Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Arbeitsgemeinschaft für Angewandte Mengenlehre

12. bis 16. April 1966

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand unter der organisatorischen Leitung von Dr. W. Felscher eine Tagung statt, bei der über neuere Arbeiten und Ergebnisse mathematischer Logik und verwandter Gebiete der Mengenlehre berichtet wurde.

Nach einem einleitenden Bericht von E. Specker über den Beweis von P. Erdös und A. Hajnal für die Unmeßbarkeit von unerreichbaren Zahlen folgten einige Vorträge über Unabhängigkeitsbeweise in der Mengenlehre. J. Derrick und F.R. Drake zeigten die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms für beliebig große Kardinalzahlen von einer schwachen Variante der verallgemeinerten Kontinuumshypothese mit Hilfe der Forcing-Mathode und generischer Modelle. Für das hierfür konstruierte Modell zeigte R.B. Jensen, daß dort das Auswahlaxiom für beliebige wohlgeordnete Mengen von nicht leeren Mengen gilt. Außerdem skizzierte F.R. Drake die kürzlich bekannt gewordene Methode von Dana Scott für Unabhängigkeitsbeweise in der höheren Arithmetik mit Hilfe von Modellen mit Werten aus einer Booleschen Algebra, die das Forcing vermeidet.

Der Vortrag von K. Potthoff brachte Definitionen und Eigenschaften von Modellen für Sprachen höherer Ordnung, die für die Konstruktion und Untersuchung von Nichtstandardmodellen geeignet sind und für die der Endlichkeitssatz durch Konstruktion von Ultraprodukten bewiesen werden kann. Die folgenden Vorträge behandelten Fragen der Algebra. R. Kerkhoff brachte einige Sätze über unendlichstellige Algebren, die sich ohne Auswahlaxiom beweisen lassen. E. Felscher berichtete über rationale Äquivalenz von Algebrenklassen und daraus sich ergebende Fragen. Über eine Arbeit von G. Grätzer über freie Algebren über Axiomensysteme 1. Stufe berichtete H. Osswald. Ein Vortrag von J. Bammert über die S-Algebren, die auf Rasiowa und Sikorski zurückgehen, brachte die Anwendung der algebraischen Methoden auf die Logik. In seinen drei ausführlichen Vorträgen über Coboolesche Kategorien und die Vollständigkeit von Theorien

entwickelte F.W. Lawvere die Anwendung der Theorie der Kategorien auf die Logik, indem er den Begriff der elementaren Theorie und ihrer Modelle definierte und dann für konsistente Theorien den Vollständigkeitssatz zeigte.

Teilnehmer:

Bammert, J.	Freiburg
Crossley, Prof. J.N.	Oxford
Diener, Dr.K.H.	Köln
Derrick, Dr.J.	Leeds
Drake, Dr.F.R.	Leeds
Felscher, Dr.W.	Freiburg
Jensen, Dr.R.B.	Bonn
Kerkhoff, R.	Freiburg
Lawvere, Prof.F.W.	Zürich
Oberschelp, Dr.W.	Hannover
Osswald, H.	Hannover
Potthoff, K.	Hannover
Richter, M.	Freiburg
Schumacher, D.	Freiburg
Siefkes, D.	Heidelberg
Specker, Prof.E.	Zürich
Thiele, Dr.E.J.	Hannover
Volger, H.	Freiburg

Vortragsauszüge:

SPECKER, E.: Unerreichbare Zahlen.

Bericht über den Beweis von P. Erdös und A. Hajnal für die Unmeßbarkeit von unerreichbaren Zahlen. (P. Erdös und A. Hajnal. "On the structure of set-mappings" and "Some remarks concerning our paper "On the structure of set-mappings" ", Acta Mathematica Acad. Sci. Hung. 9 (1958) and 13 (1962)).

DERRICK, J., DRAKE, F.R.: The independence of the Axiom of Choice at arbitrarily high cardinals from a set theory including a weak Generalized Continuum Hypothesis.

Let $\aleph(S)$ be the value of the Hartog's aleph-function at the set S; i.e. for any set S : $\aleph(S) = \{\alpha | \alpha$ is an ordinal and $\exists$ a 1 - 1 mapping from α onto a subset of S$\}$. Let M be any model of Zermelo-Fraenkel set-theory (ZF) plus the axiom of choice.

