [illegible] 1954 meeting of the American Mathematical Society at Evanston, Illinois, [illegible] result which we have since generalized as follows: Let R be a ring with involution [illegible] such that (1) R contains 3 non-zero orthogonal symmetric idempotents e_1, e_2, e_3 whose sum is 1, and (2) [illegible] $= R_{[illegible]}$ [illegible] 1, 2, 3. Let [illegible] Jordan homomorphism of the symmetric elements of R into an arbitrary ring R' of characteristic unequal to 2. Then [illegible] be extended uniquely to an associative homomorphism of [illegible].

A similar result for the [illegible] of two idempotents has also been obtained. [illegible] theorem [illegible] Jordan derivations follow as corollaries to the above. Lastly, [illegible] Jordan derivations are shown to hold whereas [illegible] corresponding conjectures for Jordan homomorphisms are not [illegible]ly valid.

McCOY, N. H.[illegible]: The intersection theorem in rings generated by nilpotent [illegible].

Let R be a commutative noetherian ring and I be a proper ideal of R. The intersection theorem states that if $K \subseteq I^n = \bigcap_{n=1} I^n$ then $\exists\, i \in I$ such that [illegible] $= x i$. This result [illegible] to non-commutative rings as follows.

Theorem. [illegible] be a right noetherian ring which is generated by nilpotent [illegible] and I be a non-zero ideal of R. Denote the centre of R by $C(R)$. [illegible]:

(a) I [illegible] $C(R) \neq 0$.

(b) [illegible] $C(R)$ [illegible] $\exists$ $i \in I$ such that $x = xi$.

Corollary. Let R be a prime ring satisfying the conditions of the theorem. If I is a proper ideal of R, then [illegible] $= 0$.

In particular, the universal enveloping algebra of a nilpotent Lie algebra satisfies the conditions of this corollary.

MICHLER, G.: Charakterisierung einer Klasse von Noetherschen Ringen.

Alle hier betrachteten Ringe sind assoziativ und haben ein Einselement. Noethersche Ringe sind Rings mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale.

Satz: Der Ring R ist dann und nur dann eine direkte Summe von endlich vielen Matrixringen $M_{n_i}(D_i)$ pber lokalen, vollständigen Hauptrechts- und Hauptlinksidealringen D_i, wenn R ein halbprimer, vollständiger, noetherscher Ring ist, der den folgenden 3 Bedingungen genügt:

a) Das Jacobson-Radikal J von R ist ein Hauptrechtsideal von R und fällt mit dem Brown-McCoy'schen Radikal G von R zusammen.

b) Jedes minimale Primideal P von R ist in einem einzigen maximalen Ideal M(P) von R enthalten.

c) Die uniformen Hauptrechtsideale von R sind projektive R-Rechtsmoduln.

MÜLLER, B.: Über vollständige (Ko-)Homologie.

Die Homologiefunktoren $\mathrm{Tor}_n^{Z(G)}(Z, M)$ und die Kohomologiefunktoren $\mathrm{Ext}^n_{Z(G)}(Z, M)$ einer endlichen Gruppe G lassen sich bekanntlich in eine einzige "vollständige" (Ko-)Homologiefolge schreiben, die aus einer vollständigen projektiven Auflösung von Z abgeleitet werden kann. Ähnliches gilt für die Hochschild-Homologie- und Kohomologiegruppen einer Algebra Λ / K, falls diese quasi-frobeniussch ist, sowie in gewissen Fällen für Frobenius- und Quasi-Frobenius-Erweiterungen R / S. Hier wird eine Definition des Begriffes einer vollständigen (Ko-)Homologiefolge vorgeschlagen, die alle bekannten Fälle umfaßt. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz solcher Folgen angegeben, und zwar bezüglich eines Ringes R, einer Ringerweiterung R / S und speziell einer Algebra Λ / K.

NÖBAUER, W.: Polynomtransformationen kommutativer Ringe.

Sei R ein kommutativer Ring, S der Polynomring in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ über

In particular, the universal enveloping algebra of a nilpotent Lie algebra satisfies the conditions of this corollary.

MICHLER, G.: Charakterisierung einer Klasse von Noetherschen Ringen.

Alle hier betrachteten Ringe sind assoziativ und haben ein Einselement. Noethersche Ringe sind Ringe mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale.

