Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Arbeitsgemeinschaft über lokale analytische Geometrie

24. bis 29. April 1966

Die Tagung wurde von R. Remmert (Göttingen) geleitet.

Teilnehmer:

Behr, H., Göttingen
Brandis, A., Tübingen
Dreß, A., Berlin
Gabriel, P., Straßburg
Hoechsmann, K. Tübingen
Kegel, O.H., Frankfurt
Klingenberg, W., Mainz
Knebusch, M., Hamburg
Kneser, M., Göttingen
Kobayashi, Berkeley - Mainz
Kupisch, H., Saarbrücken
Legrady, Hamburg
Leptin, H., Heidelberg
Puppe, D., Saarbrücken
Thoma, E., Münster
Tillmann, H.G., Mainz
v. Waldenfels, W., Jülich

Die Grundlage dieser Arbeitsgemeinschaft waren Manuskripte von Grauert-Remmert. Außerdem wurden herangezogen:

Séminaire H. Cartan 1960-61, Exp. 18-21 (von Houzel)
(für die Vorträge 1, 4, und 6)

Abhyankar: Local analytic geometry, Acad. Press 1964
(Vortrag 2)

Serre: Faisceaux algébriques cohérents, Ann. Math. 61 (1955)
(Vortrag 4)

Vortragsauszüge:

1. KEGEL, O.H.: Potenzreihenalgebren, Weierstrass'scher Vorbereitungssatz und Weierstrass'sche Formel

k sei ein vollständig bewerteter Körper (Bewertung: $|\ |$), $k\{x_1,\dots,x_n\}$ die k-Algebra der formalen Potenzreihen in n Unbestimmten $x_1,\dots,x_n$. $\mathbb{R}^n_+$ sei die Menge der positiven, reellen n-Tupel, also

$\mathbb{R}^n_+ := \{t = (t_1,\dots,t_n),\ t_\nu \in \mathbb{R},\ t_\nu > 0\}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}^n_+$ wird durch

$\|f\|_t := \Sigma |a_{\nu\dots\nu_n}| t_1 \dots t_n$ eine Norm in $k\{x_1,\dots,x_n\}$ definiert.

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

7

Tagungsbericht

Arbeitsgemeinschaft über lokale analytische Geometrie

24. bis 28. April 1966

Die Tagung wurde von R. Remmert (Göttingen) geleitet.

Teilnehmer:

Behr, H., Göttingen
Brandis, A., Tübingen
Dreß, A., Berlin
Gabriel, P., Straßburg
[illegible], C., Tübingen
Kegel, O.H., Frankfurt
[illegible], W., Mainz
Knebusch, M., Hamburg
Kneser, M., Göttingen
Kobayashi, Berkeley - Mainz
Kupisch, H., Saarbrücken
Logrady, Hamburg
Leptin, H., Heidelberg
Puppe, D., Saarbrücken
Thoma, E., Münster
Tillmann, H.G., Mainz
v. Waldenfels, W., Jülich

Die Grundlage der Arbeitsgemeinschaft waren Manuskripte von Grauert-Remmert. Außerdem wurden herangezogen:

Malgrange: Sém. H. Cartan 1960-61, Exp. 18-21 (von Houzel) (für die Vorträge 1, 4, und 5)

Abhyankar: Local analytic geometry, Acad. Press 1964 (Vortrag 2)

Serre: Faisceaux algébriques cohérents, Ann. Math. 61 (1955) (Vortrag [illegible])

Vortragsauszüge:

1. KEGEL, O.H.: Potenzreihenalgebren, Weierstrass'scher Vorbereitungssatz und Weierstrass'sche Formel

k sei ein vollständig bewerteter Körper (Bewertung: $| \; |$), $k[x_1, \dots$ die k-Algebra der formalen Potenzreihen in n Unbestimmten $x_1, \dots$. $\mathbb{R}_+$ sei [illegible] der [illegible] $\geq$ [illegible], also

$\mathbb{R}_+^n := \{ t = (t_1, \dots, t_n), t_\nu \in \mathbb{R}, t_\nu > 0 \}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}_+^n$ wird durch

$\|f\|_t := \sum |a_{\nu_1 \dots \nu_n}| t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n}$ eine Norm in $k[x_1, \dots, x_n]$ definiert.

$B_t := \{f \mid \|f\|_t < \infty\}$ ist eine Banachsche k-Algebra, und

$k[[x_1,\ldots,x_n]] := \bigcup_{t \in \mathbb{R}^n_+} B_t$ heißt die Algebra der konvergenten Potenzreihen über k in $x_1,\ldots,x_n$.

Es sei nun $t \in \mathbb{R}^+_n$ festgehalten, $B := B_t$ $\| \; \| := \| \; \|_t$ und $B' := k[[x_1,\ldots,x_{n-1}]] \cap B$.