If K is an infinite regular cardinal of M and Rel[M, for every cardinal α if $\alpha < K$ then $2\alpha \leq K$], where Rel[M,Φ] denotes the relativisation of the formula Φ to M, then a model N is constructed by the method of forcing and generic sets for which:

1. Rel[N, for every cardinal α; there is an R which well-orders $\mathfrak{P}(\alpha)$ iff $\alpha < K$], where $\mathfrak{P}(\alpha)$ is the power set of α
2. Rel[N, there is no prime ideal $\mathfrak{I}$ such that $\mathfrak{P}_k(K) \subseteq \mathfrak{I}$], where $\mathfrak{P}_k$ is set of all subsets of K of cardinatity < K
3. Rel[N, for every $\alpha < K$: if $\mathfrak{D}(F) = \alpha$ there exists f such that $\mathfrak{D}(f) = \alpha$ and for all $x \in \alpha$: $F^c x \neq 0 \rightarrow f^c x \in F^c x$], where $\mathfrak{D}(X) = \{x | \exists y : <x, y> \in X\}$
4. Cardinals are absolute; i.e. for every α ($\alpha \in M$ and Rel[M,α is a cardinal]) iff ($\alpha \in N$ and Rel[N,α is a cardinal])
5. Rel[M, $\aleph(\mathfrak{P}(\alpha))$] = Rel[N,$\aleph(\mathfrak{P}(\alpha))$] for every cardinal $\alpha \in M$

It follows that if M is a model such that for every cardinal $\alpha \in M$ $2^{\aleph}\alpha = \aleph_{G^c\alpha}$ [where e.g. G is one of the functions of "Powers of regular Cardinals" - W.Easton, (Princeton, 1964 - Ph.D. Thesis)] then in N the following weak variant of the generalized continuum hypothesis holds:

For every initial α : $\aleph(\mathfrak{P}(\alpha)) = \aleph_{G^c(\alpha+1)}$

It also follows from 1. above that if $\aleph_\alpha$ is any cardinal of N such $\aleph_\alpha < K$ then $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{G^c\alpha}$ is true in N.

By a further construction using the method of forcing and generic sets a model N' can be constructed from M in which 1.-5. above still hold an for which, in addition:

6. Rel[N, for every $\alpha \geq K$ there exists F such $\mathfrak{D}(F) = \alpha$ for which there

is no f such that $\mathfrak{D}(f) = \alpha$ and for every $x \in \alpha$ if $F^c x \neq o$ then $f^c x \in F^c x$].

DRAKE, F.R.: Independence proofs for higher order arithmetic.

A brief outline was given of Dana Scott's method for obtaining independence proofs for nigher order arithmetic, using Boolean valued models and avoiding the notion of forcing.

JENSEN, R.B.: Nach einer Konstruktion von R.M. Solovay wurde gezeigt, daß in dem von F.R. Drake und J. Derrick konstruierten Modell das Auswahlaxiom für beliebige wohlgeordnete Mengen von nicht leeren Mengen gilt.

POTTHOFF, K.: Beweise mit Hilfe von Nichtstandardmethoden.

Es wurde eine Objektsprache definiert, die für die Konstruktion und Untersuchung von Nichtstandardmodellen geeignet ist; in dieser Sprache können auch Aussagen über Bereiche von Funktionen und Relationen gemacht werden. Die zugehörige Klasse von Interpretationen ist bezüglich Ultraproduktbildung abgeschlossen, so daß der Endlichkeitssatz für diese Sprache durch Konstruktion von Ultraprodukten bewiesen werden kann.

KERKHOFF, R.: Sätze über unendlichstellige Algebren, welche sich ohne Auswahlaxiom beweisen lassen.

Ist $\mathbb{F} = \langle F, (f_i)_{i \in I} \rangle$ eine Peanoalgebra über der Menge X, so ist sp(σ), der Support eines Elementes $\sigma \in F$, die kleinste Teilmenge von X, in deren Erzeugnis das Element σ liegt.

Ist $\Delta = (K_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, so sei $L = 1 \ \bigcup_{i \in I} K_i$ und $M(\Delta) = \bigcup_{n < \omega} L^n$.

Es wurden ohne Auswahlaxiom die folgenden Sätze bewiesen:

1a) Ist $\Delta = (K_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, $\langle F, (f_i)_{i \in I} \rangle$ Peanoalgebra vom Typ Δ über X, dann existiert zu jedem $\sigma \in F$ eine Abbildung χ von $M(\Delta)$ in X, so daß $sp(\sigma) \subseteq \chi(M(\Delta))$.

1b) Ist $\Delta = \langle \alpha_\xi \rangle_{\xi < \beta}$ eine ordinale Ordinalzahlfolge, $\langle F, (f_\xi)_{\xi < \beta} \rangle$ Peano-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

algebra vom Typ Δ über X, so existiert zu jedem $\sigma \in F$ eine injektive Abbildung $\mathfrak{b}$ von $sp(\sigma)$ in $M(\Delta)$, ferner existieren $card(sp(\sigma))$ und $card(M(\Delta))$ und es ist $card(sp(\sigma)) \subseteq card\, d(M(\Delta))$.

