Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Arbeitstagung über Funktionalanalysis

7. - 12. März 1966

Unter der Leitung der Herren Professoren Dr. H. König (Saarbrücken) und Dr. F.-W. Schäfke (Köln) fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Arbeitstagung über Funktionalanalysis statt.

Teilnehmer:

Armbrust, M., Köln
Baumann, V., Köln
Dankert, Gabriele, Köln
Diener, K.-H., Köln
Ebert, Köln
Hackenbroch, W., Saarbrücken
Jehne, W., Köln
Kölzow, D., Jülich
König, H., Saarbrücken
Koppelberg, B., Köln
Krekel, D., Köln
Mennicken, R., Köln
Müller, G., Köln
Mürmann, M., Saarbrücken
Niessen, Köln
Plewe, K., Köln
Sattler, A., Köln
Schäfke, F.-W., Köln
Schöneberger, E., Saarbrücken
Schönhage, Köln
Schmidt, D., Köln
Schneider, A., Köln
von den Steinen, Saarbrücken
Stoss, H.-J., Köln
Tobergte, J., Köln
Vormstein, D., Köln
Wagenführer, E., Köln
von Waldenfels, W., Saarbrücken
Walzel, A., Köln

Vortragsauszüge:

ARMBRUST, M.: Nichtstandard - Analysis

Es wurde eine kurze Einführung in die Nichtstandard-Analysis im Sinne von A. ROBINSON (Model theory) und W.A.J. LUXEMBURG gegeben. Insbesondere wurden erläutert: Ultrapotenzen; Nichtstandard-Formulierungen von Eigenschaften von Standard-Folgen und Standard-Funktionen; Beweis des Nullstellensatzes für stetige Standard-Funktionen mit Nichtstandardmitteln. Beweis des Satzes von Hahn-Banach unter Umgehung des Zornschen Lemmas mittels einer Ultrapotenzkonstruktion nach LUXEMBURG (Bull AMS 68 (1962), 416-419).

BAUMANN, V.: Lineares Programmieren in linearen topologischen Vektorräumen

Es werden hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß der Dualitätssatz über linearen topologischen Vektorräumen, sowie der Transpositionssatz von Motzkin für solche Räume gilt. Die Bedingungen involvieren entweder die Abgeschlossenheit der das lineare Programm bestimmenden Operatoren oder das Verhalten der Positivkegel unter diesen linearen Operatoren. Es wurde geprüft, inwieweit diese Bedingungen für das lineare Programm gelten, das durch optimale Maximie-Tests bei einfacher Gegenhypothese auftritt.

DANKERT, Gabiele : Die Höldersche Ungleichung in Orlicz-Räumen

In der Theorie der Funktionenräume L^p mit $1 \leq p \leq \infty$ läßt sich die Höldersche Ungleichung, die zunächst von einem Paar von Funktionen handelt, sofort auf den Fall von endlich vielen Faktoren ausdehnen. In der Theorie der Orlicz-Räume scheint eine solche Ausdehnung bisher nicht bekannt zu sein. Hierzu wird der Begriff der Verbindbarkeit, und als Spezialfall davon der Begriff der Komplementarität einer endlichen Familie von Orlicz-Funktionen definiert und eine allgemeine Version der Youngschen Ungleichung bewiesen. Diese zusätzlichen Hilfsmittel genügen, um die allgemeine Form der Hölderschen Ungleichung zu beweisen.

DIENER, K.-H.: <u>Induktion und Rekursion in der universellen Algebra</u>

Ein allgemeines Rekursionsprinzip für absolut freie Algebren mit unendlichstelligen Operationen wurde formuliert und mit <u>rein algebraischen</u> Methoden bewiesen, d.h. ohne die Fundiertheit der algebraischen Nachfolgerrelation zu verwenden. Weiter wurde in Umkehrung eines bekannten Sachverhalts und in Verschärfung eines Satzes von R. Montague (Bull.Amer.Math.Soc. 1955) gezeigt, daß das allgemeine (mengentheoretische) Rekursionsprinzip für eine <u>beliebige</u> Relation R auch schon <u>ohne</u> Forderung der eindeutigen Bestimmtheit von Lösungen die Fundiertheit von R impliziert.