Weierstrass'sche Formel: Sei $g = \sum_0^\infty g_\nu x_n^\nu \in B$, $g_\nu \in B'$; der Koeffizient g_s sei eine Einheit in B, derart daß $\|x_n^s - g \cdot g_s^{-1}\| \leq \varepsilon \cdot t_n^s$, $0 < \varepsilon < 1$. Dann existieren zu jedem $f = \sum_0^\infty f_\nu x_n^\nu \in B$, $f_\nu \in B'$ eindeutig bestimmte Elemente $q \in B$ und $r \in B'[x_n]$ (Polynomring) mit grad $r < s$, so daß gilt: $f = q \cdot g + r$.
Es bestehen die Abschätzungen:

$$\|x_n^s \cdot g_s \cdot q - \sum_s^\infty f_\nu x_n^\nu\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|f\|$$

$$\|r - \sum_0^{s-1} f_\nu x_n^\nu\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|f\| .$$

Sind zusätzlich $g, f \in B'[x_n]$ und ist grad $g = s$, so ist auch $q \in B'[x_n]$.

Weierstrass'scher Vorbereitungssatz: Sei $g = \sum_0^\infty g_\nu x_n^\nu \in B$, $g_\nu \in B$; der Koeffizient g_s sei eine Einheit in B, derart daß $\|x_n^s - g_s^{-1} \cdot g\| \leq \varepsilon \cdot t_n^s$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Dann gibt es ein normiertes Polynom ω s-ten Grades aus $B'[x_n]$, so daß gilt: $g = e \cdot \omega$ mit einer Einheit $e \in B$.

Es bestehen die Abschätzungen: $\|x_n^s - \omega\| \leq 2\varepsilon\, t_n^s$

$$\|g_s^{-1} e - 1\| \leq \frac{2\varepsilon}{1-2\varepsilon} .$$

Ist g ein Polynom in x_n, so auch e.

2. KUPISCH, H.: Folgerungen aus der Weierstrass'schen Formel.

SATZ 1: $k[[x_1,\ldots,x_n]]$ ist noethersch

SATZ 2: $k[[x_1,\ldots,x_n]]$ ist faktoriell (oder ein ZPE-Ring)

$B := \{f \mid \|f\|_1 < \infty\}$ ist eine Banachsche k-Algebra, und

$k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle := \bigcup_{\rho \in R_+^n} B_\rho$ heißt die Algebra der konvergenten Potenzreihen über k in $x_1, \ldots, x_n$.

Es sei nun $\rho \in R_+^n$ festgehalten, $B := B_\rho$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\rho$ und $B' := k\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle \cap B$.

Weierstrass'sche Formel: Sei $g = \sum_0^\infty g_\nu x_n^\nu \in B$, $g_\nu \in B'$; der Koeffizient g_s sei eine Einheit in B, derart daß $\|x_n^s - g \cdot g_s^{-1}\| \leq \varepsilon \cdot \rho_n^s$, $0 < \varepsilon < 1$. Dann existieren zu jedem $f = \sum_0^\infty f_\nu x_n^\nu \in B$, $f_\nu \in B'$, eindeutig bestimmte Elemente $q \in B$ und $r \in B'[x_n]$ (Polynomring) mit grad $r < s$, so daß gilt: $f = q \cdot g + r$.

Es bestehen die Abschätzungen:

$$\|x_n^s \cdot g_s \cdot q - \sum_s^\infty f_\nu x_n^\nu\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|f\|$$

$$\|r - \sum_0^{s-1} f_\nu x_n^\nu\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|f\| .$$

Sind zusätzlich $g, f \in B'[x_n]$ und ist grad $g = s$, so ist auch $q \in B'[x_n]$.

Weierstrass'scher Vorbereitungssatz: Sei $g = \sum g_\nu x_n^\nu \in B$, $g_\nu \in B'$; der Koeffizient g_s sei eine Einheit in B', derart daß $\|x_n^s - g_s^{-1} \cdot g\| \leq \varepsilon \cdot \rho_n^s$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Dann gibt es ein normiertes Polynom ω s-ten Grades aus $B'[x_n]$, so daß gilt: $g = e \cdot \omega$ mit einer Einheit $e \in B$.

Es bestehen die Abschätzungen: $\|x_n^s - \omega\| \leq 2\varepsilon \rho_n^s$

$$\|g_s^{-1} e - 1\| \leq \frac{2\varepsilon}{1-2\varepsilon} .$$

Ist g ein Polynom in x_n, so auch e.

2. KUPISCH, H.: Folgerungen aus der Weierstrass'schen Formel.

SATZ 1: $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ ist noethersch

SATZ 2: $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ ist faktoriell (oder ein ZPE-Ring)

SATZ 3: φ sei ein k-Algebrenhomomorphismus von $k[[x_1,\dots,x_m]]$ in $k[[x_1,\dots,x_n]]$, $d\varphi$ die Matrix

$$\left(\frac{\partial(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_m))}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right):$$

φ ist injektiv, falls $m \leq n$ und $\operatorname{rg} d\varphi = m$ und

φ ist surjektiv, falls $m \geq n$ und $\operatorname{rg} d\varphi = n$.