Satz: Ein Ring R ist dann und nur dann eine direkte Summe von endlich vielen [illegible] $M_{n_i}(R_i)$ über lokalen, vollständigen Hauptrechts- und Hauptlinksidealringen R_i, wenn R ein halbprimer, vollständiger, noetherscher Ring ist, der den folgenden 3 Bedingungen genügt:

a) Das Jacobson-Radikal J von R ist ein Hauptrechtsideal von R und fällt mit dem Brown-McCoy'schen Radikal [illegible] von R zusammen.

b) Jedes minimale Primideal P von R ist in einem einzigen maximalen Ideal M(P) von R enthalten.

c) Die uniformen Hauptrechtsideale von R sind projektive R-Rechtsmoduln.

MÜLLER, B.: Über vollständige (Ko-)Homologiefolgen.

Die Homologiefunktoren $\mathrm{Tor}_n^{Z(G)}(Z, M)$ und die Kohomologiefunktoren $\mathrm{Ext}^n_{Z(G)}(Z, M)$ einer endlichen Gruppe G lassen sich bekanntlich in eine einzige vollständige (Ko-)Homologiefolge [illegible], die aus einer vollständigen projektiven Auflösung von Z [illegible] werden kann. Ähnliches gilt für die Hochschild-Homologie- [illegible] Kohomologiegruppen einer Algebra [illegible] K, falls diese quasi-frobeniussch ist, sowie in gewissen Fällen für Frobenius- und Quasi-Frobenius-Erweiterungen R \ S. Hier wird [illegible] Definition des Begriffes einer vollständigen (Ko-)Homologiefolge [illegible], die alle bekannten Fälle umfaßt. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz solcher Folgen angegeben, und zwar bezüglich eines Ringes R, einer Ringerweiterung R \ S und speziell einer Algebra A \ K.

N[illegible], W.: Polynomtransformationen kommutativer Ringe.

R [illegible] kommutativer Ring, S der Polynomring in $X_1, X_2, \dots$ [illegible]

R. Ein n-Tupel $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ von Elementen aus S heiße Polynomtransformation. Jede Polynomtransformation induziert eine Abbildung von R^n in R^n. Die Menge aller Polynomtransformationen bildet bezüglich der Verknüpfung

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n) \circ (g_1, g_2, \ldots, g_n) = (f_1(g_1 \ldots g_n) \ldots f_n(g_1 \ldots g_n))$$

eine Halbgruppe H mit Einheit. Es werden Beziehungen zwischen verschiedenen Teilhalbgruppen von H untersucht, vor allem zwischen folgenden:

T_1 Menge der invertierbaren Elemente von H ("ganze Cremonatransformationen") T_2, T_3, T_4 Menge der Elemente von H, für die die induzierte Abbildung von R^n in R^n eineindeutig bzw. Abbildung auf bzw. Permutation ist. T_5 Menge der Elemente von H, deren Funktionaldeterminante eine Einheit von R ist. Es gilt z.B. folgender Satz:

Ist R noetherscher Integritätsbereich der Charakteristik 0 mit endlicher Einheitengruppe, in der zu jedem teilerlosen Primideal ein davon verschiedenes zugehöriges Primärideal mit endlichem Restklassenring existiert (Beispiel so eines R:Integritätsbereich der ganzen Zahlen), dann gilt $T_1 = T_3 = T_4 = T_5 \subset T_2$.

Mit Hilfe von T_4 kann der aus der Zahlentheorie stammende Begriff des Permutationspolynoms auf Polynome in mehreren Unbestimmten verallgemeinert werden.

PAREIGIS, B.: Radikale und kleine Moduln.

Die Frage nach der Struktur des Radikals eines Moduls (=Durchschnitt der max. Untermoduln) soll mit Hilfe des Begriffs des kleinen Moduls untersucht werden. Jedes Radikal ist Summe von kleinen Moduln, und jede Summe von kleinen Moduln ist in einem Radikal enthalten. Zwischen den kleinen und den injektiven Moduln bestehen enge Zusammenhänge: ein einfacher Modul ist entweder klein oder injektiv, ein kleiner von Null verschiedener Modul ist niemals injektiv.