HACKENBROCH, W.: <u>Über den Satz von F. und M. Riesz</u>

Der Vortrag brachte einige leichte Vereinfachungen und Ergänzungen zu der Arbeit von Ahern: General F. and M. Riesz - Theorem, Pac.J.Math. <u>15</u> (1965) 373-376.
Hierbei handelt es sich um eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von F. und M. Riesz der folgenden Form:
Es sei X kompakter Hausdorffraum, A abgeschlossene komplexe Teilalgebra von C(X) mit $1 \in A$, $\phi \neq 0$ multiplikatives lineares Funktional auf A, $M(\phi)$ die Gesamtheit der repräsentierenden Maße zu ϕ. Ist dann m ein solches Maß aus $M(\phi)$, daß jedes weitere $m' \in M(\phi)$ bezüglich m absolut stetig ist, so gilt: annuliert ein beliebiges komplexes Baire-Maß die Algebra A, so auch schon sein bezüglich m singulärer Teil. Die obige Voraussetzung über m ist insbesondere in den bisher betrachteten Fällen stets erfüllt, wo $M(\phi)$ aus genau einem Element besteht.

JEHNE, W.: <u>Matrix - ζ - Funktionen</u>

Mit Hilfe von endlich-dimensionalen Darstellungen der lokalkompakten Idelgruppe kann einem rationalen Schiefkörper (endlich dimensional über dem rationalen Zahlkörper) eine Serie von matrixwertigen ζ - Funktionen zugeordnet werden. Diese besitzen eindeutige meromorphe Fortsetzungen in die volle komplexe Ebene und genügen einer Funktionalgleichung vom ζ -Typus. Genau dann sind die ζ - Funktionen ganze Matrix-Funktionen wenn die Darstellung die identische Darstellung nicht enthält. Im anderen Fall können die Residuen an den

einzigen Polstellen $s = 0,1$ explizit berechnet werden.

KÖLZOW, D.: <u>Differentiation und Disintegration von Maßen</u>

$\mathcal{M}$ bezeichne einen nach Carathéodory vervollständigten Maßraum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1. Für $\mathcal{M}$ gilt der Satz von Radon-Nikodym.
2. Die summierbaren Mengen von $\mathcal{M}$ besitzen eine paarweise disjunkte Basis.
3. Für $\mathcal{M}$ existiert ein Lifting im Sinne von v. Neumann.
4. Für $\mathcal{M}$ gilt der Satz von Dunford-Pettis (für beliebige Banach-Räume). Für $\mathcal{M}=(E,\mathfrak{M},\varphi)$ gelte ein der obigen Bedingungen und es existiere ein in $\mathcal{L}^1(\mathcal{M})$ dichter Vektorverband, für den der Satz von Dini gilt.

Es bezeichne $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ eine Teil-σ-Algebra, wofür die Saturierung $\mathfrak{N}(M)$ eines jeden $M \in \mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$ liegt und mit μ auch $\mathfrak{N}(\mu)$ endliches Maß habe. Dann existiert eine Zerlegung ("bedingte Wahrscheinlichkeit") μ von $\mathcal{M}$ bezüglich $\mathfrak{N}$.

Gehört außerdem $\mathcal{M}$ zu einem abstrakten Bourbaki-Integral$(E,\mathfrak{W},\Phi)$, existiert ein Lifting L für $\mathcal{M}$, so daß für jede $\mathfrak{W}$-offene Menge G gilt $G \subseteq L(G)$ und gilt stets $\varphi(M \triangle \mathfrak{N}(\mu)) = 0$, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mu(x,.)$ ein Bourbaki-Integral auf $\mathfrak{W}$ und für lokal fast alle x ist der Träger von $\mu(x,.)$ in $\mathfrak{N}(\{x\})$ enthalten.