SATZ 4: Es seien $f_1,\dots,f_r \in k[[x_1,\dots,x_n]]$, $r \leq n$ Nichteinheiten (d.h. $f_\rho(0,\dots,0) \neq 0$) und

$$\det \frac{\partial(f_1,\dots,f_r)}{\partial(x_1,\dots,x_r)}(0,\dots,0) \neq 0.$$

Dann gibt es einen Epimorphismus τ von $k[[x_1,\dots,x_n]]$ auf $k[[x_{r+1},\dots,x_n]]$, so daß Kern $\tau = (f_1,\dots,f_r)$ und $\tau(x_\nu) = x_\nu$ für $\nu > r$. τ ist eindeutig bestimmt und es ist Kern $\tau = (x_1 - \tau(x_1),\dots,x_r - \tau(x_r))$.

Folgerung (Implizite Funktionen): Die Voraussetzungen seien wie in Satz 4; dann gibt es eindeutig bestimmte Nichteinheiten $g_1,\dots,g_r \in k[[x_{r+1},\dots,x_n]]$, so daß $f_\nu(g_1,\dots,g_r, x_{r+1},\dots,x_n) = 0$ für $\nu = 1,\dots,r$.

SATZ 5 (Henselsches Lemma): k sei algebraisch abgeschlossen. $k[[x_1,\dots,x_n]]$ ist ein Henselscher Ring, d.h.:

Ist $\omega(w,x) = w^b + a_1(x)w^{b-1} + \dots + a_b(x) \in k[[x_1,\dots,x_n]][w]$ und gilt $\omega(w,0) = (w-c_1)^{b_1}\dots(w-c_t)^{b_t}$ mit paarweise verschiedenen $c_1,\dots,c_t \in k$, so gibt es normierte Polynome $\omega_j(w,x) \in k[[x_1,\dots,x_n]][w]$, $j = 1,\dots,t$ mit $\omega = \omega_1 \dots \omega_t$, $\omega_j(w,0) = (w-c_j)^{b_j}$. Die ω_j sind eindeutig bestimmt und paarweise teilerfremd in $k[[x_1,\dots,x_n]][w]$.

3. DRESS, A.: Satz von Cartan-Rückert

Definitionen: a) $D \subseteq \mathbb{R}^n_+$ heißt Dreiecksmenge: $\Longleftrightarrow \exists\, \delta_n > 0$ und für jedes $\nu = 1,\dots,n-1$ eine positive, monoton wachsende Funktion $\delta_\nu(t_{\nu+1},\dots,t_n)$, so daß D die Menge $\{(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid t_n < \delta_n,\ t_{n-1} < \delta_{n-1}(t_n),\dots, t_1 < \delta_1(t_2,\dots,t_n)\}$ enthält.

SATZ 3: φ sei ein k-Algebrenhomomorphismus von $k[[x_1,\dots,x_m]]$ in $k[[x_1,\dots,x_n]]$, $d\varphi$ die Matrix

$$\left(\frac{\partial(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_m))}{\partial(x_1,\dots,x_n)} \right)$$

φ ist injektiv, falls $m \le n$ und $rg\, d\varphi = m$ ist,
φ ist surjektiv, falls $n \le m$ und $rg\, d\varphi = n$.

SATZ 4: Es seien $f_1,\dots,f_r \in k[[x_1,\dots,x_n]]$, $r \le n$, Nichteinheiten (d.h. $f_i(0,\dots,0) = 0$) mit

$$\det \frac{\partial(f_1,\dots,f_r)}{\partial(x_1,\dots,x_r)}(0,\dots,0) \neq 0.$$

Dann gibt es einen Epimorphismus r von $k[[x_1,\dots,x_n]]$ auf $k[[x_{r+1},\dots,x_n]]$ mit Kern $r = (f_1,\dots,f_r)$ und $r(x_i) = x_i$ für $i = r+1,\dots,n$. r ist eindeutig bestimmt und es ist Kern $r = (x_1 - r(x_1),\dots,x_r - r(x_r))$.

Folgerung (implizite Funktionen): Die Voraussetzungen seien wie in Satz 4: dann gibt es eindeutig bestimmte Nichteinheiten $g_1,\dots,g_r \in k[[x_{r+1},\dots,x_n]]$, so daß $f_i(g_1,\dots,g_r, x_{r+1},\dots,x_n) = 0$ für $i = 1,\dots,r$.