2) Ist $\Delta = \langle \alpha_\xi \rangle_{\xi < \beta}$ eine ordinale Ordinalzahlfolge, $\langle F, (f_\xi)_{\xi < \beta} \rangle$ Peano-algebra vom Typ Δ, A und B Algebren desselben Typs, p ein Homomorphismus von F in B, q ein Epimorphismus von A auf B, dann gibt es zu je zwei Elementen σ und τ aus F einen Homomorphismus v von F in A mit $qv(\sigma) = p(\sigma)$ und $qv(\tau) = p(\tau)$.

FELSCHER, W.: Rational equivalences of classes of algebras.

Consider two classes of (abstract, possibly infinitary) algebras $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ of different types Δ^1, Δ^2. A bijection $\mathfrak{F}$ from $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{C}$ is called an equivalence if corresponding algebras have the same carrier. An equivalence $\mathfrak{F}$ is functorial if the functorial isomorphism, induced between the categories defined by $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, commutes with the forgetful functors. An equivalence is rational, if in algebras corresponding unter $\mathfrak{F}$ the (primitive) Δ^2-operations can be defined by Δ^1-terms and the Δ^1-operations can be defined by Δ^2-terms - (where these terms shall depend on $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ only, not on particular algebras).

Theorem 1 (essentially due to Malcev): If $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ contain free algebras with sufficiently many generators, then any functorial equivalence is rational.

Theorem 2: A rational equivalence from $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{C}$ can be extended to a rational equivalence from $\mathfrak{G}(\mathfrak{B})$, the equational closure of $\mathfrak{B}$, onto $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$.

Corollary: If $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ are rationally equivalent and $\mathfrak{B}$ is equationally definable, then so is $\mathfrak{C}$.

Some more related questions were discussed.

BAMMERT, J.: S-Algebren und ihre Anwendungen.

$\sigma = \langle F, S, H \rangle$ heißt formales System, wenn $\langle F, S \rangle$ eine absolut freie Algebra ist und H ein Hüllenoperator über F, derart, daß für Teilmengen $B \subseteq F$ und Endomorphismen g stets gilt: $g(H(B)) \subseteq H(g(B))$.

Gibt es in S speziell eine zweistellige Operation $\rightarrow$ mit $(a \rightarrow a) \in H(\emptyset)$,

$(a \to c) \in H(\{a \to b,\ b \to c\})$, $b \in H(\{a,\ a \to b\})$, $(a \to b) \in H(\{b\})$, so heißt σ quasideduktiv in Bezug auf diese Operation. Für ein quasideduktives System σ wird die Klasse $A(\sigma)$ der S-Algebren zu σ definiert als die Klasse aller $\langle E, T, e\rangle$ derart, daß (i) $\langle E, T\rangle$ eine Algebra ist mit Typ (T) = = Typ (S), $e \in E$, (ii) aus $a \to b = b \to a = e$ folgt $a = b$, (iii) für alle Homomorphismen f von $\langle F, S\rangle$ in $\langle E, T\rangle$ und alle $B \subseteq F$ mit $f(B) \subseteq \{e\}$ gilt $f(H(B)) \subseteq \{e\}$. Die Klasse $A(\sigma)$ ist gegen Subalgebren, Produkte und isomorphe Bilder abgeschlossen.

$\sigma = \langle F, S, H\rangle$ heißt vollständig, wenn $a \in H(B)$ genau dann gilt, wenn für alls S-Algebren $\langle E, T, e\rangle$ und alle Homomorphismen f von $\langle F, S\rangle$ in $\langle E, T\rangle$ mit $f(B) \subseteq \{e\}$ stets auch $f(a) = e$ gilt. Es gilt der Satz:

Ein quasideduktives System ist genau dann vollständig, wenn für jede Operation S_i in S (ihr Typ sei τ_i) und alle Argumentfolgen $(a_\lambda)_{\lambda \in \tau_i}$ und $(b_\lambda)_{\lambda \in \tau_i}$ gilt: $(S_i(a_\lambda)_{\lambda \in \tau_i} \to S_i(b_\lambda)_{\lambda \in \tau_i}) \in H(\{a_\lambda \to b_\lambda \mid \lambda \in \tau_i\})$. Der Beweis benützt die Lindenbaumalgebren des Systems σ für Teilmengen $A \subseteq F$; das sind die Faktoralgebren von $\langle F, S\rangle$ nach den kanonischen Äquivalenzrelationen der Quasiordnungen $\leq_A$, die definiert sind durch: $a \leq_A b$ genau dann, wenn $(a \to b) \in H(A)$. Die Lindenbaumalgebra für $A = \emptyset$ zu einem konsistenten System ist freie S-Algebra über der Basis von $\langle F, S\rangle$.
Für einige spezielle Systeme sind die S-Algebren ohne Bezug auf σ gekennzeichnet. Sind z. B. σ_k, σ_i, σ_p, σ_d, σ_α, σ_q jeweils die Systeme der klassischen, intutionistischen, positiven, derivativen Aussagenlogik, der derivativen Aussagelogik mit α-stelligen Konjunktionen und Disjunktionen, der Quantenlogik, so ist $A(\sigma_k)$ die Klasse aller Booleschen Algebren, $A(\sigma_i)$ die aller Brouwerschen Verbände, $A(\sigma_p)$ die aller subjunktiven (=pseudo-relativkomplementären) Verbände, $A(\sigma_d)$ die aller geordneten Mengen mit einer Subjunktion, $A(\sigma_\alpha)$ die aller α-vollständigen subjunktiven Verbände, $A(\sigma_q)$ die aller orthokomplementären modularen Verbände mit einer Semisubjunktion (Semisubjunktionen existieren stets).