KÖNIG, H.: <u>Zur Theorie der Funktionalalgebren</u>

Es handelt sich um die abstrakte Theorie der Funktionenräume $H^p(dm)$ im Sinne meiner Arbeit in Math. Zeitschr. <u>88</u> (1965), über die einleitend kurz referiert wird. Es werden dann die beiden nachstehenden Probleme behandelt. - I. Die Quotientenalgebra $Q(dm)$. Es bestehe $Q(dm)$ aus allen Funktionen $h = f/g$ mit $f \in K(dm)$ und $g \in E(dm)$. $Q(dm)$ ist eine komplexe Algebra, und $I:I(h) = \int fdm/\int gdm$ ist wohldefiniert und ein multiplikatives lineares Funktional auf $Q(dm)$. Es ist $Q(dm) \cap L^1(dm) = K(dm)$. Konvergenzsatz: Es seien $h_n \in Q(dm)$ $(n=1,2,...)$ mit $h_n \longrightarrow h$ punktweise und $|h_n| \leq H$ für ein $H \geq 0$ mit $\log^+ H \in L^1(dm)$. Dann ist $h \in Q(dm)$ und $I(h_n) \longrightarrow I(h)$. - II. Substitution in

ganze Funktionen. Satz: Es sei $S:C^r \longrightarrow C$ eine ganze Funktion mit $|S(z_1,\ldots,z_r)| \leq A\exp B(|z_1|^{p_1}+\ldots+|z_r|^{p_r})$ für gewisse $A,B > 0$ und $p_1,\ldots,p_r \geq 1$. Ferner sei $f_i \in H^{p_i}(dm)$ $(i=1,\ldots,r)$. Dann ist $S(f_1,\ldots,f_r) \in Q(dm)$ und $I(S(f_1,\ldots,f_r)) = S(\int f_1 dm,\ldots,\int f_r dm)$. Der vorstehende Satz ist, wie ein Beispiel zeigt, in naheliegendem Sinne optimal.

KOPPELBERG, B.: <u>Eine Anwendung des Begriffs des induktiven Limes in der Allgemeinen Algebra.</u>

Sei A eine partielle Algebra, $\mathfrak{K}$ eine primitive Klasse von Algebren desselben Typs wie A. Die Dimension der Algebra sei d. Mit Hilfe des Begriffs des induktiven Limes erhält man einen sehr einfachen Beweis der beiden folgenden Sätze:

1) Folgendes ist äquivalent: a) A ist in eine $\mathfrak{K}$-Algebra einbettbar. b) Jede von weniger als d Elementen erzeugte Unteralgebra von A ist in eine $\mathfrak{K}$-Algebra einbettbar. c) Jede Relativalgebra von A mit weniger als d Elementen ist in eine $\mathfrak{K}$-Algebra einbettbar.

2) Sei A Unteralgebra von A', $G \subset A' \times A'$. Dann ist folgendes äquivalent: a) Es gibt einen Homomorphismus h von A' in eine $\mathfrak{K}$-Algebra mit $G \subset h$ und $h|A$ ist injektiv. b) Zu jedem $X \subset G$ mit $|X| < d$ gibt es einen Homomorphismus h_X von A' in eine $\mathfrak{K}$-Algebra mit $X \subset h_X$ und $h_X|A$ ist injektiv.

MENNICKEN, R.: <u>Zu F.W. Schäfke's verallgemeinerten Äquikonvergenzprinzip.</u>

Im Hinblick auf entsprechende Anwendungen bei Differentialgleichungen werden Ergänzungen zu F.W. Schäfke's verallgemeinertem Äquikonvergenzprinzip (Math. Zeitschrift 80, 1963) bewiesen. Wie Schäfke in seiner Note gezeigt hat, sind die Annahmen seines Prinzips für die zwei speziellen Systeme von Zahlen λ_n, λ'_n, u_n, γ erfüllt, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die "Eigenwerte" λ_n, λ'_n im wesentlichen Polynome ersten oder zweiten Grades in $(\zeta + n)$ sind. Allgemeiner werden von mir bei entsprechenden

"Störparametern" μ_n, γ für 1 = 1,2,... .Eigenwerte der Form

$$\lambda_n \sim (\xi + n)^1, \quad \lambda'_n \sim (\xi + n)^1$$

zugrunde gelegt und die Gültigkeit der in Frage stehenden Annahmen aufgezeigt.

