Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

8

Tagungsbericht

Grundlagen der Geometrie

30. Mai bis 4. Juni 1966

Unter der Leitung der Herren Professoren F. Bachmann (Kiel), H. Freudenthal (Utrecht) und E. Sperner (Hamburg) fand die traditionelle Pfingsttagung über "Grundlagen der Geometrie" in der Woche vom 30. 5. bis 4.6.1966 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Das Interesse an dieser Tagung äußerte sich in diesem Jahr an der hohen Teilnehmerzahl (41) und in dem sehr umfangreichen Vortragsprogramm (28 Vorträge). Erfreulicherweise nahm auch eine größere Anzahl ausländischer Gäste teil.

Neben dem mathematischen Programm, das durch Diskussionen und persönliche Gespräche bereichert wurde, kam der gesellschaftliche Teil nicht zu kurz. Ein gemeinsamer Ausflug führte alle Teilnehmer nach Alpirsbach.

Teilnehmer:

Aczél, J., Prof. Dr. (Giessen)
Arnold, H.J., Dr. (Bochum)
Bachmann, F., Prof. Dr. (Kiel)
Benz, W., Prof. Dr. (Frankfurt)
Biallas, D., Dr. (Hamburg)
Bollow, B. (Darmstadt)
Breitsprecher, S. (Giessen)
Bröcker, L. (Kiel)
Chen, Yi (Frankfurt)
Coxeter, H.S.M., Prof. Dr. (Amsterdam)
Dicuonzo, V., Dr. (Rom)
Ewald, G., Prof. Dr. (Bochum)
Friedlein, H.R. (Bochum)
Freudenthal, H., Prof. Dr. (Utrecht)
Götzky, M., Dr. (Kiel)
Goldenbaum, D. (Darmstadt)

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

10

Tagungsbericht

Grundlagen der Geometrie

30. Mai bis 4. Juni 1966

Unter der Leitung der Herren Professoren F. Bachmann (Kiel), H. Freudenthal (Utrecht) und E. Sperner (Hamburg) fand die traditionelle Arbeitstagung über "Grundlagen der Geometrie" in der Woche vom 30.5. bis 4.6.1966 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Das Interesse an dieser Tagung äußerte sich in diesem Jahr in der hohen Teilnehmerzahl (41) und in dem sehr umfangreichen Vortragsprogramm (35 Vorträge). Erfreulicherweise nahm auch eine größere Anzahl ausländischer Gäste teil.

Neben dem mathematischen Programm, das durch Diskussionen und persönliche Gespräche bereichert wurde, kam der gesellschaftliche Teil nicht zu kurz. Ein gemeinsamer Ausflug führte alle Teilnehmer nach Alpirsbach.

Teilnehmer:

Aczél, J., Prof.Dr. ([illegible])
Arnold, H.J., Dr. (Bochum)
Bachmann, F., Prof.Dr. (Kiel)
Benz, W., Prof.Dr. (Frankfurt)
[illegible], E., Dr. (Hamburg)
Bollow, B. (Darmstadt)
Breitsprecher, S. (Giessen)
Bröcker, L. (Kiel)
[illegible] (Frankfurt)
Coxeter, H.S.M., Prof.Dr. (Amsterdam)
[illegible], V., Dr. (Köln)
Ewald, G., Prof. Dr. (Bochum)
Friedlein, H.H. (Bochum)
Freudenthal, H., Prof. Dr. (Utrecht)
Götzky, M., Dr. (Kiel)
Gold[illegible], D. ([illegible])

Grenzdörffer, J. (Kiel)

Hering, Ch., Dr. (Frankfurt)

Hughes, D.R., Prof. Dr. (London)

Joussen, J., Dr. (Hamburg)

Junkers, W. (Bonn)

Karzel, H., Prof. Dr. (Hamburg)

Kinder, H., Dr. (Kiel)

Klopsch, P. (Kiel)

Lenz, H., Prof. Dr. (München)

Lingenberg, R., Prof. Dr. (Darmstadt)

Livingstone, Prof. Dr. (London)

Mannzen, A. (Kiel)

Mäurer, H., Dr. (Darmstadt)

Meissner, H., Dr. (Hamburg)

Misfeld, J. (Hamburg)

Nolte, W., Dr. (Barsinghausen)

Pieper, I. (Hamburg)

Ruoff, D., Dr. (Kiel)

Schütte, K., Prof. Dr. (München)

Seidel, J.J., Prof. Dr. (Eindhoven)

Sperner, E., Prof. Dr. (Hamburg)

Vitzthum, K. (München)

Wefelscheid, H., Dr. (Hamburg)

Wode, D. (Hamburg)

Wolff, H., Dr. (Altenholz)

Herr Prof. Dr. L.A. Rosati (Modena) und Herr Dr. B. Klotzek (Potsdam) hatten Referate angemeldet, konnten aber leider an der Tagung nicht teilnehmen; ihre Vortragsauszüge werden hier mit abgedruckt.

Vortragsauszüge:

ACZEL, J.: Eine Verallgemeinerung der Charakterisierung projektiver Transformationen als allgemeine Kollineationen

Gegeben sind vier Geraden allgemeiner Lage auf einer Ebene; C bezeichne ihre Vereinigungsmenge. Jede ein-eindeutige (diese Voraussetzung kann abgeschwächt werden) Abbildung, die kollineare Punkte von $\underline{C}$ in

Grenzdörffer, J. (Kiel)

Hering, Ch., Dr. (Frankfurt)

Hughes, D.R., Prof. Dr. (London)

Jonsson, J., Dr. (Hamburg)

Junkers, W. (Ruhr)

Kunzel, H., Prof. Dr. (Hamburg)

Kinder, H., Dr. (Kiel)

Klapech, [illegible] (Kiel)

Lams, H., Prof. Dr. (München)

Lingenberg, R., Prof. Dr. (Darmstadt)

Livingstone, Prof. Dr. (London)

Mannzen, A. (Kiel)

Maurer, H., Dr. (Darmstadt)

Meissner, H., Dr. (Hamburg)

Misfeld, J. (Hamburg)

Nolte, W., Dr. (Recklinghausen)

Piper, L. (Hamburg)

Ruoff, D., Dr. (Kiel)

Schütte, K., Prof. Dr. (München)

Seidel, J.J., Prof. Dr. (Eindhoven)

Sperner, E., Prof. Dr. (Hamburg)

Vitzthum, [illegible] (München)

Wefelscheid, H., Dr. (Hamburg)

Wode, D. (Hamburg)

Wolff, H., Dr. (Altenholz)

Herr Prof. Dr. L.A. Rosati (Modena) und Herr Dr. B. Klotzek (Potsdam) hatten Referate angemeldet, konnten aber leider an der Tagung nicht teilnehmen; ihre Vortragsauszüge werden hier mit abgedruckt.