Auf Grund spezieller algebraischer Sätze lassen sich dann über diese speziellen formalen Systeme weitere Aussagen gewinnen. Die Methode der S-Algebren geht auf Rasiowa und Sikorski zurück.

OSWALD, H.: Freie Strukturen über Axiomensystemen 1.Stufe.

Um freie Algebren in der Modellklasse $M(\Sigma)$ eines Axiomensystems Σ, das beliebige Formeln der Quantorenlogik 1.Stufe enthält, definieren zu können, führt G. Grätzer in seiner Arbeit "Free Algebras over first Order Axiom Systems" (Publications of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci., Bd. 8 (1963)) den Begriff des Inversen in Analogie zur Gruppentheorie ein und definiert damit die Begriffe Σ-Unterstruktur und Σ-Homomorphismus.

LAWVERE, F.W.: Coboolean Categories and Completeness of "Theories".

An elementary theory is defined to be a small category T with finite products containing two objects A, B such that all objects of T are finite products of A's and B's together with two distinguished morphisms $1 \to B$ called "true" and "false" [1 being the empty product] such that for any X, $B \times X = X + X$ with the injections induced by true and false, and such that for any f, φ such that domain (f) = domain (φ), codomain (φ) = = B there is a morphism $\exists_f[\varphi]$: codomain (f) $\to$ B such that for all ψ: codomain (f) $\to$ B:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Y \arrow[d, dashed, "{\exists_f[\varphi]}"] \arrow[dl, phantom, "\text{(not nec. comm.)}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$$\exists_f[f] \vdash_y \psi \text{ iff } \varphi \vdash_x f\psi$$

where $\vdash$ are the ordering relations corresponding to a canonical Boolean structure on each T(X, B) by the assumption $B \times X = X + X$ [where T(X, B) denotes the set of morphisms $X \to B$]. It is shown that "equality" is a special case of this operation $\exists$. Also every first order theory in the usual sense (with =) gives rise to a unique such T, and every T arises from (many but "equivalent") first order theories. A model of T is a functor $M: T \to \varphi$ into the category of sets which preserves products, takes B to a two element set, and which takes $\exists_f[\varphi]$ into the (characteristic function of the) image under (f) M of (the subset whose characteristic function is) (φ) M. The universe of a model M is (A) M and all models are automatically "normal". Defining a sentence of T to be an element of T(1, B), one defines consistency, completeness, and logical validity in the "usual" way.

To prove the completeness theorem, one constructs for any consistent T a morphism $T \to T_I$ of elementary theories where T_I has the property that the representable functor $T_I(1,.)$: $T_I \to \varphi$ is a model. T_I is obtained through use of a prime ideal in the sentences of $\bar{T}$, where $T \to \bar{T}$ is constructed as the adjunction of an adjoint pair as follows: define a τ-theory as an elementary theory, except instead of $\exists$ one has equality $e_Y : Y \times Y \to B$: $e_Y \vdash_{Y \times Y} \psi$ iff $(\text{true})_Y \vdash \Delta\psi$, $\psi : Y \times Y \to B$ beeing arbitrary and $\Delta : Y \to Y \times Y$ beeing the diagonal, and for each $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{\varphi} B$ one has

$$\tau_\varphi[\varphi] = g$$
$$fgf = f$$
$$\varphi \vdash_X fg\varphi$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Y \arrow[l, dashed, shift left, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

A forgetful functor $Th_\tau \to TH_{elem}$ is defined by $\bar{\exists}_f[\varphi] \overset{def}{=} g\varphi \wedge \langle gf, id_Y \rangle e_Y$, which by general algebra has an adjoint.

These developments seem to have the following interest:

1) They are easily adopted to the study of Boolean valued models of higher theories (Even in any category with products, not necessarily J)

2) A precise mathematical object is constructed corresponding to "Sinn-Bedeutung" distinction.

3) It is possible that closer inspection of the constructions yields a proof that the prime ideal theorem implies the generalized completeness theorem (without A.C.).