MÜRMANN, M.: <u>Herglotz-Transformation und H^p-Theorie</u>

Es wurde die Herglotz-Transformation in der abstrakten H^p-Theorie behandelt (s.G. Lumer, Herglotz Transformation and H^p Theory, Bull. of the AMS <u>71</u>, 1965). Zunächst wurde eine Variante des von Herrn Prof. König im vorangehenden Vortrag dargestellten Satzes über das Einsetzen von H^p-Funktionen in holomorphe Funktionen bewiesen: Es lassen sich unter entsprechender Abschätzung auch H^p-Funktionen mit Werten in einem konvexen Winkelraum in dort definierte holomorphe Funktionen einsetzen.

Die Herglotz Transformation T : Re A $\longrightarrow$ A ist eindeutig definiert durch Re Tu = u und $\int$ Im Tu dm = 0 für u $\in$ Re A. Sie genügt für $1 < p < \infty$ der Abschätzung $\|Tu\|_p \leqslant c_p \|u\|_p$ für Konstanten $c_p > 0$. Daher kann T linear auf $\bigcup_{1<p\leqslant\infty} L^p_{\mathbb{R}}$ (dm) fortgesetzt werden. Für p = 1 gilt - wie bereits im klassischen Fall bekannt - keine derartige Abschätzung. Führt man jedoch für $0 < p < 1$ in L^p(dm) die Quasinorm $\|f\|_p = (\int |f|^p dm)^{1/p}$ ein, so gilt $\|Tu\|_p \leqslant c_p \cdot \|u\|_1$ für $u \in L^\infty_{\mathbb{R}}$(dm), und deshalb kann T auch linear auf $L^1_{\mathbb{R}}$ (dm) fortgesetzt werden.

PLEWE, K.: <u>Direkte Zerlegungen von Moduln</u>

Λ sei ein Ring mit Einselement, M ein unitärer Λ-Linksmodul. Der Ring Ω = End_Λ(M) kann als Rechtsoperatorenbereich von M aufgefaßt werden, wodurch M zu einem Λ-Ω- Doppelmodul wird. Eine direkte Zerlegung des Λ-Moduls M heiße zweiseitig, wenn sie sogar eine Λ-Ω-Zerlegung ist. Dann gilt: Falls $_\Lambda M$ und alle direkten Summanden von M voll reduzibel sind und für sie der Satz von Krull-Remak-Schmidt richtig ist, so erhält man jede

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

zweiseitige Zerlegung von M durch "Vergröberung" einer eindeutig bestimmten minimalen zweiseitigen Zerlegung. Für den Fall $M = {}_{\Lambda}\Lambda$, wobei Λ ein artinscher Ring ist, erweist sich diese gerade als die Blockzerlegung von R. Brauer.

Eine direkte Zerlegung $M = \bigoplus N_i$ heiße hyperdirekt, wenn jeder Untermodul $L \subset M$ durch $L = \bigoplus (L \cap N_i)$ dargestellt werden kann. Es zeigt sich, daß jede hyperdirekte Zerlegung zweiseitig ist. Die Umkehrung dieses Sachverhalts kann für spezielle Modulklassen gezeigt werden, z.B. für freie Moduln.

SATTLER, A.: Biorthogonalentwicklungen analytischer Funktionen nach Eigenlösungen linearer Differentialgleichungen

Es werden Differentialgleichungen in Kreisringen mit dort eindeutigen analytischen Koeffizienten betrachtet, die linear von einem Parameter λ abhängen. Durch die Forderung der Existenz von multiplikativen Lösungen im Kreisring ist ein "Umlaufseigenwertproblem" definiert. Es wird gezeigt, wie sich Ergebnisse der Eigenwerttheorie für reelle Eigenwertprobleme auf diesen Fall übertragen lassen. Schließlich wird mit Hilfe des Äquikonvergenzprinzips von F.W. Schäfke (siehe Vortrag von Herrn Mennicken) ein Satz bewiesen, der die Entwickelbarkeit von im Kreisring multiplikativen analytischen Funktionen nach den Eigenfunktionen des "Umlaufseigenwertproblems" sicherstellt.