Es gibt Ringe, die als Moduln klein sind, z.B. Integritätsbereiche; genau dann haben die injektiven Moduln keine maximalen Untermoduln. In diesem Falle tritt jeder Modul als Untermodul eines Radikals auf. Für Moduln [illegible]. Ein n-Tupel $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ von Elementen aus G heißt Polynomtransformation. Jede Polynomtransformation induziert eine Abbildung von G^n in G^n. Die Menge aller Polynomtransformationen bildet bezüglich der Verknüpfung [illegible]

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n) \circ (g_1, \ldots, g_n) = (f_1(g_1, \ldots, g_n), \ldots, f_n(g_1, \ldots, g_n))$$

eine Halbgruppe [illegible] worden. Beziehungen [illegible] schieden [illegible] Halbgruppen [illegible] untersucht, vor allem zwischen folgenden:

[illegible] von G^n [illegible] Polynomtransformationen [illegible] der Elemente von [illegible] eineindeutig bzw. Abbildung [illegible] der Elemente von G, darunter [illegible] Funktion [illegible] gilt z.B. folgender [illegible]:

Ist [illegible] kommutativer Ring [illegible] Charakteristik 0 mit Einselement [illegible], in dem jedes teilerfremde Primideal ein davon verschiedenes [illegible] Primideal mit endlichem Restklassenring [illegible] ist (Beispiel: [illegible] Integritätsbereich der ganzen Zahlen), dann gilt [illegible].

Mit [illegible] der Begriff [illegible] Permutationspolynom [illegible] mehreren Unbestimmten [illegible] verallgemeinern [illegible].

[illegible]

[illegible] Summe von kleinen Moduln, und jeder [illegible] Modul ist in einem Radikal enthalten. Zwischen den [illegible] und [illegible] injektiven Moduln [illegible] Zusammenhang: [illegible] ein kleiner von Null [illegible] ist [illegible] injektiv.

[illegible] sind, z.B. Integritätsbereich [illegible] maximalen Untermoduln. [illegible] jeder [illegible] eine [illegible] über Dedekindringen lassen sich die kleinen Moduln charakterisieren als solche Moduln, bei denen jeder Untermodul in einem maximalen Untermodul enthalten ist. Eine kategorietheoretische Dualisierung ist möglich. Die kokleinen Moduln über Dedekindringen sind die Torsionsmoduln.

RENTSCHLER, R.: Eine Bemerkung zu Ringen mit Minimalbedingung für Rechtshauptideale.

Ein Linksideal I eines Ringes R heißt links T-nilpotent, wenn es zu jeder Folge $a_1, a_2, a_3 \ldots$ von Elementen aus I eine natürliche Zahl n gibt mit $a_1 a_2 \ldots a_n = 0$.

Bass zeigte (Trans.Am.Math.Soc. 95, 466-488 (1960)), daß für einen Ring mit Einselement die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

1) R genügt der Minimalbedingung für Rechtshauptideale.
2) Das Jacobsonradikal Ra(R) von R ist links T-nilpotent und R/Ra(R) ist halbeinfach.

Der Beweis von 1) nach 2) ist elementar. Bass bewies mit homologischen Methoden, daß 1) aus 2) folgt, und er stellte die Frage nach einem nicht-homologischen Beweis.

Ein solcher Beweis wird angegeben. Es läßt sich zeigen, daß unter der Bedingung 2) jede absteigende Folge

$a_1 R \geq a_1 a_2 R \geq a_1 a_2 a_3 R \geq \ldots$ mit $a_i = e + b_i$, $e^2 = e$, $b_i \in Ra(R)$

stationär wird. Der allgemeine Fall läßt sich auf diesen Spezialfall zurückführen.

SMALL, L.W.: Rings with finite global Dimension.

A ring is constructed which is right hereditary, has left global dimension three and is not left semi-hereditary. The following theorems are also proved:

Th. 1. If R is right noetherian and right hereditary, then R has a right quotient ring which is right hereditary and right artinian.

Th. 2. Let R be as in Th. 1. Then $R/_{N(R)}$, where N(R) = maximal nilpotent ideal of R, is also right hereditary.

In Addition, some "structure" theorems are given for noetherian, über Dedekindringen lassen sich die kleinen Moduln charakterisieren als solche Moduln, bei denen jeder Untermodul in einem maximalen Untermodul enthalten ist. Eine kategorientheoretische Dualisierung ist möglich; Die kokleinen Moduln über Dedekindringen sind die Torsionsmoduln.

RENTSCHLER, R.: Eine Bemerkung zu Ringen mit Minimalbedingung für Rechtshauptideale.