Vortragsauszüge:

ACZEL, J.: Eine Verallgemeinerung der Charakterisierung projektiver Transformationen als allgemeine Kollineationen.

Gegeben sind vier Geraden allgemeiner Lage auf einer Ebene; G bezeichne ihre Vereinigungsmenge. Jede ein-eindeutige (diese Voraussetzung kann abgeschwächt werden) Abbildung, die jedes Tripel von Punkte von G ir

kollineare überträgt, ist auf C eine projektive Transformation (d.h. etwa eine lineare in homogenen Koordinaten). - Der Satz ist für drei Ausgangsgeraden statt vier nicht mehr gültig; es werden aber auch in diesem Falle alle Kollineationen bestimmt.
(Dies sind Teilergebnisse einer mit Herrn M.A. McKiernan gemeinsamen Arbeit.)

ARNOLD, H.-J.: Zur verbandstheoretischen Kennzeichnung von Kugelgeometrien

Unter einer Kugelgeometrie werden Geometrien verstanden, in denen Punkte $(A, B, C, \ldots)$, Kreise $(a, b, c, \ldots)$, eine Inzidenzrelation und eine Berührrelation (aBc) gegeben sind, welche den von BENZ eingeführten Axiomen genügen:

I. $A \neq B \neq C \neq A \; \exists \, \underline{E}$ ("es gibt eindeutig") $d : d \ni A, B, C.$

II. $aBc \Longrightarrow B \in a,\; B \in c.$

III. $a \ni A \neq B \; \exists \, \underline{E} \; c : aAc,\; B \in c.$

IV. $aBa,\; aBc \Longrightarrow cBa,\; aBc \wedge cBd \Longrightarrow aBd.$

Aus diesen Axiomen folgt, daß die lokalen affinen Strukturen (Wegnahme eines Punktes) schwach affine Räume sind (im Sinne von SPERNER). Setzt man zusätzlich voraus, daß es sich hierbei um affine Räume handelt, und daß ein "Kreis-VEBLENaxiom" gilt, so läßt sich zeigen: Die Verbände der Kugeln sind identisch mit den atomaren, komplementären, vollständigen, gerichtet distributiven, semimodularen Verbänden V, welche dem folgenden Verbindungsaxiom genügen:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V \Longrightarrow \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \bigsqcup_{A_i \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}} (A_0 \cup \ldots \cup A_5)$$

(die A_i bezeichnen Atome, $\bigsqcup$ bezeichnet die mengentheoretische Vereinigung).

BACHMANN, F.: Über die atomare Struktur der n-Ecke

Sei V ein Vektorraum (beliebiger Dimension) über dem Körper Q der rationalen Zahlen. Die n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in V$ werden n-Ecke genannt; sie bilden den Q-Vektorraum V^n.

Es werden zyklisch definierbare, translationsinvariante Klassen von

n-Ecken betrachtet und zu zyklisch definierbaren Abbildungen der Menge V^n aller n-Ecke in sich in Beziehung gesetzt.

Zu jedem n gibt es nur endlich viele solche Klassen und unter ihnen gewisse atomare Klassen, die sich durch Regularitäts-Eigenschaften charakterisieren lassen. Die Anzahl der atomaren Klassen ist gleich der Anzahl der echten Teiler von n, die Anzahl der Klassen gleich 2 hoch dieser Zahl. Jedes n-Eck ist bei "Addition inbezug auf den Schwerpunkt" eindeutig als Summe von mit ihm isobaren n-Ecken aus den atomaren Klassen darstellbar.

BENZ, W.: Ein Linearitätskriterium mit einer Anwendung auf die Physik

Der wichtigste Schritt bei der Herleitung der Lorentztransformationen ist der Beweis der Linearität der Transformationen, die zwei Inertialsysteme relativistisch verknüpfen. Linearitätsbeweise wurden mehrfach gegeben, z.B. von H. Weyl 1923. Die Beweise funktionieren unter starken Differenzierbarkeitsvoraussetzungen und unter starker Heranziehung analytischer Hilfsmittel. Rolf Nevanlinna schrieb in seinem Buch "Raum, Zeit und Relativität" (Basel 1964): "Der Beweis dieser Behauptung erfordert Anwendung der Differential- und Integralrechnung ...". Wir legen einen elementaren Beweis vor, der ohne Hilfsmittel aus der Differential- und Integralrechnung auskommt. Benutzt wird nur die Invarianz der Lichtkegel, eine übliche Anfangsbedingung, und die Existenz eines einzigen Grenzwertes, die gesichert ist, z.B. bei der Existenz einer bestimmten partiellen Ableitung im Ursprung. Der Beweis bezieht sich (wie auch die Nevanlinnasche Bemerkung) auf den Fall der 2-dim. (Raum-Zeit) Welt. Es handlet sich um einen Affinitätsnachweis unter eingeschränkten Voraussetzungen.

BIALLAS, D.: Schwach-affine Räume mit Translationsgruppe

Für schwach-affine Räume, die der Forderung

(T) Die Kollineationsgruppe enthält eine kommutative Untergruppe $\mathfrak{T}$, die transitiv auf den Punkten operiert und es ist $g^{\tau} \parallel g$ für alle $\tau \in \mathfrak{T}$ und alle Geraden g

genügen, sind folgende Eigenschaften gleichwertig:

(I) $\mathfrak{A}$ erfüllt (T)

(II) In $\mathfrak{A}$ schließen sich alle Parallelogramme und es gilt eine spezielle Form des Desargues' schen Satzes

(III) $\mathfrak{A}$ ist isomorph zu einem schwach-affinen Raum über einer speziellen Partition einer abelschen Gruppe

(IV) $\mathfrak{A}$ liefert einen kommutativen Quasimodul.

(Zum Begriff Schwach-affiner Raum bzw. Quasimodul s.E. SPERNER, Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehör. algebr. Strukturen bzw. On Non-Desarguesian Geometries (Journ. f.d. Reine und Angew. Mathematik, 204, 1960, bzw. Seminari dell Instituto Nazionale di Alta Mathematika 1962-63).

BREITSPRECHER, S.: Einzigkeit der komplexen projektiven Ebene

SATZ: Sei (E,X,Y) eine projektive Ebene mit den folgenden Eigenschaften:

1° Die Punktmenge X und die Geradenmenge Y sind komplex-analytische Mannigfaltigkeiten;

2° Die Punktreihen (bzw. die Geradenbüschel) sind reguläre Teilmannigfaltigkeiten von X (bzw. Y);

3° Das Verbinden und das Schneiden sind holomorphe Abbildungen.

Dann ist (E,X,Y) isomorph zu der projektiven Ebene über dem Körper C, falls die komplexe Dimension von X nicht 4 ist. Der Fall $\dim_C X = 4$, der sicher nicht auftritt, ist noch nicht vollständig erledigt.

