Mathematisches Forschungsinstitut

Oberwolfach

11/10

Tagungsbericht

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen

20. bis 25. Juni 1966

Leitung: Prof. Dr. Dr. h. c. L. Collatz (Hamburg)

Prof. Dr. Ing. H. Unger (Bonn)

Durch die Beschränkung auf das Teilgebiet der numerischen Mathematik der Anfangswert- und Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen war es den Teilnehmern möglich, sich einen guten Überblick über den augenblicklichen Stand dieses immer stärker anwachsenden und zu immer größerer Bedeutung für die Anwendungen gelangenden Gebietes zu verschaffen. Es wurde eine Fülle von Gegenüberstellungen und Querverbindungen aufgezeigt, von denen eine anregende Wirkung auf die Forschung erhofft werden darf. In einer Reihe von Vorträgen wurden wesentlich neue und interessante Methoden und Erkenntnisse vermittelt.

Die Entwicklungstendenzen lassen sich durch folgende - naturgemäß unvollständige - Aufzählung von Stichworten umreißen; Stabilität numerischer Methoden, besonders im Wechselspiel zwischen Differenzen- und Differentialgleichungen, Verallgemeinerung von Methoden auf bisher unerschlossene Anwendungsgebiete, besonders bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, theoretische Untersuchungen zur besseren Beurteilung und zum Vergleich verschiedener Methoden, neuartige Kombinationen von bekannten Prinzipien der numerischen Analysis und neue Approximationsmethoden.

Besonderer Wert wurde auf Fehlerabschätzungen und exakte Aussagen auf Gebieten gelegt, die bisher nur näherungsweise erfaßt werden konnten, und hier wurde wohl nach dem allgemeinen Eindruck der Tagungsteilnehmer ein großer Fortschritt erzielt.

Die Diskussionen waren sehr lebhaft und ermöglichten einen regen wissenschaftlichen Austausch. Sie gingen teilweise über den Rahmen der Einzelthemen weit hinaus, woraus sich wertvolle und meinungsbildende Aspekte über den Stand und die Ziele der modernen Numerischen Mathe-

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

T a g u n g s b e r i c h t

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen

20. bis 25. Juni 1966

Leitung: Prof.Dr.Dr.h.c. L. Collatz (Hamburg)
Prof. Dr.h.c. H. Unger (Bonn)

Durch die Beschränkung auf das Teilgebiet der numerischen Mathematik, das die Anfangswert- und Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen umfaßt, war es den Teilnehmern möglich, sich einen guten Überblick über den augenblicklichen Stand dieses immer stärker anwachsenden und zu immer größerer Bedeutung für die Anwendungen gelangenden Gebietes zu verschaffen. Es wurde eine Fülle von Gegenüberstellungen und Querverbindungen aufgezeigt, von denen eine anregende Wirkung auf die Forschung erhofft werden darf. In einer Reihe von Vorträgen wurden wesentlich neue und interessante Methoden und Erkenntnisse vermittelt.

Die Entwicklungstendenzen lassen sich durch folgende – naturgemäß unvollständige – Aufzählung von Stichworten umreißen: Stabilität zentrischer Methoden, besonders im Wechselspiel zwischen Differenzen- und Differentialgleichungen, Verallgemeinerung von Methoden auf bisher unzugängliche Anwendungsgebiete, besonders bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, theoretische Untersuchungen zur besseren Beurteilung verschiedener Methoden, neuartige Kombinationen [illegible] Prinzipien der numerischen Analysis und neue [illegible] Fehlerabschätzungen und exakte Aussagen [illegible] erfaßt werden können [illegible].

[illegible] Eindruck der Tagung [illegible] ein großer [illegible] erzielt.

[illegible] ermöglichte einen regen wissenschaftlichen [illegible] über die Rahmen der [illegible] wertvoll und meinungsbildende [illegible] die Ziele der modernen numerischen Mathematik [illegible] matik ergaben. Auch außerhalb der Arbeitssitzungen war ein intensiver Gedankenaustausch festzustellen.

An dem Gelingen der von den Teilnehmern als sehr erfolgreich empfundenen Tagung hatten die wie immer ausgezeichnete Betreuung durch das Mathematische Forschungsinstitut und dessen schöne Umgebung einen hervorragenden Anteil.

Teilnehmer:

Albrecht, Prof. Dr. J., Hamburg
Amann, H., Freiburg
Anselone, Prof., z. Zt. Karlsruhe
Ansorge, Dr. R., Clausthal
Babuska, Prof. I., Prag
Börsch-Supan, Prof. W., Budenheim
Bohl, Dr. E., Hamburg
Brandt, O., Bad Godesberg
Bredendiek, E., Hamburg
Bruhn, Dr. G., Berlin
Bulirsch, Dr. R., München
Dejon, Dr. B., Zürich
Collatz, Prof. Dr. L., Hamburg
Dost, W., Münster
Falk, S., Clausthal
Filippi, Dr. S., Aachen
Hadeler, K. P., Hamburg
Hackl, Dr. I., Wien
Heinrich, Prof., Dresden
Henrici, Prof. P., Zürich
Joubert, G. R., Hamburg
Kraska, E., Aachen
Krückeberg, Dr. F., Bonn
Lahmann, Dr. H. E., Clausthal
Lohmann, K., Bonn
Nickel, Prof. K., Karlsruhe
Nicolovius, Dr., R., Hamburg
Nitsche, J. Prof. Dr., Freiburg
Opitz, Dresden
Rozsa, Dr. P., Budapest
Rieder, P., Karlsruhe
Schäfke, F. W., Köln-Lindenthal
Scharf, V., Bonn
Schütz, K., Köln-Sülz
Schröder, Prof. I. Köln
Schwermer, H., Berlin
Stetter, Prof. H. J., Wien
Stoer, J., München
Stöhr, Prof. A., Berlin
Törnig, Prof. Dr., W., Clausthal
Troch, I., Wien
Unger, H., Prof. Dr. Ing., Bonn
Walter, Prof. W., Karlsruhe
Wendland, Dr. W., Berlin
Werner, Prof. H., Münster
Wetterling, Dr. W., Hamburg

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

matik ergaben. Auch außerhalb der Arbeitssitzungen war ein intensiver Gedankenaustausch festzustellen.

An dem Gelingen der [illegible] als sehr erfolgreich [illegible] denen Tagung hatten die wie immer ausgezeichnete Betreuung durch das Mathematische Forschungsinstitut und dessen schöne Umgebung einen hervorragenden Anteil.

Teilnehmer:

Albrecht, Prof.Dr.J., Hamburg
Amann, H., Freiburg
Anselone, Prof., z.Zt. Karlsruhe
Ansorge, Dr.R., Clausthal
Babuska, Prof.I., Prag
Börsch-Supan, Prof.W., [illegible]heim
Bohl, Dr.E., Hamburg
Brandt, O., Bad Godesberg
Bredendiek, E., Hamburg
Bruhn, Dr.G., Berlin
Bulirsch, Dr.R., München
Dejon, Dr.B., Zürich
Collatz, Prof.Dr.L., Hamburg
Dost, W., Münster
Falk, S., Clausthal
Filippi, Dr.S., Aachen
Hadeler, K.P., Hamburg
Hackl, Dr.I., Wien
Heinrich, Prof., Dresden
Henrici, Prof.P., Zürich
Joubert, G.R., Hamburg
Kraska, E., München
[illegible], Dr.F., [illegible]
[illegible], Dr.H.E., Clausthal
Lohmann, R., Bonn
Nickel, Prof.K., Karlsruhe
Nicolovius, Dr.R., Hamburg

Nitsche, J., Prof.Dr., Freiburg
Opitz, Dresden
Rozsa, Dr.P., Budapest
Rieder, P., Karlsruhe
Schäfke, F.W., Köln-Lindenthal
Scharf, V., Bonn
Schütz, K., Köln-Sülz
Schröder, Prof.J. Köln
Schwetmer, H., Berlin
Stetter, Prof.H.J., Wien
Stoer, J., München
Stöhr, Prof.A., Berlin
Törnig, Prof.Dr.W., Clausthal
Troch, I., Wien
Unger, H., Prof.Dr.Ing., Bonn
Walter, Prof.W., Karlsruhe
Wendland, Dr.W., Berlin
Werner, Prof.H., Münster
Wetterling, Dr.W., [illegible]burg

Es wurde versucht, folgende Vortragsauszüge nach sachlichen Gesichtspunkten zu ordnen.

Vortragsauszüge:

RÓZSA, P.: Ein Rekursionsverfahren zur Lösung linearer Differentialgleichungssysteme mit singulären Koeffizientenmatrizen

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

(1) $$P\dot{x} + Qx = f(t)$$

mit beliebigen konstanten m-n-Matrizen P und Q. Mit Hilfe einer geeigneten Transformation kann das System (1) auf eine Normalform gebracht werden. (S. z.B. Gantmacher: Matrizenrechnung Bd. 2 S. 39). Für praktische Zwecke ist es jedoch im allgemeinen vorteilhafter, folgenden Weg einzuschlagen.

Wir schreiben die Gleichung (1) als homogenes System

$Ay = 0$, wo $A = [P, Q, f(t)]$ und $y = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \\ -1 \end{bmatrix}$ ist. Wird die Matrix A auf Gauß-Jordansche Normalform gebracht, so zerfällt das System automatisch in ein System von r Differentialgleichungen und in ein System von q algebraischen Gleichungen. Setzt man die allgemeine Lösung des algebraischen Systems in das Differentialgleichungssystem ein, so erhält man an Stelle von (1) das reduzierte System $\tilde{P}\dot{\tilde{x}} + \tilde{Q}\tilde{x} = \tilde{f}(t)$. Hier haben die Matrizen $\tilde{P}$ und $\tilde{Q}$ nur noch r Zeilen und $n-q$ Spalten; der Vektor $\tilde{x}$ besteht aus $n-q$ Komponenten x_i. Falls die Matrix $\tilde{P}$ nichtsingulär ist, kann das System nach der üblichen Regel gelöst werden. Andernfalls wiederholt man das Verfahren so lange, bis man ein System mit nichtsingulärer Koeffizientenmatrix erhält.

HADELER, K.P.: Über Differentialgleichungen rationaler Funktionen

Es wurde über eine im Kurs Differentialgleichungen I gestellte Übungsaufgabe berichtet. Sei $R_{p,q}$ die Klasse rationaler Funktionen mit Zählergrad $\leq p$, Nennergrad $\leq q$. Es wurde ein sehr übersichtliches Schema angegeben, aus dem sich für jede Klasse $R_{p,q}$ eine Differentialgleichung ablesen läßt, die diese Klasse als Lösungsmannigfaltigkeit besitzt.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Es wurde versucht, folgende Vortragsauszüge nach inhaltlichen Gesichtspunkten zu ordnen.

Vortragsauszüge:

RÓZSA, P.: Ein Rekursionsverfahren zur Lösung linearer Differentialgleichungssysteme mit singulären Koeffizientenmatrizen.

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$P\dot{x} + Qx = f(t) \qquad (1)$$

mit beliebigen konstanten m×n-Matrizen P und Q. Mit Hilfe einer geeigneten Transformation kann das System (1) auf eine Normalform gebracht werden. (S. z. B. Zurmühl: Matrizenrechnung Bd. ? S. 39). Für praktische Zwecke ist es jedoch im allgemeinen vorteilhafter, folgenden Weg einzuschlagen.

Wir schreiben die Gleichung (1) als homogenes System

$Ay = 0$, wo $A = [P, Q, f(t)]$ und $y = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \\ -1 \end{bmatrix}$ ist. Wird die Matrix A auf Gauß-Jordansche Normalform gebracht, so zerfällt das System automatisch in ein System von [illegible] Differentialgleichungen und in ein System von q algebraischen Gleichungen. Setzt man die allgemeine Lösung des algebraischen Systems in das Differentialgleichungssystem [illegible] ein, so erhält man an Stelle von (1) das reduzierte System $\tilde{P}\dot{\tilde{x}} + \tilde{Q}\tilde{x} = \tilde{f}(t)$. Hier haben die Matrizen $\tilde{P}$ und $\tilde{Q}$ nur noch r Zeilen und n-q Spalten; der Vektor $\tilde{x}$ besteht aus n-q Komponenten x_i. Ist die Matrix $\tilde{P}$ nichtsingulär ist, kann das System nach der üblichen Methode gelöst werden. Andernfalls wiederholt man das Verfahren so lange, bis man ein System mit nichtsingulärer Koeffizientenmatrix erhält.

[illegible], K. F.: [illegible] Differentialgleichungen rationaler Funktionen

[illegible] über eine im Kurs für Differentialgleichungen I gestellte Übungsaufgabe berichtet. Sei $R_{p,q}$ die Klasse rationaler Funktionen mit Zählergrad [illegible] p, Nennergrad ≤ q. Es wurde ein sehr übersichtliches Schema [illegible], mit dem sich für jede Klasse $R_{p,q}$ eine Differentialgleichung finden läßt, die diese Klasse als Lösungsmannigfaltigkeit besitzt.

Die Differentialgleichungen wurden als Testbeispiele für numerische Verfahren vorgeschlagen. Ähnliche Überlegungen scheinen auch an anderen Stellen vorzuliegen, wenn auch mit anderer Zielsetzung(Herleitung von Interpolationsformeln etc.).

NICKEL, K.: (zusammen mit P. RIEDER) Ein neues Runge-Kutta-ähnliches Verfahren

Lösung von $y' = f(x,y)$, $y(x_o) = y_o$. Das R-K-Verfahren wird derart modifiziert, daß noch $y' = ay + b + cx + dx^2$, $y(x_o) = y_o$ exakt gelöst wird. Ordnung: 4. Beispiele.

FILIPPI, S.: Neue Lie-Reihen-Methode

Es wird mit Hilfe der Lie-Reihen-Methode von W.Gröbner eine neue Lie-Reihen-Methode von beliebig hoher Fehlerordnung zur numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen entwickelt. Am Beispiel des restringierten Drei-Körperproblems werden Vergleichsrechnungen durchgeführt, wobei zum Vergleich die Potenzreihenmethode, das Verfahren von Runge-Kutta-Fehlberg und das Verfahren von Runge-Kutta-Shanks verwendet werden.

SCHWERMER, H.: Zur Fehlererfassung bei der numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung mit speziellen Zweipunktverfahren

Das Fehlererfassungsverfahren gründet sich auf eine spezielle Zerlegung des Gesamtintegrationsfehlers für jeden einzelnen Integrationsschritt. Diese Zerlegung gilt ganz allgemein für Zweipunktverfahren. Es entstehen drei Teilfehler, deren Summe der Gesamtfehler ist. - Für eine spezielle Zweipunktformel, die aus bestimmten Hermiteschen Entwicklungen hergeleitet wird, werden dann die einzelnen Teilfehler bestimmt. - Die Berechnung der Teilfehler und der numerischen Integrationswerte geschieht mit Intervallarithmetik. - Das Fehlererfassungsverfahren gestattet eine Bestimmung sämtlicher auftretender Fehler, das heißt sowohl des numerischen Fehlers als auch des durch das Integrationsverfahren bedingten Diskretisierungsfehlers und der durch die spezielle Struktur des Differentialgleichungssystems entstehenden Fehlerfortpflanzung.

Die Differentialgleichungen wurden als Testbeispiele für das [illegible] Verfahren vorgesehen [illegible] auch an anderen [illegible] vorzu[illegible] [illegible] Extrapolati[illegible].

MICHEL, K.: (zusammen mit [illegible] STUDER) [illegible] Runge-Kutta-[illegible] Verfahren

Lösung von $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Das [illegible]-Kutta-Verfahren wird derart modifiziert, dass [illegible] $y' = ay + b + cx + dx^2$, $y(x_0) = y_0$ exakt gelöst wird. Anhang: 4. Beispiel.

FILIPPI, S.: Neue Lie-Reihen-Methode

Es wird mit Hilfe der Lie-Gröbner-Methode von W. Gröbner [illegible] Lie-Reihen-Methode [illegible] beliebig hoher Fehlerordnung zur numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen entwickelt. Am Beispiel des [illegible] Drei-Körperproblems werden Vergleichsrechnungen durchgeführt, wobei zum Vergleich die Potenzreihenmethode, [illegible] von Runge-Kutta-Fehlberg und das Verfahren von Runge-Kutta-[illegible] verwendet werden.

SCHWERDTFEGER, F.: Zur Fehlerabschätzung bei der numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit speziellen Einschrittverfahren

Das Fehlerabschätzungsverfahren gründet sich auf eine spezielle Zerlegung des Gesamtintegrationsschrittes in einzelne Integrationsschritte. Diese Zerlegung gilt [illegible] für Zweipunktverfahren. Es entstehen drei Teilfehler, deren Summe der Gesamtfehler ist. - [illegible] Zweipunktformel, die [illegible] Hermiteschen Entwicklungen [illegible] wird, werden [illegible] die einzelnen Teilfehler bestimmt. - Die Be[illegible] noch [illegible] Teilfehler mit den numerischen Integrationswerte gerechnet [illegible]. - Die Fehlerfortpflanzungsgesetze gestatten eine Abschätzung sämtlicher auftretender Fehler, das heißt sowohl des numerischen Fehlers als auch des durch das Integrationsverfahren bedingten Diskretisierungsfehlers und der durch die spezielle Struktur des Differentialgleichungssystems entstehenden Fehlerfortpflanzung.

OPITZ, G.: Einheitliche Herleitung einer umfassenden Klasse von Interpolationsformeln. Anwendung auf die genäherte Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Es sei $w = \varphi(z)$, $z \in B$ (B Gebiet der komplexen z-Ebene), $z_0, z_1, \dots, z_{n+1}$ ein beliebiges System von $n+2$ paarweise verschiedenen Stützstellen aus B und s_{jk} die dividierte Differenz um φ, die mit $s_j, s_{j+1}, \dots, s_k$ gebildet wird. Für alle rationalen Funktionen, die höchstens p Nullstellen und q Pole besitzen, gilt

$$(*) \qquad \begin{vmatrix} s_{o,\,p+1} & \cdots & s_{o,\,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{q,\,p+1} & \cdots & s_{q,\,n+1} \end{vmatrix} = 0$$

($p+q = n$). Die Aussage ist Teil eines allgemeinen Satzes, der φ eindeutig als Quotient zweier teilerfremden Polynome vom genauen Zählergrad p und genauen Nennergrad q charakterisiert. (*) liefert sofort die gesuchte Interpolationsformel, wenn man vorschreibt, daß die Näherung einer Klasse (p, q) angehören soll. Numerische Versuche wurden bisher mit der Klasse (2, 2) unternommen. Die Ergebnisse zeigen, daß die Interpolationsformel in Sonderfällen (Nähe von Polen der Lösung) mit Vorteil benutzt werden kann.

DEJON, B.: Stabilitätskriterien in Abhängigkeit von den Normen für die Startwerte

Bei Mehrschrittdifferenzenverfahren zur Approximation gewöhnlicher Differentialgleichungen haben G. Dahlquist und P. Henciri verschiedene Normen für die Startwerte benützt. Die Wurzelkriterien, die, zusammen mit der Konsistenz des Verfahrens, die Konvergenz sichern, sind für beide Normen die gleichen. Dies ist bekannt. Es scheint noch nicht beobachtet worden zu sein, daß man bei der Norm, wie sie P. Henrici verwendet und die schwächer ist als die bei G. Dahlquist, die Klasse der zulässigen Differenzenverfahren fast bis auf die Klasse der konsistenten Verfahren einschränken muß, damit die Wurzelbedingungen hinreichend für die Stabilität sind.

STETTER, H.J.: Starke und schwache Stabilität

Eine Diskretisierung heiße "stark stabil", wenn ihre Störungsempfindlichkeit nicht größer ist als die des ursprünglichen Problems, sonst "schwach stabil" (falls überhaupt stabil im weiteren Sinne).

Anwendung auf Systeme von s gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung (lokal). Störungsempfindlichkeit der Differentialgleichung gegeben durch ihre Variationsgleichung $e' = ge + d$, g mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_s$

dominanter Eigenwert λ_1: $\mathrm{Re}\lambda_1 \geq \mathrm{Re}\lambda_\sigma$, $\sigma = 2(1)s$.

Störungsempfindlichkeit der Diskretisierung mit Schritt h:
Fehlergleichung (lin. Differenzengl. k-ter Ordnung) mit Grundlösungen

$$\zeta_\varkappa(H_\sigma),\quad \varkappa = 1(1)k,\quad \sigma = 1(1)s,\quad H_\sigma := h\lambda_\sigma .$$
$$\zeta_1(H) = \exp(H) + 0(H^{p+1}).$$

Bedingung für starke Stabilität: $|\zeta_\varkappa(H_\sigma)| \leq \max(\exp \mathrm{Re}\, H_1, |\zeta_1(H_1)|)$

$\varkappa = 1(1)k$, $\sigma = 1(1)s$

Stabilitätsbereich: $\mathfrak{S}(H_1) := \{H : |\zeta_\varkappa(H)| \leq \max(\exp \mathrm{Re}\, H_1, |\zeta_1(H_1)|\} \subset C'$

Diskussion einiger zugehöriger Fragen, u.a. Demonstration der starken Stabilität des Gragg-Bulirsch-Stoer-Verfahrens (Richardson-Extrapolation bei modifizierter mid-point rule).

HEINRICH, H.: Über Differenzenverfahren für Randwertaufgaben mit linearen Randbedingungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Fehlerabschätzung

Der Vortrag schließt an eine im Arch. Rat. Mech. Anal. 10, S. 311-322 (1962) veröffentlichte Arbeit von J.W. Schmidt/H. Schönheinz an. Er verallgemeinert das dort für Differentialgleichungen vom Typ $-y'' = f(x,y,y')$ verwendete Prinzip der Herheitung eines Differenzenverfahrens mit einer zugehörigen Fehlerabschätzung mittels eines Vergleichssatzes auf den Fall von Randwertaufgaben der Form $Ly = f(x,y,y')$, $Ly = -(py')' + qy$, lineare Randbedingungen $U_1[y] = \gamma_1$, $U_2[y] = \gamma_2$. Mit Hilfe der Greenschen Funktion zum Randwertproblem $Ly = 0$ und Randbedingungen wird ein Näherungsoperator S zum Integraloperator T, der durch [illegible], H. J.: Starke und schwache Stabilität

[illegible] "stark stabil", [illegible] Störungsempfind-lich [illegible] des ursprünglichen [illegible] Problems, so ist "schwach stabil" (falls [illegible] stabil im [illegible] Sinne).

Anwendung auf Systeme [illegible] gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung (lokal). Störungsempfindlichkeit der Differentialgleichung [illegible] durch ihre Variationsgleichung $e' = g e + d$, g mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$

dominanter Eigenwert λ_1: $Re \lambda_1 \geq Re \lambda_\sigma$, $\sigma = 2(1)s$.

Störungsempfindlichkeit der Diskretisierung mit Schritt [illegible] [illegible]gleichung (lin. Differenzengl. k-ter Ordnung) mit Grundlösungen

$\zeta_{\varkappa}(H_\sigma)$, $\varkappa = 1(1)k$, $\sigma = 1(1)s$, $H_\sigma := h\lambda_\sigma$.

$\zeta_1(H) = \exp(H) + O(H^{p+1})$.

Bedingung für starke Stabilität: $|\zeta_{\varkappa}(H_\sigma)| \leq \max(\exp Re H_1, |\zeta_1(H_1)|)$

$\varkappa = 1(1)k$, $\sigma = 1(1)s$

Stabilitätsbereich: $\mathcal{G}(H_1) := \{H : |\zeta_{\varkappa}(H)| \leq \max(\exp Re H_1, |\zeta_1(H_1)|) \}\subset \mathbb{C}$.

Diskussion einiger zugehöriger Fragen, u. a. Demonstration der starken Stabilität des Gragg-Bulirsch-Stoer-Verfahrens (Richardson-Extrapolation bei modifizierter mid-point rule).

HEINRICH, H.: [illegible] Differenzenverfahren für Randwertaufgaben mit linearen Randbedingungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen [illegible] Ordnung mit Fehlerabschätzung

Den [illegible] schließt an die [illegible] Arch. Rat. Mech. Anal. [illegible] (1962) veröffentlichte Arbeit von J. W. Schmidt/F. Schönfeld [illegible] an. Er verallgemeinert die dort für Differentialgleichungen vom Typ $-y'' = f(x, y, y')$ [illegible] Prinzip der Herleitung eines Differenzenverfahrens [illegible] Fehlerabschätzung mittels eines Vergleichsoperators [illegible] von Randwertaufgaben der Form

$Ly = f(x, y, y')$, [illegible], lineare Randbedingungen $R_1[y] = r_1$, $R_2[y] = r_2$. Mit Hilfe der Greenschen Funktion zum Randwertproblem $Ly = 0$ und Randbedingungen wird ein Näherungsoperator S zum Integraloperator T, der durch

$Ty = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi, y(\xi))d\xi$ erklärt ist, konstruiert, so daß Quadraturformel und Differenzenverfahren zueinander passen. Dies wird dadurch erreicht, daß zur Interpolation die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung $Ly = 0$ verwendet werden. Im Falle $Ly = -y''$ sind lineare Interpolation und Trapezformel die zueinander passenden Verfahren.
Der Vortrag wurde von H. Heinrich in Vertretung des Autors, H. Schönheinz, TH Dresden, gehalten.

KRÜCKEBERG, F.: Fehlereinschließung durch Defekterfassung bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen

Es wird eine Methode angegeben, die es gestattet, für den Defekt eine sichere und enge Einschließung zu gewinnen. Alle auftretenden Rundungsfehler werden dabei mitberücksichtigt. Ferner wird eine Methode angegeben, die zur sicheren Einschließung der Lösung des Fehlerdifferentialgleichungssystems führt, das üblicherweise unter Verwendung des Defektes aufgestellt wird. Einige weitere Anwendungen für die zum Aufbau der genannten Methoden entwickelten Begriffe werden skizziert. Zur Ergänzung werden Beispiele gebracht.

TÖRNIG, W.: Über Konvergenzbereiche von Differenzapproximationen für quasilineare hyperbolische Anfangswertprobleme

Zur numerischen Lösung des quasilinearen hyperbolischen Anfangswertproblems in der Normalform

$$(*) \qquad \begin{aligned} A(x,y,u)u_y + C(x,y,u)\,A(x,y,u)u_x &= b(x,y,u) \\ u(x,0) &= f(x), \quad \alpha \le x \le \beta \end{aligned}$$

mit

$$u = (u^1, \dots, u^n)', \quad b = (b^1, \dots, b^n)', \quad f = (f^1, \dots, f^n)',$$

der Diagonalmatrix C und der $n \times n$-Matrix A, sind bisher mehrere nachweisbar konvergente Differenzapproximationen in Rechteckgittern aufgestellt worden, welche sämtlich die Approximationsordnung 1 besitzen. Darüber hinaus existiert eine allgemeinere Konvergenztheorie der Differenzapproximationen zur Lösung des Problems (*). Bei allen bekanntgewordenen Verfahren erster Ordnung ist es bisher nur gelungen, ihre Konvergenz in einem hinreichend kleinen Streifen

$0 \leq y \leq Y$ nachzuweisen. Dabei läßt sich über die Größenordnung von Y zudem praktisch kaum etwas aussagen. Es läßt sich nun zeigen, daß dieser schwerwiegende Nachteil nicht besteht, wenn die Koeffizienten von (*) hinreichend glatt sind. Zum Beweis wird ein Gedanke von G. Strang (Num. Math. 6 (1964)) sowie die erwähnte allgemeinere Theorie herangezogen.

BRUHN, G.: Ein Charakteristikenverfahren für instationäre Strömungen

Gegenstand des Vortrages ist die numerische Behandlung der partiellen Differentialgleichungen für die instationäre Strömung eines kalorisch idealen Gases. Neben der reinen Anfangswertaufgabe werden auch Anfangsrandwertaufgaben mit Rändern ohne Massendurchtritt betrachtet. Während die üblichen Differenzenverfahren auf direkter Diskretisierung der Differentialgleichungen beruhen, werden bei dem vorliegenden Verfahren die inneren Eigenschaften des Systems wesentlich berücksichtigt. Dazu wird das System nach Einführung gewisser nichtintegrabler Differentialformen nebst der zugehörigen Pfaffschen Ableitungen in Beziehungen auf seiner charakteristischen Mannigfaltigkeit umgeschrieben. Die Diskretisierung dieser Beziehungen führt dann zu einem Verfahren, das automatisch die für hyperbolische Differentialgleichungen typischen Bestimmtheitsgebiete berücksichtigt. Praktisch durchgerechnete Beispiele zeigen keine Neigung zu Instabilitäten.

SCHARF, V.: Ein Verfahren zur Lösung des Cauchy-Problems für lineare Systeme

Durch Verallgemeinerung des Begriffes des Matrizanten einer Matrix $\mathfrak{A}(t)$ auf lineare Differentialoperatoren D gelingt es, Reihenentwicklungen für die Lösungen des Cauchy-Problems $\frac{\partial u}{\partial t} = D[u]$, $u(0,x) = \mathfrak{f}(x)$ zu gewinnen. Die Form dieser Reihendarstellungen liefert die Möglichkeit zur Anwendung numerischer Methoden, durch welche die Lösung in Schranken eingeschlossen werden kann.

ANSORGE, R.: Zur Frage der Verallgemeinerung des Äquivalenzsatzes von P.D. Lax

Es besitze die nicht notwendig lineare Aufangswertaufgabe

$u_t = Au$, $u(0) = u_o$, in $[0, T]$ zu jedem Anfangselement u_o eines Banachraumes B eindeutige schwache Lösungen $u(t) = E(t)u_o$ mit stetigen Lösungsoperatoren $E(t)$, die eine Halbgruppe bilden. Antwort auf die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen ein konsistentes Differenzenverfahren gegen die schwachen Lösungen konvergiert, gibt im linearen Fall der Äquivalenzsatz von Lax, der auf dem Satze von Banach und Steinhaus beruht. Fordert man, was numerisch sinnvoll ist, sogar stetige Konvergenz (die zumindest im linearen Fall mit der Konvergenz zusammenfällt), so kann eine aus Sätzen von Pinow formulierbare Verallgemeinerung des Banach-Steinhaus'schen Satzes auch in nichtlinearen Fällen Auskunft über notwendige und hinreichende Bedingungen für stetige Konvergenz der Differenzenverfahren geben und damit zu Verallgemeinerungen des Lax'schen Satzes beitragen. Schwach-nichtlineares Beispiel: Halblineare Systeme mit lipschitzstetiger rechter Seite.

WALTER, W.: Neue Ergebnisse über parabolische Differential-Ungleichungen

Es wird berichtet über Ergebnisse, welche z.T. vom Vortragenden, z.T. von Herrn Dr. Becker stammen. Es handelt sich um zwei Typen von Randwertaufgaben für parabolische Differentialgleichungen, denen bei der Interpretation als Wärmeleitung folgender Sachverhalt entspricht:

1. Wärmeleitung in Körpern, welche aus mehreren Komponenten zusammengesetzt sind, wobei an den Trennflächen Übergangsbedingungen (Energiebilanzen) gegeben sind.
2. Wärmeleitung in Körpern, welche sich in einem Wärmebad befinden.

Für beide Probleme werden Sätze vom Nagumo-Westphal-Typ bewiesen, woraus sich die Möglichkeit der Approximation der Lösung durch Ober- und Unterfunktionen ergibt. Sätze über Eindeutigkeit und Stabilität sind Folgerungen.

WETTERLING, W.: Lösungsschranken beim Differenzenverfahren für die Potentialgleichung

Das Differenzenverfahren für die erste Randwertaufgabe bei der Potentialgleichung in zwei unabhängigen Veränderlichen wird so ausgebaut,

daß es in den Gitterpunkten Lösungsschranken liefert. Dabei tritt an die Stelle der Differenzengleichungen ein System von Ungleichungen, so daß im Prinzip eine Optimierungsaufgabe zu behandeln ist.

Es wird ein Bereich B zugrunde gelegt, der Vereinigung von endlich vielen Quadraten eines Quadratgitters der Maschenweite h ist. Ist $u(x)$ eine Funktion, die auf den inneren und den Randgitterpunkten definiert ist und gilt für diese Funktion $D_o u(x) \leq 0$ für alle inneren Gitterpunkte x, wobei D_o der Differenzenoperator mit dem

"Stern" $\begin{matrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{matrix}$ ist, sowie $u(x) \leq f(x)$ (gegebene Randfunktion)

in den Randgitterpunkten x und sind vier weitere Bedingungen I bis IV erfüllt, so ist $u(x) \leq U(x)$ in allen inneren Gitterpunkten, wenn $U(x)$ Lösung der Randwertaufgabe ist. Die Begründung gelingt mit dem Randmaximumsatz. Die Bedingungen I bis III werden mittels interpolierender Polynome $v_x(t)$ formuliert, die jeweils in den acht Gitterpunkten auf dem Rand eines Quadrates der Seitenlänge 2h (mit dem inneren Gitterpunkt x als Mittelpunkt) mit $u(x)$ übereinstimmen. $v_x(t)$ sind dabei Polynome vom Grade ≤ 4, die der Potentialgleichung genügen. Die Bedingung IV besagt: $U(x)$ sei nicht welbst ein Polynom vom Grade ≤ 4. Obere und untere Schranken für $U(x)$ kann man aus einer linearen Optimierungsaufgabe erhalten, deren Lösbarkeit feststeht, deren Behandlung mit dem Simplexverfahren aber einen im Vergleich zur Lösung des linearen Gleichungssystems beim Differenzenverfahren sehr hohen Rechenaufwand erfordert. Günstiger erscheint es, die Bedingungen I bis III in der ursprünglichen nichtlinearen Form beizubehalten und iterativ Schranken zu bestimmen.

NITSCHE, J.: Zum Ritzschen Verfahren bei elliptischen Differentialgleichungen

1. Seien für n = 1,2,... Näherungen $x_n = R_n f$ der Gleichungen $Ax = f$ bestimmt, so liegt gleichmäßige bzw. Operator-Konvergenz bei

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|f\|=1} \|x_n - A^{-1}f\| = 0 \qquad \text{bzw.}$$

$$\| R_n - A^{-1} \| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

vor.

2. Anhand eines Beispiels wird gezeigt, daß es Fälle gibt, in denen das Ritzsche Verfahren gleichmäßig konvergiert, während das nicht für die Fehlerquadratmethode gilt (der Operator ist dabei der einer elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung in 2 Variablen).

3. Es wird im Falle eines elliptischen Operators gezeigt, daß bei Wahl der Basis-Funktionen als Eigenfunktionen eines zweiten elliptischen Operators das Ritzsche Verfahren gleichmäßig konvergiert.

WENDLAND, W.: Randwertaufgaben elliptischer Differentialgleichungssysteme

Die Lösbarkeit und Lösungsmannigfaltigkeit einer Randwertaufgabe eines elliptischen Systems erster Ordnung für zwei gesuchte Funktionen u, v von zwei unabhängigen Variablen in $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}$ wird beschränkt, einfach zusammenhängend und glatt berandet vorausgesetzt. $\dot{\mathfrak{G}}$ sei der Rand von $\mathfrak{G}$.) hängen von der Charakteristik $\frac{1}{2\pi}(\tau(s) - \tau(s+1))$ der Randbedingung

$$u \cos \tau(s) + v \sin \tau(s) = \varphi(s) \quad \text{auf} \quad \dot{\mathfrak{G}}$$

ab. Die Klasse der Randwertaufgaben mit ganzzahliger Charakteristik wird auf die Randwertaufgabe der Charakteristik Null und diese schließlich auf die erste Randwertaufgabe

$$u = \varphi \quad \text{auf} \quad \dot{\mathfrak{G}}$$

zurückgeführt.

Die numerische Lösung der ersten Randwertaufgabe kann entweder mit Hilfe einer eindeutig lösbaren Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art oder mit Hilfe von Differenzengleichungen in Angriff genommen werden.

AMANN, H.: Monte-Carlo-Methoden zur Lösung elliptischer Randwertprobleme

Betrachtet wird das diskrete Dirichletproblem in einem Gittergebiet $\mathfrak{G}_h$ mit Rand $\partial \mathfrak{G}_h$: $\Delta_h u = 0$ in $\mathfrak{G}_h$, $u = \varphi$ auf $\partial \mathfrak{G}_h$.

Die bekannte Monte-Carlo-Methode (MCM) hat den Nachteil, daß sie eine Näherungslösung nur für einen einzigen Punkt liefert. Es wird ein

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

[illegible]

vor.

2. [illegible] wird gezeigt, daß [illegible] Nitzsch-Verfahren gleichmäßig konvergiert, während der [illegible] nicht für die Fehlerquadrat[illegible] gilt (der Operator [illegible] dabei der [illegible] elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung [illegible]).

3. Es wird im Falle [illegible] elliptischen Operators gezeigt, daß [illegible] der Basis-Funktionen als Eigenfunktionen eines zweiten elliptischen Operators das Ritzsche Verfahren gleichmäßig konvergiert.

WENDLAND, W.: Randwertaufgaben elliptischer Differentialgleichungs-systeme

Die Lösbarkeit und [illegible] einer Randwertaufgabe [illegible] elliptischen Systems [illegible] für zwei gesuchte Funktionen [illegible] von zwei unabhängigen Veränderlichen [illegible] wird beschränkt, einfach zusammenhängend und glatt berandet vorausgesetzt. [illegible] der [illegible] hängen von der Charakteristik $\frac{1}{2\pi}$ [illegible] der Randbedingung

u cos [illegible] + v sin [illegible] = φ(s) auf [illegible]

ab. Die Klasse der Randwertaufgaben mit ganzer [illegible] Charakteristik wird auf die Randwertaufgabe der Charakteristik [illegible] und diese schließlich auf die erste Randwertaufgabe

u = [illegible] auf [illegible]

zurückgeführt.

Die numerische Lösung der ersten Randwertaufgabe kann entweder mit Hilfe [illegible] Lösbaren [illegible] Integralgleichung zweiter Art oder mit Hilfe von Differenzengleichungen in Angriff genommen werden.

[illegible]MANN, F.: Monte-Carlo-Methoden zur Lösung elliptischer Randwertprobleme

Betrachtet wird das [illegible] Dirichletproblem in [illegible] Gitterbebiet [illegible] mit Rand [illegible]: [illegible] in [illegible], u = [illegible] auf [illegible].

Die bekannte Monte-Carlo-Methode (MCM) hat den Nachteil, daß sie eine Näherungslösung nur für einen einzigen Punkt liefert. Es wird ein

Verfahren beschrieben - die Monte-Carlo-Methode mit Informationsspeicherung (MCMI) -, welche es gestattet, für das ganze Gebiet gleichzeitig eine Lösung zu berechnen. Hierbei wird bei der Simulation eines einzigen Irrweges jeder Punkt, der mindestens einmal berührt wird, als Ausgangspunkt einer Irrfahrt angesehen. Dieses Verfahren hat asymptotisch dieselben statistischen Eigenschaften wie die MCM, d.h. die Schätzgröße ist erwartungstreu, konsistent und asymptotisch normalverteilt.
Die beiden Verfahren werden in Abhängigkeit von h miteinander verglichen. Bei passenden Verallgemeinerungen des Irrfahrtmodells können, bei geeigneter Diskretisierung, auch das zweite und dritte Randwertproblem für allgemeine, gleichmäßig elliptische lineare Differentialgleichungen mit der MCMI behandelt werden.