SATZ 5 (Weierstraßsches Lemma): k sei algebraisch abgeschlossen. $k[[x_1,\dots,x_n]]$ ist ein Henselscher Ring, d.h.:
Ist $f(x,w) = w^d + a_1(x)w^{d-1} + \dots + a_d(x) \in k[[x_1,\dots,x_n]][w]$ und gilt $f(0,w) = (w-c_1)^{d_1} \dots (w-c_t)^{d_t}$ mit paarweise verschiedenen $c_1,\dots,c_t$, so gibt es normierte Polynome $f_i(x,w) \in k[[x_1,\dots,x_n]][w]$, $i = 1,\dots,t$ mit $f_i(0,w) = (w-c_i)^{d_i}$. Die f_i sind eindeutig bestimmt und $f = f_1 \cdots f_t$, die f_i paarweise teilerfremd in $k[[x_1,\dots,x_n]][w]$.

8. DRESS, A.: Satz von Cartan-Rückert

Definition: a) $D \subseteq \mathbb{R}^n_+$ heißt Durchschnittsmenge: $\Leftrightarrow$ es gibt $\delta_n > 0$ und für jedes $\nu = 1,\dots,n-1$ eine positive, monoton wachsende Funktion $\varphi_\nu(t_{\nu+1},\dots,t_n)$, so daß D die Menge $\{(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid$
$t_n < \delta_n, t_{n-1} < \varphi_{n-1}(t_n), \dots, t_1 < \varphi_1(t_2,\dots,t_n)\}$ enthält.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

b) $T \subseteq k^n$ heißt p-Menge: $\Longleftrightarrow$ T enthält eine Zariski-offene Teilmenge von k^n.

c) Es bezeichne

$$\Delta_n = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Bigg\} n \right\} \quad \text{und} \quad \Delta'_n = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 & * \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}_{n+1} \Bigg\} n+1 \right\};$$

dann ist: $\Delta'_n \cong k^n$ und $\Delta_{n+1} / \Delta'_n \cong \Delta_n$. $T \subseteq \Delta_{n+1}$, $n \geq 2$ heißt q-Menge: $\Longleftrightarrow \exists$ p-Menge $T' \subseteq \Delta'_n$ und zu jedem $\varphi \in \Delta'_n$ eine q-Menge $T''_\varphi \subseteq \Delta_n (\subseteq \Delta_{n+1})$, so daß $T''_\varphi \cdot \varphi \subseteq T$ für $\varphi \in T'$.

$T \subseteq \Delta_2$ heißt q-Menge, falls T p-Menge ($\Delta_2 \cong k_1$).

HILFSSATZ: Ist k unendlich und nicht trivial bewertet, so gilt

1) q-Mengen sind dicht in Δ_n.
2) Zariski-offene Teilmengen sind q-Mengen.
3) Durchschnitte zweier q-Mengen sind q-Mengen.

SATZ (Cartan-Rückert): M sei ein Teilmodul eines endlich erzeugten freien $k[[x_1, \ldots, x_n]]$-Moduls. Dann existiert eine q-Menge $Q_M \subseteq \Delta_n$ und zu jedem Erzeugendensystem $h_1, \ldots, h_m$ von M und jedem $\sigma \in Q_M$ eine Dreiecksmenge $D = D_\sigma(h_1, \ldots, h_m)$ und eine Schrankenfunktion $L : D \to \mathbb{R}_+$, so daß für jedes $h \in M$ Elemente $a_1, \ldots, a_m \in k[[x_1, \ldots, x_n]]$ existieren mit

$$h = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu h_\mu \quad \text{und} \quad \|\sigma(a_\mu)\|_t \leq L(t, \sigma) \|\sigma(h)\|_t \quad \text{für } t \in D.$$

Folgerung: Ist M ein Ideal in $k[[x_1, \ldots, x_n]]$, so ist $M \cap B_t$ abgeschlossen in B_t.

4. BRANDIS, A.: Kohärente Garben, Kohärenz der Strukturgarbe

Es seien X ein topologischer Raum, $\mathfrak{A}$ eine Ringgarbe über X, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{A}$-Moduln; $\mathfrak{A}_U$ oder $\mathfrak{A}/U$ bezeichne die Einschränkung von $\mathfrak{A}$ auf $U \subseteq X$.

Definitionen: a) $\mathfrak{M}$ heißt endlich, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x und eine natürliche Zahl p gibt, so daß die Folge $\mathfrak{A}^p_U \to \mathfrak{M}_U \to 0$ exakt ist.

b) $T \subset$ [illegible] heißt p-Menge: $\Longleftrightarrow$ T enthält eine Zariski-offene Teilmenge von [illegible].

c) Es bezeichne

$$\Delta_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ [illegible] & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \Delta'_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ [illegible] & & 1 \end{pmatrix} \right\} ;$$

dann ist: $\Delta_n \cong k^{n}$ [illegible] und $\Delta_{n+1} \setminus \Delta'_n \cong$ [illegible], $T \subset \Delta_{n+1}$, $n \geq 2$ heißt q-Menge: $\Longleftrightarrow$ [illegible] p-Menge $T' \subset \Delta'_n$ und zu jedem $\varphi \in \Delta'_n$ eine p-Menge $T_\varphi \subset$ [illegible], so daß $T_\varphi \cdot \varphi \subset T$ für $\varphi \in T'$.
$T \subset \Delta_2$ heißt q-Menge, falls T p-Menge ($\Delta_2 \cong k_1$).

HILFSSATZ: Ist k unendlich und nicht trivial bewertet, so gilt

1) q-Mengen sind dicht in Δ_n.

2) Zariski-offene Teilmengen sind q-Mengen.

3) Durchschnitte zweier q-Mengen sind q-Mengen.

SATZ (Cartan-[illegible]): M sei ein Teilmodul eines endlich erzeugten freien [illegible] $[x_1, \dots, x_n]$-Moduls. Dann existiert eine q-Menge [illegible] und zu jedem Erzeugendensystem $h_1, \dots, h_m$ von M und jedem [illegible] eine Dreiecksmatrix $D = D(h_1, \dots, h_m)$ und eine Schrankenfunktion L [illegible], so daß für jedes [illegible] $\in M$ Elemente $a_1, \dots, a_m$ [illegible] existieren mit

$$h = \sum_{i=1}^{m} a_i h_i \quad \text{und} \quad [illegible] \quad \text{für } i \in I.$$

Folgerung: Ist M ein Teilmodul in $k[x_1, \dots, x_n]$, so ist $M \cap F_i$ alg. geschlossen in B_i.

4. BRADIS, A.: Kohärente Garben, Kohärenz der Strukturgarbe

Es sei X ein topologischer Raum, [illegible] eine Ring[illegible] über X, und [illegible]-Modul: [illegible] bezeichne die Einschränkung von [illegible] auf $U \subset X$.

Definitionen: a) [illegible] heißt endlich, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x und eine natürliche Zahl p gibt, so daß die Folge $\mathcal{O}_U^p \to$ [illegible] $\to 0$ exakt ist.

b) $\mathfrak{N}$ heißt relationsendlich, wenn zu jedem $U \subseteq X$ und beliebigen Schritten $s_1, \ldots, s_r \in \Gamma(U, \mathfrak{N})$ die Ralationengarbe $\mathfrak{R}(s_1, \ldots, s_r)$ endlich ist.

c) $\mathfrak{N}$ heißt kohärent, wenn es endlich und relationsendlich ist.

Eigenschaften kohärenter Garben:

a) Sind in einer exakten Folge $0 \to \mathfrak{L} \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{N} \to 0$ zwei Moduln kohärent, so auch der dritte.

b) Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ kohärente $\mathfrak{A}$-Moduln und ist $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ einHomomorphismus, so sind auch im φ, ker φ und coker φ kohärent.

c) Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ kohärent, so auch $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

SATZ (Oka): Ist k ein vollständig bewerteter Körper, so ist die Garbe $\mathfrak{O}_{k^n}$ der Keime holomorpher Funktionen über k^n kohärent.

5. PUPPE, D.: Kohärenz der Bildgarben unter endlichen analytischen Abbildungen

I. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zweier top. Räume heißt endlich, wenn sie stetig und abgeschlossen ist und für jedes $y \in Y$ die Faser $f^{-1}(y)$ endlich ist. Ist F eine Garbe über X, $f : X \to Y$, so ist das direkte Bild $f_o F$ von F eine Garbe über Y, die durch $\Gamma(V, f_o f) = \Gamma(f^{-1} V, F)$ für $V \subseteq Y$ gegeben ist.
Ist X hausdorffsch und f endlich, so gilt

a) Ein Halm des direkten Bildes ist direktes Produkt der Halme in den Urbildern: d.h. $(f_o F) = \prod_{x \in f^{-1}(y)} F_x$

b) f_o ist ein exakter Funktor.

II. Sei Q offene Umgebung von $p = (y, c) \in k^n \times k^m$, S eine kohärente Garbe über Q, p isolierter Punkt von $\mathrm{Tr}\, S \cap (y \times k^m)$ ($\mathrm{Tr}\, S$ = Träger von S). Dann gibt es Polizylinder Z und W um y bzw. c, so daß $U = Z \times W \subseteq Q$ und es gilt

a) Die Projektion $\varphi : Z \times W \to Z$ induziert eine endliche Abbildung von $\mathrm{Tr}\, S \cap U$ in Z.

b) $\varphi_o(S_U)$ ist kohärent.

III. Ein analytischer Raum ist ein Paar $(X, \mathfrak{O}_x)$, wo X topologischer Raum und $\mathfrak{O}_x$ Garbe über X ist, falls es eine offene Überdeckung $\{U\}$ von X gibt, so daß $(U, \mathfrak{O}_x \mid U) \cong (A, H)$ ist, wobei A Nullstellengebilde eines endlichen Ideals I von $\mathfrak{O}_{k^n} \mid V$ und $H = (\mathfrak{O}_{k^n} \mid V/I)$ ist.

Eine analytische Abbildung von $(X, \mathfrak{O}_x)$ in $(\mathcal{Y}, \mathfrak{O}_{\mathfrak{y}})$ ist gegeben durch ein Paar von Abbildungen: $f: X \to \mathcal{Y}$ und $f_* : \mathfrak{O}_{\mathfrak{y}} \to f_o \mathfrak{O}_x$.

SATZ: Ist X hausdorffsch und $\psi : X \to \mathcal{Y}$ eine endliche analytische Abbildung analytischer Räume (über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper) und S eine kohärente Garbe über X, so ist $\psi_o S$ kohärent über $\mathcal{Y}$.

Korollar: $\psi(X)$ ist analytische Menge.

6. GABRIEL, P.: Endliche analytische Räume über S und kohärente $\mathfrak{O}_S$-Algebren

Sind X und S analytische Räume, $p : X \to S$ eine analytische Abbildung, dann heißt das Paar (X, p) ein analytischer Raum über S. Jedem solchen Raum kann man das direkte Bild seiner Strukturgarbe $\mathfrak{O}_x$ zuordnen: $\Gamma(X) := p_o(\mathfrak{O}_x)$. $\Gamma(X)$ ist eine Algebrengarbe über $\mathfrak{O}_S$ und Γ ist ein kontravarianter Funktor.

Theorem: Γ liefert eine Antiäquivalenz zwischen der Menge der analytischen Räume über S mit endlicher Strukturabbildung p und der Menge der kohärenten $\mathfrak{O}_S$-Algebren.

Die inverse Abbildung Sp (Spektrum), die jeder $\mathfrak{O}_S$-Algebra $\mathfrak{A}$ einen analytischen Raum $\operatorname{Sp}\mathfrak{A}$ über S zuordnet, wird durch Lösung des folgenden universellen Problems gewonnen:

Gesucht ist ein Tripel $(\operatorname{Sp}\mathfrak{A},\ p_{\mathfrak{A}} : \operatorname{Sp}\mathfrak{A} \to S,\ \varphi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \to \Gamma \operatorname{Sp}\mathfrak{A})$ (wobei $\operatorname{Sp}\mathfrak{A}$ ein anal. Raum, $p_{\mathfrak{A}}$ eine anal. Abbildung und $\varphi_{\mathfrak{A}}$ ein $\mathfrak{O}_S$-Algebrenhomomorphismus sein soll), so daß für jedes $\psi : \mathfrak{A} \to \Gamma(X)$ genau ein $\varphi : X \to \operatorname{Sp}\mathfrak{A}$ existiert, derart daß die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \operatorname{Sp}\mathfrak{A} \arrow[dl, "p_{\mathfrak{A}}"] \\ & S & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Gamma(X) & & (\operatorname{Sp}\mathfrak{A}) \arrow[ll, dashed, "\Gamma\varphi"'] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi_{\mathfrak{A}}"'] & \end{tikzcd}$$

SATZ: Falls $\mathfrak{A}$ kohärent ist, existiert eine Lösung.

Zum Beweis zeigt man Folgendes:

a) Die Einschränkungen einer globalen Lösung sind lokale Lösungen.

b) Ein globales Datum, das lokal · Lösung ist, ist auch global Lösung.

c) Lokale Lösungen lassen sich "verheften".

Eine lokale Lösung bekommt man so: Für genügend kleines V ist $\mathfrak{A}/V$ von der Form $\mathfrak{O}_V[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_r)$ mit $\mathfrak{O}_V = \mathfrak{O}_S/V$ und $F_\rho \in \Gamma(V, \mathfrak{O}_V)[X_1, \ldots, X_n]$. Dann setzt man

$Sp\mathfrak{A} = N_{k^n \times S}(F_1, \ldots, F_r)$ (N = Nullstellengebilde).

7. KNEBUSCH, M.: Dimensionstheorie analytischer Räume

Ist A ein lokaler, noetherscher Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so definiert man die (Chevalley-)Dimension von A durch

$\dim A := \min\{r \mid \exists \{x_1, \ldots, x_r\} \subset \mathfrak{m}, \; {}^{A}/(x_1, \ldots, x_r) \text{ artinsch}\}$

Ist (X, H) ein analytischer Raum, so definiert man die Dimension von X im Punkt x durch $\dim_x X := \dim H_x$.

Wichtiges Hilfsmittel für die Induktionsbeweise ist das "Aktive Lemma": $f \in A$ heißt aktiv, falls f nicht in der Vereinigung der minimalen Primideale von A enthalten ist. Ist f aktiv und $f \in$, so gilt: $\dim A/fA = \dim A - 1$.

THEOREM I: X und Y seien analytische Räume, M analitische Menge in X, $\psi: X \to Y$ sei endlich. Dann ist $\dim_y \psi(M) = \max_{x \in \psi^{-1}(y)} \dim_x M$.