BRÖCKER, L.: Ein Satz über Jordankurven

Es wird folgender Satz bewiesen: Sei $\mathfrak{E}$ eine euklidische Ebene, Γ eine Jordankurve und A_3 ein nicht ausgeartetes Dreieck in $\mathfrak{E}$. Dann gibt es ein zu A_3 ähnliches Dreieck mit Eckpunkten auf Γ. Zum Beispiel überlegt man sich, daß Γ streng konvex ist oder für das Innere von Γ eine Stützgerade existiert, welche mit mindestens zwei verschiedenen Punkten von Γ inzidiert. Im ersten Fall folgt nach einer einfachen Überlegung die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz stetiger Funktionen. im zweiten führt der Jordansche Kurvensatz zum Ziel.

genügen, sind folgende Eigenschaften gleichwertig:

(I) ? erfüllt (T)

(II) In [illegible] schließen sich die Parallelogramme und es gilt eine spezielle Form des Desargues'schen Satzes

(III) ? ist isomorph zu einem schwach-affinen Raum über einer speziellen Partition einer abelschen Gruppe.

(IV) ? liefert einen kommutativen Quasimodul.

(Zum Begriff Schwach-affiner Raum bzw. Quasimodul s. z. B. [illegible], Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige [illegible] Strukturen bzw. On Non-Desarguesian Geometries (Rend. [illegible] d. [illegible] ser. 8, Math. Appl. Mathematik, 2[illegible], 1[illegible], bzw. Seminarberichte [illegible] Institut für Mathematik [illegible] Mathematik 1962-63).

BREITSPRECHER, [illegible]: Einzigkeit der komplexen projektiven Ebene

SATZ: Sei (E, K, [illegible]) eine projektive Ebene mit den folgenden Eigenschaften:

1° Die Punkte von K und die Geraden von K sind komplexe [illegible] Mannigfaltigkeiten.

2° Die [illegible] (bzw. die Durchschnitt[illegible]) sind reguläre Teilmengen [illegible] von K (bzw. [illegible]);

3° Die Verbindung und der Schnitt sind holomorphe Abbildungen.

Dann ist (E, K, [illegible]) isomorph zu der projektiven Ebene über dem Körper C, falls die komplexe Dimension von K nicht 4 ist. Der Fall $\dim_C K = 4$, der nicht mehr auftritt, ist noch nicht vollständig erledigt.

BR[illegible], L.: [illegible] Fordernkurve

[illegible] Sei ? eine unklidische Ebene, [illegible]

[illegible] ein nicht ausgeartetes Dreieck in ?. Dann gibt es [illegible] Dreieck mit Eckpunkt [illegible]. Zum Beispiel

[illegible] für den In[illegible]

[illegible], welche mit mindestens zwei vorhanden

[illegible] Im ersten Teil folgt [illegible]

[illegible] aus dem [illegible] Satz [illegible]

[illegible] Ziel.

CHEN, Yi: Eine Kennzeichnung der euklidischen Lieebenen

Ist $P^4(\mathfrak{K})$ der vier-dimensionale projektive Raum über einem euklidischen Körper $\mathfrak{K}$, so verstehe man unter den "Zykeln" der zweidimensionalen Liegeometrie die Punkte von $P^4(\mathfrak{K})$, für die

$$\mathfrak{x}^T * \mathfrak{x} = 0 \quad \text{mit} \quad * = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}$$

gilt. Genau dann sollen sich die Zykeln $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ berühren, wenn $\mathfrak{x}^T * \mathfrak{y} = 0$ erfüllt ist. Für dies euklidischen Lieebenen wurde ein Axiomensystem angegeben, das auf eine reflexive und symmetrische zweistellige Relation gestützt ist.

COXETER, H.S.M.: Primitive concepts for the inversive plane

By the inversive plane I mean the Möbius plane over the field of real numbers. M. Pieri (Giornale di Mat. (3), 49 (1911), 49-69; 50 (1912), 106-140) showed that orthogonality and order can be defined in terms of the incidence of points and circles; but his treatment is unnecessarily complicated.

COXETER, H.S.M.: Accessibility in the projective plane ober an arbitrary field

A point Q is said to be accessible from P if Q is the harmonic conjugate of P with respect to some pair of distinct points which are conjugate for a given polarity. All the points of the plane can be distributed into one or more classes of mutually accessible points. If the polarity has any self-conjugate points, these form a single class; so do any exterior points (each lying on two distinct tangents, that is, self-conjugate lines). But interior points (on no tangent) may form infinitely many classes.

EWALD, G.: Eine gruppentheoretische Begründung der ebenen äquiaffinen Geometrie

Jede eigentliche inhaltstreue Affinität (Determinante +1) der gewöhnlichen euklidischen Ebene läßt sich als Produkt dreier Scherungen darstellen. Die Gruppe aller dieser Abbildungen - wir nennen sie

kurz äquiaffine Gruppe - wird also in ähnlicher Weise von den Scherungen erzeugt wie die Gruppe der Bewegungen von den Spiegelungen. Es entsteht daher die Frage, ob man nicht die äquiaffine Geometrie der Ebene ähnlich aus ihrer äquiaffinen Gruppe heraus begründen kann wie das im Falle der Bewegungsgeometrie aus der Bewegungsgruppe geschieht.
Wir geben eine solche Begründung an. Die dabei betrachtete Klasse von Ebenen umfaßt alle affinen Moufang-Ebenen mit Charakteristik $\neq 2$.

GÖTZKY, M.: Erzeugung unitärer Gruppen.

Für die Klasse engerer unitärer Gruppen $U^* = U_n^*(K, f)$ mit $(\alpha \neq 1)$ oder (Index $f_\alpha \leq 1$ und Rad $V = 0$) oder (Index $f_\alpha = 0$) wurde der folgende Satz bewiesen:

Die hermitesche Form f_α sei tracique auf dem Teilraum W – des zu U^* gehörigen Vektorraumes $V = V_n(K, f_\alpha)$. Ist dann $\pi \in U^*$ eine Transformation, die W als Fixraum besitzt, so gibt es Quasispiegelungen oder Transvektionen $\sigma_i = \sigma(\eta_i, q_i)$ (mit $\eta_i \in K$ und $q_i \in V$) für $i = 1, \ldots, s$ mit $s = \dim V^{\pi - 1} + \dim (V^{\pi - 1} \cap \text{Rad } V) = \dim (\sum_{i=1}^{s} K q_i)$, so daß gilt:

$$\pi = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \ldots \sigma_s, \quad \left(\sum_{i=1}^{s} K q_i\right)^{\perp} = W \quad \text{und} \quad V^{\pi - 1} \subseteq \sum_{i=1}^{s} K q_i .$$

Dabei ist die Darstellung von π als Produkt der σ_i in Bezug auf die Zahl s minimal.