Ein Linksideal I eines Ringes R heißt links T-nilpotent, wenn es zu jeder Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$ von Elementen aus I eine natürliche Zahl n gibt mit $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$.

Bass zeigte (Trans. Amer. Math. Soc. 95, 466-488 (1960)), daß für einen Ring mit Einselement die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

1) R genügt der Minimalbedingung für Rechtshauptideale.

2) Das Jacobsonradikal Ra(R) von R ist links T-nilpotent und R/Ra(R) ist halbeinfach.

Der Beweis von 1) nach 2) ist elementar. Bass bewies mit homologischen Methoden, daß 1) aus 2) folgt, und er stellte die Frage nach einem nicht-homologischen Beweis.

Hier wird ein solcher Beweis angegeben. Es läßt sich zeigen, daß unter der Voraussetzung 2) jede absteigende Folge

$a_1 R \geq a_1 a_2 R \geq a_1 a_2 a_3 R \geq \dots$ mit $a_i = e_i + b_i$, $e_i^2 = e_i$, $b_i \in Ra(R)$

stationär wird. Der allgemeine Fall läßt sich auf diesen Spezialfall zurückführen.

SMALL, L.W.: Rings with finite global dimension.

A ring is constructed which is right hereditary, has left global dimension three and is not left semi-hereditary. The following theorems are also proved:

Th. 1. If R is right noetherian and right hereditary, then R has a right quotient ring which is right hereditary and right artinian.

Th. 2. Let R be as in Th. 1. Then $R/_{N(R)}$, where N(R) = maximal nilpotent ideal of R, is also right hereditary.

In addition, some "structure" theorems are given for noetherian, hereditary rings and an example is given to show that Th. 1 is, in some sense, "best possible".

WALL, D.W.: QF-3 Rings and Algebras.

A finite dimensional algebra A (with identity) over a field is called QF-3 if A has a unique minimal faithful left A-module. QF-3 algebras have been studied in a number of ways:

1) The study of the relationships between the dominant ideals and the non-dominant primitive ideals;
2) The study of those QF-3 algebras which are endomorphism rings;
3) The study of those QF-3 algebras which are residue class algebras;
4) The study of the various dimensions (e.g. dominant dimension) associated with A-moduls and with A.

The relations among these different approaches are discussed and in this connection a number of conjectures and open questions are given.

WALLACE, D.A.R.: The Centrality of the Radical of a Group Algebra.

Let G be a group and consider the group algebra A(G) of G over some fixed algebraically closed field of prime characteristic p. If G is finite and non-abelian and if p divides the order of G then the radical is contained in the centre of the group algebra if and only if the subgroup G'P where G' is the derived group and P is a p-Sylow subgroup is a Frobenius group with P acting as a group of regular automorphisms on G'. If an attemmp is made to weaken the conditions it can be shown that the above conclusion holds if it is merely assumed that the radical is commutative provided p is odd. Alternatively if G is infinite non-abelian with elements of order p and if a proper radical lies in the centre of A(G) then G'P (as above) is a finite Frobenius group.

ZELINSKY, D.: The category of rank one projectives.

Let R be a commutative ring with unit and Pic(R) denote the category of finitely generated invertible R-modules. If R → S is a homomorphism of such rings then Pic R → Pic S is the usual functor. In fact, from the standard homomorphisms

$R \to S \rightrightarrows S \otimes_R S \overset{\to}{\rightrightarrows} S \otimes_R S \otimes_R S \overset{\to}{\underset{\to}{\rightrightarrows}} \dots$ we get functors

(*) Pic $S \rightrightarrows \mathrm{Pic}(S \otimes_R S) \overset{\to}{\rightrightarrows} \dots$. Since Pic S^n has an operation, $\otimes_S n$, which makes it almost an abelian group, we can define coboundary functors in 6*). These, together with the functors K^o and K^1 of Bass and Chase (here $K^o(\mathrm{Pic}\ S)$ = the group of isomorphism classes in Pic S, and $K^1(\mathrm{Pic}\ S)$ = the group of units in S) give a long exact sequence $0 \to H^1(K^1(*)) \to \Delta^1 \to H^o(K^o(*)) \to H^2(K^1(*)) \to \Delta^2 \to \dots$ where Δ^i can be described explicitly and, in particular there is a monomorphism from the Brauer group of S over R to Δ^2 which is an isomorphism if S over R is isotrivial. Spectral-sequence-like methods yield the same result.