THEOREM II: $\dim_x X = d \iff \exists$ Umgebung U von x und eine endliche, in x offene Abbildung $\varphi: U \to G \subseteq k^d$.

Ein lokaler, noetherscher Ring A heißt reindimensional, wenn für alle minimalen Primideale $\mathfrak{p}$ von A gilt: $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim A$. Ein analytischer Raum X heißt reindimensional in x, wenn die Abbildung $z \to \dim_z X$ für alle z aus einer Umgebung von x konstant ist.

THEOREM III: Gleichwertig sind (für einen analytischen Raum (X, H))

a) H_x ist rein-d-dimensional.

b) X ist in x rein-d-dimensional.

c) $\exists$ Umgebung U von x und eine endliche offene Abbildung $\varphi: U \to G \subseteq k^d$.

8. WALDENFELS, v. W., - KNESER, M.: Kohärenz der Idealgarbe

SATZ (Cartan-Oka): Die Idealgarbe $i(A)$ einer analytischen Menge A in einem analytischen Raum X ist kohärent.

Als Folgerung erhält man die Charakterisierung der analytischen Mengen als lokale Nullstellengebilde endlich vieler analytischer Funktionen. Der Beweis beruht auf dem folgenden

LEMMA: Die analytische Menge A sei enthalten in der offenen Menge G des k^n, $a \in A$ sei ein irreduzibler Punkt. Dann existieren eine Umgebung U von a und Funktionen $f_1, \ldots, f_m$, $\Delta \in \Gamma(U, O)$, so daß

1. $U \cap A = N(f_1, \ldots, f_m)$, $i(A)_a = (f_1, \ldots, f_m)_a$.
2. $A' := N(\Delta) \cap A$ liegt nirgends dicht in A.
3. $i(A)_c = (f_1, \ldots, f_m)_c$ für $c \in U \cap (A - A')$.

Es wurden zwei Beweise dieses Lemmas gegeben, der erste stützte sich auf den

HILFSSATZ: Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ mit den Eigenschaften

a) $\mathfrak{a} \subseteq (x_1, \ldots, x_n)$,
b) $\mathfrak{a} \supseteq (x_1, \ldots, x_m)$, $m \leq n$,
c) $\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x_\nu} \subseteq \mathfrak{a}$ für $\nu > m$,
d) falls Charakteristik $k \neq 0$, ist $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ (Radekal), so ist $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_m)$.

Zum zweiten Beweis wurde verwendet, daß H_a (H sei Strukturgarbe von A) endlich und separabel über $k[[x_1, \ldots, x_d]]$ ist. Dann hat man normierte separable Polynome $f_i(x_i; x_1, \ldots, x_d) \in \Gamma(U, O)[x_i]$ für $i = d+1, \ldots, n$ und eine Umgebung U von a. Es gilt: $N(f_{d+1}, \ldots, f_n) \supseteq U \cap A$ (dies genügt statt Eigenschaft 1 des Lemmas); ist Δ_i die Diskriminante von f_i, so setzt man $\Delta := \prod_{i=d+1}^{n} \Delta_i$ (woraus sofort 2 folgt).

9. REMMERT, R.: Anwendungen des Satzes von Cartan-Oka

Sei $M \subseteq X$ eine analytische Menge; $M(j) := \{x \in M \mid \dim_x M \geq j\}$ ist

8. WALDENFELS, v. W., - KNESER, M.: Kohärenz der Idealgarbe

SATZ (Cartan-Oka): Die Idealgarbe $I(A)$ einer analytischen Menge A in einem analytischen Raum X ist kohärent.

Als Folgerung erhält man die Charakterisierung der analytischen Mengen als lokale Nullstellengebilde endlich vieler analytischer Funktionen. Der Beweis beruht auf dem folgenden

LEMMA: Die analytische Menge A sei irreduzibel in der offenen Menge $G \subset \mathbb{C}^n$, $0 \in A$ sei ein irreduzibler Punkt. Dann existieren eine Umgebung U von 0 und Funktionen $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(U, 0)$, so daß

1. $U \cap A = N(f_1, \dots, f_m)$, $I(A)_0 = (f_1, \dots, f_m)_0$.
2. $S := N(\ldots) \cap A$ liegt nirgends dicht in A.
3. $I(A)_c = (f_1, \dots, f_m)_c$ für $c \in U \cap (A - S)$.

Es wurden zwei Beweise dieses Lemmas gegeben, der erste stützte sich auf den

[illegible]SATZ: Ist a ein Ideal in $K[[x_1, \dots, x_n]]$ mit der Eigenschaft:

a) $a \subseteq (x_1, \dots, x_n)$,

b) $a \cap K[[x_1, \dots, x_m]] = 0$, $m \leq n$,

c) $\frac{\partial a}{\partial x_\nu} \subseteq a$ für $\nu > m$,

d) falls Charakteristik $\neq 0$, ist $a = \sqrt{a}$ (Radekal), so ist

$a = (x_{m+1}, \dots, x_n)$.

Zum zweiten Beweis wurde verwendet, daß H_a ([illegible] sei Strukturgarbe [illegible]) endlich [illegible] separabel über $K[[x_1, \dots, x_d]]$ ist. Dann hat man normierte separable Polynome $f_i(x_i; x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{O}(U, 0)[x_i]$ für $i = d+1, \dots, n$ und eine Umgebung U von 0. Es gilt: $(f_{d+1}, \dots, f_n) \subseteq I$ [illegible] (dies genügt statt Kohärenz [illegible] des Lemmas); ist Δ_i die Diskriminante von f_i, so setzt man $\Delta := \prod_{i=d+1} \Delta_i$ (woraus sofort 2 folgt).

9. [illegible], A.: Anwendung des Satzes von Grauert-Oka

Sei $M \subseteq X$ eine analytische Menge; $M(j) := \{x \in M \mid \dim_x M \leq j\}$ ist eine analytische Menge; $M_j := \overline{M(j) - M(j+1)}$ ist ebenfalls analytisch und heißt j-dimensionale Komponente von M.

(X, H) sei ein analytischer Raum, die Einbettungsdimension von X im Punkt x wird definiert durch $\mathrm{eib}_x X := \dim(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$, wo $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal von H_x ist. Es gilt: $\mathrm{eib}_x X \geq \dim_x X$.

Ein Punkt $x \in X$ heißt regulär, wenn H_x isomorph einer Potenzreihenalgebra ist. x ist genau dann regulär, wenn $\mathrm{eib}_x X = \dim_x X$ ist.

Jacobi-Kriterium

$k[[x_1, \dots, x_n]] / \mathfrak{a} \cong k[[x_1, \dots, x_d]] \Longleftrightarrow$ Jacobirang von $\mathfrak{a} = n - \dim (k[[x_1, \dots, x_n]] / \mathfrak{a}$

$\mathfrak{n}(H)$ bezeichne das Nilradikal von H; X heißt reduziert, falls $\mathfrak{n}(H) = 0$ ist.

S(X) bezeichne den singulären Ort von X; falls X rein-d-dimensional ist, ist $S(X) = \{x \in X \mid \mathrm{eib}_x X > d\}$, im allgemeinen ist

$S(X) = \bigcup_{i \neq j}^{\infty} (X_i \cap X_j) \cup \mathrm{Tr}(\mathfrak{n}(H)) \cup \bigcup_{j \neq o}^{\infty} S(X_j)$.

Es gilt: a) S(X) ist eine analytische Menge.

b) Ist X reduziert, so ist S(X) nicht dicht in X.

10. REMMERT, R.: Normale Punkte und Normalisierung

Normalitätskriterium für Ringe:

R sei ein noetherscher, reduzierter Ring, $\hat{R}$ die ganz-abgeschlossene Hülle von R, $\mathfrak{a}$ sei ein Ideal von R, das einen Nichtnullteiler enthält. Dann gibt es eine Einbettung σ von $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ in Q = Quotientenring von R derart, daß $R \subseteq \mathrm{Im}\,\sigma = \{q \in Q \mid q\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}\} \subseteq \hat{R}$. Ist ferner $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$, so ist $\mathrm{Im}\,\sigma = \{q \in \hat{R} \mid q\mathfrak{a} \subseteq R\}$, gilt außerdem: zu jedem $h \in R \; \exists t: h\mathfrak{a}^t \subseteq R$, so folgt: R ist normal $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,\sigma = R$.

Sei nun (X, H) ein reduzierter analytischer Raum, I ein Ideal von H, so daß I_x einen Nichtnullteiler enthält, dann gibt es eine Einbettung σ von Hom(I, I) in Q(H) und $\mathrm{Im}\,\sigma$ ist kohärent.

Die Idealgarbe $I = i[S(X)]$ des singulären Ortes erfüllt die obigen Bedingungen: a) Es ist $I = \sqrt{I}$, b) zu $h_n \in \hat{H}_x \; \exists t: h_x I_x^m \subseteq H_x$.

SATZ I (Oka): Die nicht normalen Punkte von (X, H) bilden eine analytische Menge, die im singulären Ort enthalten ist.

SATZ 2: Ist X normal, so ist der singuläre Ort S(X) wenigstens 2-codimensional.

SATZ 3: Zu einem reduzierten analytischen Raum (X, H) existiert eine Normalisierung, d.h. ein analytischer Raum $(\hat{X}, \hat{H})$, so daß $\hat{H}_x$ reduziert und normal ist und eine Abbildung von $(\hat{X}, \hat{H})$ in (X, H).

Man beweist zunächst, daß die Normalisierungsgarbe $\hat{H}$ kohärent ist und setzt $\hat{X} = \mathrm{Sp}\, \hat{H}$ (vgl. Vortrag 6).

H. Behr