GRENZDÖRFFER, J.: Konvexer Abschluß metrischer Ebenen

Die konvexen bzw. pseudokonvexen metrischen Ebenen wurden von W. Pejas und A. Dress algebraisch charakterisiert. Im Anschluß an die Dissertation von J. Diller wird nun ein Kriterium für solche metrischen Ebenen aufgestellt, die Teilebenen von konvexen metrischen Ebenen sind. Der Beweis dieses Kriteriums wird für beide Begriffe der Konvexität - bzgl. einer Anordnung, bzgl. eines Bewertungsringes, bzgl. eines Bewertungsideals des zugehörigen Koordinatenkörpers - gemeinsam geführt. Dazu wird der konvexe Abschluß einer metrischen Ebene $\mathfrak{E}$ zum Aufpunkt $G \in \mathfrak{E}$ gebildet, dessen Polare g die Zwischenrelation definiert. Die Bedingungen des Kriteriums können in [illegible] äquiaffine Gruppe – wird also in ähnlicher Weise von den Scherungen erzeugt wie die Gruppe der Bewegungen von den Spiegelungen. Es entsteht daher die Frage, ob man nicht die äquiaffine Geometrie der Ebene ähnlich aus einer äquiaffinen Gruppenaxiomatik begründen kann wie dies im Falle der Bewegungsgeometrie aus der Bewegungsgruppe geschieht.

Wir geben eine solche Begründung an. Die dadurch betrachtete Klasse von Ebenen umfaßt alle affinen Moufang-Ebenen mit Charakteristik $\neq 2$.

GÖ[illegible], M.: Erzeugung unitärer Gruppen.

Für die Klasse der unitären Gruppen $U^n = U^n_n(K,f)$ mit $(n \neq 1)$ oder ([illegible] ≤ 1 und End $V = 0$) oder (Index $f_x = 0$) wurde der folgende Satz bewiesen:

Ist [illegible] hermitesche Form f_n [illegible] auf dem Teilraum W – des zu U^n gehörigen Vektorraumes $V = V_n(K, f_n)$. Ist dann $\pi \in U^n$ eine Transformation, die W als Fixraum besitzt, so gibt es Quasispiegelungen oder Transvektionen $\sigma_i = \sigma(r_i, q_i)$ (mit $r_i \in K$ und $q_i \in V$) für $i = 1, \ldots, s$ mit $s = \dim V - \dim W = \dim (V^{\pi-1}) = \dim (\sum_{i=1}^{s} Kq_i)$, so daß gilt:

$$\pi = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_s, \quad W = (\sum_{i=1}^{s} Kq_i)^{\perp} \quad \text{und} \quad V^{\pi-1} = \sum_{i=1}^{s} Kq_i.$$

Dabei ist die Darstellung von π als Produkt der σ_i in Bezug auf die Zahl s minimal.

[illegible], J.: Konvexe und pseudokonvexe metrische Ebenen

Die konvexen bzw. pseudokonvexen metrischen Ebenen wurden von F. Rojas und A. Prieß algebraisch charakterisiert. Im Anschluß an die Dissertation von F. Diller wird nun ein Kriterium für solche metrischen Ebenen aufgestellt, die Teilebenen von konvexen metrischen Ebenen sind. Zur Erwähnung dieses Kriteriums wird für beide Begriffe der Konvexität – bzgl. einer Anordnung bzw. bzgl. eines Bewertungsringes, bzgl. einer Bewertungsdichte des zugehörigen Koordinatenkörpers – gemeinsam eingeführt. Dann wird der konvexe Abschluß einer metrischen Ebene [illegible] zum Aufpunkt $O \in E$ gebildet, der [illegible] Polare g die Zwischenrelation definiert. Die Bedingungen des Kriteriums können in

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

gewissen Tangens-Beziehungen algebraisch ausgedrückt werden, die besagen, daß der konvexe Abschluß keine zwei polaren Punkte enthält und vom Aufpunkt $\in \mathfrak{T}$ unabhängig ist.

HERING, Ch.: Fahnentransitive affine Ebenen

Sei $\underline{A}$ eine endliche fahnentransitive affine Ebene der Ordnung n mit $n \equiv 3 \pmod 4$. Ist dann die Kollineationsgruppe von $\underline{A}$ nicht auflösbar, so ist $\underline{A}$, abgesehen von endlich vielen Ausnahmen, desarguessch.

JOUSSEN, J.: Über die Projektivitätengruppe einer halbgeordneten Ebene

Es sei $\mathfrak{P}$ die Gruppe aller projektiven Abbildungen einer festen Punktreihe 1 von Π auf sich (Π eine projektive Ebene) und $\mathfrak{P}_{ik} \subset \mathfrak{P}$ die Untergruppe derjenigen Projektivitäten aus $\mathfrak{P}$, welche zwei vorgegebene Punkte $\alpha_i, \alpha_k \in 1$ festlassen oder miteinander vertauschen. Jede nichttriviale Halbordnung von Π bewirkt dann eine Einteilung der Menge der von α_i und α_k verschiedenen Punkte von 1 in zwei Imprimitivitätssysteme bezüglich der Gruppe $\mathfrak{P}_{ik}$, und umgekehrt wird jede derartige Einteilung von einer geeigneten Halbordnung induziert. Auf diese Weise läßt sich das Problem der Konstruktion von Halbordnungen von Π auf die Frage nach der Existenz gewisser Permutationsgruppen zurückführen; aus dem Nichtvorhandensein solcher Gruppen ergibt sich auch die Nichtexistenz von Halbordnungen in den ihnen entsprechenden Ebenen. Als vorläufiges Hauptergebnis dieser Untersuchungen erhalten wir den Satz:

Ist Π eine e n d l i c h e projektive Ebene einer Ordnung $N = 2p+1$, wo p eine Primzahl und $p \not\equiv 1 \bmod 12$ ist, so gilt: Π ist dann und nur dann nichttrivial halbordnungsfähig, wenn Π desarguessch ist.

JUNKERS, W.: Zur Konstruktion konvexer mehrwertiger Ordnungsfunktionen

Die Untersuchungen von E. Sperner über Konvexität bei 2-wertigen Ordnungsfunktionen lassen sich auf mehrwertige Ordnungsfunktionen ausdehnen. Das Hauptresultat dieser Verallgemeinerung lautet:

gewissen Tragmo-B[illegible] algebraisch ausgedrückt werden, die besagen, daß der Kör[illegible]abschluß keine zwei polaren Punkte enthält und vom Aufpunkt [illegible] unabhängig ist.

[illegible], Ch.: Fahnentransitive affine Ebenen

Sei $\underline{A}$ eine endliche fahnentransitive affine Ebene der Ordnung n mit $n \equiv 3$ (mod 4). [illegible] die Kollineationsgruppe von $\underline{A}$ nicht auflösbar, so ist $\underline{A}$ [illegible] ohne zusätzliche Annahmen, desarguessch.

[illegible], [illegible] die Projektivitätsgruppe einer halbgeordneten [illegible] Ebene

Es [illegible] die projektiven Abbildungen [illegible] einer [illegible] von [illegible] auf sich ([illegible] eine projektive Ebene) und [illegible] Untergruppe derjenigen Projektivitäten aus [illegible], welche [illegible] Punkte a_i, a_k [illegible] oder miteinander vertauschen. [illegible] nichttriviale Halbordnung vo[illegible] wirkt dann [illegible] die Zuordnung [illegible] zu den von a_i und a_k verschiedenen Punkte vor [illegible] zwei Inzidenzwirtssystems bezüglich [illegible] a_{ik} und [illegible] nicht [illegible] derartige Zuordnung von einer [illegible] Halbordnung [illegible]. [illegible] die Weise [illegible] sich das Problem [illegible] Konstruktion von Halb[illegible] von [illegible] Frage nach der Existenz gewisser Permutationsgruppen zurückführen; aus dem Nichtvorhandensein solcher Gruppen ergibt sich [illegible] die Nichtexistenz [illegible] Halbordnungen in den ihnen entsprechenden Ebenen. Als vorläufiges Ergebnis dieser Untersuchungen erhalten wir den Satz:

Ist [illegible] eine endliche projektive Ebene einer Ordnung $N = 4p+1$, wo p eine Primzahl und $p \neq 1$ mod 12 ist, so gilt: [illegible] ist dann und nur dann nichttrivial halbgeordnet [illegible], wenn [illegible] desarguessch ist.

[illegible], V.: Zur Kon[illegible] konvexer mehrwertiger Ordnungsfunktionen

Die Untersuchungen von [illegible] über Konvexität bei 2-wertigen Ordnungsfunktionen [illegible] mehrwertige Ordnungsfunktionen [illegible] Verallgemeinerung lautet:

Es sei R_n der n-dimensionale $(n \geq 2)$ affine Raum über einem (nicht notwendig kommutativen) Körper K; dann entsprechen den konvexen normalen Ordnungsfunktionen auf dem R_n genau diejenigen Normalteiler N von $K^{\times}$ (= multiplikative Gruppe von K) mit der Eigenschaft: $\alpha, \beta \in N \Longrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} \in N$ (es ist zwangsläufig char $K \neq 2$), hier kurz "konvexe Normalteiler" genannt. - Damit stellt sich die Aufgabe, bei vorgegebenem Körper K alle konvexen Normalteiler von $K^{\times}$ zu bestimmen. Für den Fall, daß K kommutativ ist, wurde diese Aufgabe systematisch in Angriff genommen.

KINDER, H.: Der allgemeine Satz von den k Spiegelungen

Der Vortragende hat auf der Tagung über die Grundlagen der Geometrie vor einem Jahr für die n-dimensionale absolute Geometrie $(n \geq 2)$ ein Axiomensystem, in dem weder Anordnung noch freie Beweglichkeit gefordert werden, angegeben und den Aufbau geschildert. Das Begründungstheorem über die Algebraisierbarkeit benutzt im nichtelliptischen Fall wesentlich den im vorigen Jahr noch unbewiesenen allgemeinen Satz von den k Hyperebenenspiegelungen $(k = 3, 4, \ldots, n+1)$. Ein inzwischen gefundener Beweis wurde skizziert.

KLOTZEK, B.: Äquiaffine Spiegelungsgeometrie

In den letzten Jahrzehnten wurde die Spiegelungsgeometrie erfolgreich weiterentwickelt; eine umfangreiche Darstellung der Ergebnisse bezüglich der metrischen Ebenen hat F. Bachmann angegeben. Vom Vortragenden wurde das Ziel verfolgt, durch eine Verallgemeinerung des Axiomensystems für metrische Ebenen von Bachmann ebene affine Geometrie der gruppentheoretischen Behandlung zugänglich zu machen. Durch ein gruppentheoretisches Axiomensystem und durch Zusatzaxiome werden einerseits die Modelle der metrisch euklidischen und nichteuklidischen Ebenen, andererseits aber auch die äquiaffinen Ebenen charakterisiert, die den affinen Koordinatenebenen über einem Körper von einer Charakteristik $\neq 2$ äquivalent sind. Besondere Aufmerksamkeit wird der Untersuchung von Büscheln und Unterstrukturen in äquiaffinen Ebenen geschenkt.

LENZ, H.: Zur Begründung der Winkelmessung

Ausgehend von den Axiomgruppen I bis III von Hilbert wird der Satz verallgemeinert, daß sich die Winkel durch reelle Zahlen messen lassen. Das hat 1953 H. Zassenhaus auf elementare Weise geleistet. Der vorliegende Beweis axiomatisiert zunächst die zyklische Ordnung. Dann wird zu jeder zyklisch geordneten Gruppe $\mathfrak{W}$ eine geordnete Gruppe $\mathfrak{W}^*$ konstruiert, deren homomorphes Bild $\mathfrak{W}$ ist, so daß die Faktorgruppe zyklisch unendlich wird. Gilt in der Ebene das archimedische bzw. Dedekindsche Axiom, so auch in $\mathfrak{W}^*$. Im letzteren Fall kann also $\mathfrak{W}^*$ mit der additiven Gruppe der reellen Zahlen identifiziert werden; das ist der klassische Fall. (Erscheint in den Math. Nachr.)

LINGENBERG, R.: Gegenpunktpaarungen

Sei (G, S) eine S-Gruppe, d.h. eine Gruppe G mit einem nur aus involutorischen Elementen bestehenden Erzeugendensystem S, für welche der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. Sei E (G, S) ihre Gruppenebene und A, B zwei unverbindbare Punkte und q eine Gerade mit $q \notin B$. Die Abbildung σ mit $x\sigma = qxx_A$ aus B in S (x_A Verbindung von A mit G(qx)) bildet B in ein Büschel B^σ ab, wenn A dreiseitverbindbar (d.h. mit mindestens einem der Eckpunkte eines jeden nicht ausgearteten Dreiseits verbindbar) ist. Eine Anwendung der Gegenpunktpaarung σ in der hyperbolischen Geometrie liefert eine Verallgemeinerung des BERGAUschen Lemmas vom Ende. Für die absolute Geometrie der Ebene leisten die Gegenpunktpaarungen eine einheitliche Begründung aller bisher behandelten euklidischen und nichteuklidischen Geometrien.

MÄURER, H.: Möbiusgeometrien beliebiger Dimension

Ist $\mathbb{R}$ ein mindestens 4-dimensionaler projektiver Raum, so heißt eine nichtleere Punktmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathbb{R}$ eine "schwach konvexe Semifläche", falls für jeden Punkt $P \in \mathfrak{P}$ die Menge der Geraden g mit $g \cap \mathfrak{P} = \{P\}$ eine Hyperebene ausfüllen. $\mathfrak{K}$ sei die Menge der Teilmengen k von $\mathfrak{P}$, zu denen es eine Hyperebene h von $\mathbb{R}$ mit $k = \mathfrak{P} \cap h$ und $|k| \geq 2$ gibt. Die Möbius-Geometrie $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}, \in)$ wurde axiomatisch gekennzeichnet.

MEISSNER, H.: Geschlitzte Gruppenräume

Es sei G eine Gruppe und E ein Erzeugendensystem von G. Jedes $\alpha \in E^2$ repräsentiere einen Punkt α, jedes $\delta \in E^3$ eine Hyperebene $\langle\delta\rangle$ mit $\langle\delta\rangle \; I \; \alpha \Longleftrightarrow \delta\alpha \in E$. Ist die so definierte geometrische Struktur $E(G)$ ein m-n-geschlitzter Raum (Def. vgl. [3]) und erfüllt E die drei Bedingungen A, B und C, so heißt $E(G)$ ein G-Gruppenraum ($A: x \in E \Longrightarrow x^2 = 1$. B: E ist invariant. C: es gibt $a, b, c \in E$ mit $(abc)^2 \neq 1$, so daß die Gerade durch 1 und ab projektiv ist). - Ergebnisse:

SATZ 1: Jeder G-Gruppenraum hat die Dimension 3 und ist entweder projektiv oder 3-1-geschlitzt.

SATZ 2: Ist G eine Gruppe und E ein Erzeugendensystem von G, so gilt "(a) $\Longleftrightarrow$ (b)" in jedem der drei Fälle:

$E^2 = E^3$:
(a) $E(G)$ ist ein projektiver G-Gruppenraum
(b) (G, E) ist eine verallg. ellipt. Geometrie (Def. vgl. [2])

$E^2 \neq E^3$ und $Z \neq \{1\}$:
(a) $E(G)$ ist ein proj. G-Gruppenraum
(b) (G, E) ist eine Zentrumsgeometrie (Def. vgl. [2])

$E^2 \neq E^3$ und $Z = \{1\}$:
(a) $E(G)$ ist ein 3-1-geschl. G-Gr.raum
(b) (G, E) ist eine verallgemeinerte absolute Geometrie (Def. vgl. [1], in der das Parallelenaxiom gilt.

Literatur: [1] Karzel, H.: Arch. Math. 6, 284-295 (1955)
[2] Karzel, H.: Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 24, 167-188 (1960)
[3] Karzel, H. u. Meißner, H.: Geschlitzte Inzidenzgruppen und normale Fastmoduln. Erscheint demn. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.

MISFELD, J.: Stetige Inzidenzgruppen

H. KARZEL hat topologische desarguessche Inzidenzgruppen (das sind Mengen G mit einer topologischen, einer projektiven desarguesschen und einer Gruppenstruktur, die den üblichen Verträglichkeitsbedingungen genügen, so daß G gleichzeitig topologische Gruppe, topologischer projektiver Raum und Inzidenzgruppe ist) durch sog. topologische normale Fastkörper (das sind im wesentlichen normale Fastkörper, die

MEISSNER, [illegible]: Geschlitzte Gruppenräume

Es sei G eine Gruppe und E ein Erzeugendensystem von G. Jedes $a \in E^2$ repräsentiere einen Punkt a, jedes $\in E^3$ eine Hyperebene (6) mit (4) $1 \in$ [illegible]. Ist die so definierte geometrische Struktur E(G) ein n-n-geschlitzter Raum (Def. vgl. [3]) und [illegible] E die drei Bedingungen A, B und C, so heißt E(G) ein G-Gruppenraum (A : $x \in T$ [illegible] = 1. B : T ist invariant. C : es gibt a, b, c $\in$ T mit $(abc)^2 \neq 1$, so daß die Gerade durch 1 und ab projektiv ist). - Ergebnisse:

SATZ 1: Jeder G-Gruppenraum hat die Dimension 2 und ist entweder projektiv oder 3-1-geschlitzt.

SATZ 2: Ist G eine Gruppe und E ein Erzeugendensystem von G, so gilt "(a) $\Longleftrightarrow$ (b)" in jedem der drei Fälle:

$E^2 = E^3$: (a) E(G) ist ein projektiver G-Gruppenraum
(b) (G, E) ist eine vollständig [illegible]. Geometrie (Def. vgl. [2])

$E^2 \neq E^3$ und $Z \neq \{1\}$:

(a) E(G) ist ein proj. G-Gruppenraum
(b) (G, E) ist eine Zentrumsgeometrie (Def. vgl. [2])

$E^2 \neq E^3$ und $Z = \{1\}$:

(a) E(G) ist ein 3-1-geschl. G-Gr. raum
(b) (G, E) ist eine verallgemeinerte absolute Geometrie (Def. vgl. [1]), in der das Parallelenaxiom gilt.

Literatur: [1] Karzel, H.: Arch. Math. 6, 284-295 (1955)
[2] Karzel, H.: Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 24, 167-188 (1960)
[3] Karzel, H. u. Meissner, H.: Geschlitzte Inzidenzgruppen und normale Fastkörper. Erscheint demn. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.

MEISSNER, H.: [illegible] Inzidenzgruppen

H. KARZEL hat topologische Inzidenzgruppen (das sind Mengen [illegible] mit einer topologischen, einer projektiven desarguesschen und einer Gruppenstruktur, die den üblichen Verträglichkeitsbedingungen genügen, so daß G gleichzeitig topologische Gruppe, topologischer projektiver Raum und Inzidenzgruppe ist) durch sog. topologische normale Fastkörper (das sind im wesentlichen normale Fastkörper, d.

gleichzeitig topologische Vektorräume sind und die bezüglich der Quotientenstruktur topologische Gruppen sind) beschrieben. Für zweiseitige topologische Inzidenzgruppen sind die Fastkörperoperationen selbst stetig. Hieraus und aus den Resultaten von Pontrjagin, van Dantzig, Jacobson und Kalscheuer über stetige (= lokalkompakte nicht-diskrete hausdorffsche) topologische Körper bzw. Fastkörper ergibt sich der

SATZ: Jede stetige Inzidenzgruppe G ist isomorph zur Faktorgruppe F^*/K^*, wobei K endliche Erweiterung der Körper $\underline{R}$ (reelle Zahlen), K_o^p (p-adische Zahlen) bzw. K_t^p (Potenzreihen über dem Restklassenkörper mod p) und $F \cong K^n$ ist. Ist G sogar zweiseitig, so ist F selbst endliche Erweiterung von $\underline{R}$, K_o^p bzw. K_t^p; ist G außerdem noch zusammenhängend, so gilt $G \cong \underline{H}^*/\underline{R}^*$ ($\underline{H}$ = Quaternionenschiefkörper).

PIEPER, I.: Dicksonsche Fastmoduln und ihre Bedeutung für die Geometrie

Inhalt: Es sei $(\mathfrak{Z},\mathfrak{M})(+,\cdot)$ eine lokale Algebra. Eine Abbildung $\varphi : \mathfrak{M}^* \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{Z}(+,\cdot))$ heißt gekoppelt, wenn $\mathfrak{a}_\varphi \mathfrak{b}_\varphi = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}_\varphi(\mathfrak{b}))$ für $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}^*$ gilt.

Es gelten die Sätze:

I. Ein lokaler Fastmodul $(\mathfrak{Z},\mathfrak{M})(+,*)$ ist genau dann ein D-Fastmodul, wenn auf $\mathfrak{Z}$ eine Multiplikation $\cdot$ erklärt werden kann, so daß $(\mathfrak{Z},\mathfrak{M})(+,\cdot)$ lokale Algebra ist, und eine gekoppelte Abbildung $\varphi : \mathfrak{M}^* \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{Z}(+,\cdot))$, so daß $\mathfrak{a} * \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}_\varphi(\mathfrak{b})$ für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{Z}$ ist, d.h. $\mathfrak{M}^*$ ist die Menge der Einheiten von $(\mathfrak{Z},\mathfrak{M})(+,\cdot)$ und für jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}^*$ ist die Abbildung $\rho_\mathfrak{a} : \mathfrak{x} \to \mathfrak{a}^{-1} \cdot (\bar{\mathfrak{a}} * \mathfrak{x})$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{Z})$ ein Automorphismus von $(\mathfrak{Z},\mathfrak{M})(+,\cdot)$.

II. Es seien $(\mathfrak{Z},\mathfrak{M})(+,\cdot)$ eine $\mathfrak{R}$-Algebra, φ eine gekoppelte Abbildung von $\mathfrak{M}^*$ in $\mathrm{Aut}(\mathfrak{Z}(+,\cdot))$ und $* : \begin{cases} \mathfrak{M}, * \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z} \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \to \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{cases} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}_\varphi(\mathfrak{b}) & \text{falls } \mathfrak{a} \in \mathfrak{M}^* \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{a} = 0 \end{cases} \end{cases}$

eine neue Multiplikation mit Elementen aus $\mathfrak{M}$. Dann ist $(\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{M})(+,*)$ genau dann normal über $\mathfrak{R}(+,*)$, wenn $\varphi(\mathfrak{R}) = \{\mathrm{id}\}$ und $\mathfrak{a}_\varphi(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$ für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}^*$ gilt.

gl ... ...ig topologische Vektorräume sind und die bezüglich der ... ...nstruktur topologische Gruppen sind) beschrieben. Für zweiseitig ... analogische Inzidenzgruppen sind die Fastkörperoperationen stetig. Hieraus und aus ... Resultaten von Pontrjagin, van Dantzig, Jacobson und Kaplansky (über stetige (= lokalkompakte nicht-diskrete hausdorffsche) topologische Körper bzw. Fastkörper ergibt sich der

SATZ: Jede stetige Inzidenzgruppe ... ist isomorph zur Faktorgruppe $F^*/\ldots$, wobei K endliche Erweiterung der Körper $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen), $\ldots$ (p-adische Zahlen) bzw. $\ldots$ (Potenzreihen über dem Restklassenkörper mod p) und $F = K$ ... ist. Ist G sogar zweiseitig, so ist F auch endliche Erweiterung von $\mathbb{R}$, ... bzw. ... Ist G außerdem noch ..., so gilt $G \cong \ldots$ ($\mathbb{H}$ = Quaternionen-Schiefkörper).

PLENAR 1.: Dicksonsche Fastmoduln und ihre Bedeutung für die Geometrie

Inhalt: Es sei $(S, M)(+,\cdot)$ eine lokale Algebra. Eine Abbildung $\alpha: M \to \mathrm{Aut}(S(+,\cdot))$ heißt gekoppelt, wenn ... für $a, b \in M$ gilt.

Es gelten die Sätze:

I. Ein lokaler Fastmodul $(S,M)(+,*)$ ist genau dann ein D-Fastmodul, wenn auf S eine Multiplikation · erklärt werden kann, so daß $(S,M)(+,\cdot)$ lokale Algebra ist, und eine gekoppelte Abbildung $\alpha: M \to \mathrm{Aut}(S(+,\cdot))$, so daß $a * b = a \cdot \alpha_a(b)$ für $a \in M$ ist, d.h. ... ist die Menge der Elemente von $(S,M)(+,\cdot)$ und für jedes $a \in M$ ist die Abbildung ... ein Automorphismus von $(S,M)(+,\cdot)$.

II. Es seien $(S,M)(+,\cdot)$ eine ...-Algebra, α eine gekoppelte Abbildung in $\mathrm{Aut}(S(+,\cdot))$ und ... falls $a \in M$, 0 falls $a = 0$

die Multiplikation mit Elementen aus M. Dann ist $(S \cdot M)(+,*)$ genau dann normal über $S(+,\cdot)$, wenn ... $= \{id\}$ und ... $= 0$ für ... gilt.

Jedem solchen normalen D-Fastmodul entspricht eine desarguessche geschlitzte Inzidenzgruppe.

ROSATI, L.A.: Sull' introduzione della dimensione in certi S-spazi forniti di omologie speciali

Definito il concetto di omologia speciale di unu spazio affine generalizzato nel senso di Sperner (S-spazio), si dimostra che il luogo dei punti di un S-spazio $\mathfrak{S}$ uniti in un omologia speciale che non sia una traslazione è un sotto S-spazio, $\mathfrak{C}$, tale che $\mathfrak{S}$ copre $\mathfrak{C}$. Si introduce poi il concetto di dimensione in certi S-spazi forniti di omologie speciali.

RUOFF, D.: Über einen neuen Ausgangspunkt für elementargeometrische Flächen- und Rauminhaltstheorien

Dem Umstand, daß die einfachen Polynome als Objekte für eine elementare Flächeninhaltstheorie nicht zweckmäßig sind, wurde in der neuesten (neunten) Auflage von Hilberts "Grundlagen der Geometrie" durch die Einführung der Polygonale Rechnung getragen. Der Kürze halber wird das Polygonal ganz anders definiert als das einfache Polygon. In dem Referat wird nun gezeigt, daß eine analoge Definition möglich ist und daß man zu ihr durch ausschließlich elementare Gedankengänge gelangen kann; das Polygonal erscheint dann als sinnvolle Verallgemeinerung des einfachen Polygons. - Die Übertragung auf den Raum geschieht durch Schnittebenen.

SEIDEL, J.J.: Elliptic geometry and graphs

PROBLEM A: For all r, find the integers n such that in elliptic space of $r-1$ dimensions E_{r-1} there exists an equilateral n-tuple. What is the maximim $n(r)$?

PROBLEM B: For all r, find the integers n such that there exists a matrix B of order n and elements $b_{ii} = 0$, $b_{ij} = b_{ji} = \pm 1$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \dots, n)$ whose smallest eigenvalue has multiplicity $n - r$. What is the maximum $n(r)$?

PROBLEM C: For all n, find the equivalence classes, under complementation, of all n-graphs. (Complementation is defined as repeated application of the operation: for any point cancel the existing connections and add the nonexisting connections.)

RESULTS: n(3) = 6, n(4) = 6, n(5) = 10 (Petersen graph.), n(6) = 16 (Lattice graph), n(7) $\geq$ 28 (Triangular graph).

REFERENCE: J.H. van Lint and J.J. Seidel,
Equilateral point-sets in elliptic geometry,
Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amst. Proc. A, 69(1966),
to appear.

VITZTHUM, K.: Verallgemeinerte NAUMANN-Ebenen

Als verallgemeinerte NAUMANN-Ebenen werden affine Ebenen mit folgenden Ternärrelationen betrachtet:

(1) $T(u,x,v) = f(g(u,x),v)$

(2) $T(u,x,v) = f(u,g(x,v))$

u, x, v werden als Elemente eines Körpers angenommen. Nachdem entweder f oder g mit einer der Körperoperationen identifiziert wird, werden notwendige und hinreichende Eigenschaften der anderen Funktion angegeben. Als Sonderfälle des Typs 1 ergeben sich die Ebenen von MOULTON, NAUMANN, SALZMANN und YAQUB. Die durch $T(u,x,v) = ug(x,v)$ definierten Ebenen zeigen eine Verwandtschaft mit den von PIERCE konstruierten MOULTON-Ebenen, wenn man formal die additive Loop mit der multiplikativen vertauscht.

WODE, D.: Einbettbare Gruppenräume

Wie R. Baer bewies, ist der Gruppenraum einer ebenen absoluten Geometrie genau dann ein dreidimensionaler projektiver Raum, wenn die Ebene elliptisch ist. H. Karzel konnte darüberhinaus unter Benutzung des Spernerschen Axiomensystems für verallgemeinerte absolute Ebenen zeigen, daß der Gruppenraum einer solchen Ebene genau dann projektiv ist, wenn die Ebene projektiv ist. Bezüglich der Struktur der Gruppenräume nicht-projektiver verallgemeinerter absoluter Ebenen sind Resultate von Blaschke und Grünwald, K. Schütte sowie H. Karzel

PROBLEM C: For all n, find the equivalence classes, under complementation, of all n-graphs. (Complementation is defined as repeated application of the operation: for any point cancel the existing connections and add the nonexisting connections.)

RESULTS: $n(3) = 2$, $n(4) = 3$, $n(5) = 10$ (Petersen graph), $n(6) = 1[illegible]$ (lattice graph), $n(7) \geq [illegible]$ (triangular graph).

REFERENCE: J.H. van Lint and J.J. Seidel, Equilateral point sets in elliptic geometry, Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amst. Proc. A, 69(1966), to appear.

VITZTHUM, K.: Verallgemeinerte NAUMANN-Ebenen

Als verallgemeinerte NAUMANN-Ebenen werden affine Ebenen mit folgenden Ternärfunktionen betrachtet:

$$(1) \quad T(u,x,v) = f(g(u,x),v)$$

$$(2) \quad T(u,x,v) = f(u,g(x,v))$$

u,x,v werden als Elemente eines Körpers angenommen. Nachdem entweder f oder g mit einer der Körperoperationen identifiziert wird, werden notwendige und hinreichende Eigenschaften der anderen Funktion angegeben. Als Sonderfälle des Typs 1 ergeben sich die Ebenen von MOULTON, NAUMANN, SALZMANN und MAOUS. Die durch $T(u,x,v) = ug(x,v)$ definierten Ebenen [illegible] Verwandtschaft mit den von PIERCE konstruierten [illegible], wenn man normal die additive Loop mit der multiplikativen [illegible] macht.

[illegible], D.: [illegible]bare Gruppenraum:

Wie R. Baer bewies, ist der Gruppenraum einer ebenen absoluten Geometrie genau dann ein dreidimensionaler projektiver Raum, wenn die Ebene elliptisch ist. H. Karzel konnte darüberhinaus unter Benutzung des Spernerschen Axiomensystems für verallgemeinerte absolute Ebenen zeigen, daß der Gruppenraum einer solchen Ebene genau dann projektiv ist, wenn die Ebene projektiv ist. Bezüglich der Struktur der Gruppenräume nicht-projektiver [illegible] allgemeiner absoluter Ebenen [illegible] Resultate von Blaschke [illegible], K. Schütte sowie H. Karzel und H. Meißner bekannt. Für die algebraische Darstellung der geometrischen Strukturen hat sich dabei der Begriff des normalen Fastkörpers bzw. -moduls als geeignet erwiesen. Im Hinblick auf die noch offene Frage, welche Strukturen als Gruppenräume verallgemeinerter absoluter Ebenen vorkommen können, soll hier eine Beziehung zwischen einbettbaren Inzidenzgruppen und normalen Fastmoduln hergestellt werden.

WOLFF, H.: Zornsches Lemma und Hochkettenprinzip

In der Literatur über Zornsches Lemma, Auswahlaxiom usw. (z.B. Rubin-Rubin, Equivalents of the axiom of choice) scheint unbemerkt geblieben zu sein, daß das Zornsche Lemma nur eine komplizierte Formulierung eines, wenn man will, unmittelbar einleuchtenden Satzes ist, des Hochkettenprinzips:

Sei M eine geordnete Menge (= teilweise geordnete Menge, Halbordnung). Eine Kette K (Teilkette von M) heiße hoch +) oder eine Hochkette (in Bezug auf M), wenn es "über ihr nichts gibt", d.h. wenn sie keine echten oberen Schranken hat. Das Hochkettenprinzip (F. Bachmann 1965). In jeder geordneten Menge gibt es eine Hochkette
ist trivialerweise mit dem Zornschen Lemma äquivalent. Denn für jede geordnete Menge sind offenbar die folgenden vier Aussagen äquivalent:
Das Zornsche Lemma: Wenn jede Kette eine obere Schranke hat, so gibt es ein maximales Element.

Es gibt eine Kette ohne obere Schranke, oder es gibt ein maximales Element.

Es gibt eine Hochkette ohne obere Schranke, oder es gibt ein Hochkette mit oberer Schranke.

Es gibt eine Hochkette.

+) wie beim Skat

J. Misfeld