SCHNEIDER, A.: Vereinfachter Beweis des Hauptsatzes beim Weyl-Stoneschen Eigenwertproblem.

Der Vortrag schließt an die Darstellung des Weyl-Stoneschen Eigenwertproblems nach F. Rellich (Spectral theory of a second-order ordinary differential operator. Institute for Mathematics and Mechanics, New York University 1951) an. Dort wird allein mit den Mitteln der elementaren Analysis die wesentliche Selbsadjungiert des Operators

$$Au = -(pu')' + qu$$

(p stetig differenzierbar; > 0; q stetig reell) in den Weylschen Teilräumen gezeigt. Dabei werden die drei wesentlichen Fälle (Grenzpunkt- oder Grenzkreisfall in den jeweiligen Intervallenden) getrennt diskutiert. Hier wird nun gezeigt, daß man

alle drei Fälle gemeinsam behandeln kann, indem man nicht wie bei Rellich stets vom gleichen Teilraum ausgeht, sondern einen umfassenderen Raum wählt, der den vorliegenden Fall berücksichtigt. Eine genaue Durchführung ist enthalten in der Note: A. Schneider: Eine Bemerkung zum Weyl-Stoneschen Eigenwertproblem, Arch.d.Math., Vol. XVII, 352-358 (1966).

SCHÖNEBERGER, E.: Fortsetzungsabgeschlossene metrische Räume

Ein metrischer Raum (E,σ) heißt fortsetzungsabgeschlossen, wenn jede dehnungslose Abbildung f aus einem anderen metrischen Raum (S,ρ) [d.h. $f: D \subseteq S \longrightarrow E$ mit $\sigma(fx,fy) \leq \rho(x,y)$ für alle $x,y \in D$] sich zu einer dehnungslosen Abbildung F von diesem anderen Raum in E [d.h. $F: S \longrightarrow E$] fortsetzen läßt. Es wurde gezeigt: Zu jedem metrischen Raum (E, σ) existiert ein kleinster fortsetzungsabgeschlossener Oberraum E^*; ist überdies E ein normierter reeller linearer Raum, so läßt sich auch die fortsetzungsabgeschlossene Hülle E^* zu einem reellen normierten linearen Raum machen.

TOBERGTE, J.: Faktorisierung punktweiser Operatoren

Es wurden notwendige und hinreichende Kriterien für die Faktorisierung operatorwertiger Funktionen A (endlich dimensional) hergeleitet, die auf dem Einheitskreis $\{z \in C : |z| = 1\}$ definiert sind. Dabei sind A ein linearer Operator von $\mathbb{L}^\infty$ in $\mathbb{L}^p$ mit $p = 1,2$ und $A(z)$ für jeden Punkt z des Einheitskreises ein linearer Operator von C^n in sich. $\mathbb{L}^q$ bedeutet das n-fache kartesische Produkt der skalaren Räume $L^q (1 \leq q \leq \infty)$.

v.WALDENFELS, W.: Straffe fast positive Funktionale

Die straffen fast positiven Funktionale A auf der Geraden bilden eine Verallgemeinerung der beschränkten positiven Radon-Maße, die man auch straffe positive Funktionale nennen könnte. Fast positiv bedeutet: $f \geq 0,\ f(0) = 0 \Rightarrow \langle A,f\rangle \geq 0$. Der Definitionsbereich ist die Menge der stetigen, beschränkten und im

Nullpunkt zweimal Taylorsch differenzierbaren Funktionen. Die Fouriertransformierte $\hat{A}$ ist stetig. Eine stetige Funktion P ist genau dann von der Form $\hat{A}$, wenn $\sum_{i,j} P(\xi_i - \xi_j)\, z_i z_j^* \geq 0$ für alle reellen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und alle komplexen $z_1, \ldots z_n$ mit $\sum z_i = 0$ (Verallgemeinerung des Satzes von Bochner).

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft