Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Funktionalgleichungen

10. bis 16. Juli 1966
(4. Tagung)

Die vierte Tagung über Funktionalgleichungen fand vom 10. bis 16. Juli im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Sie stand, wie bisher, unter der Leitung der Professoren J. ACZÉL (Waterloo, Ont. - Giessen), O. HAUPT (Erlangen-Nürnberg) und A. OSTROWSKI (Basel).

Alle Teilnehmer fühlten sich, wie immer, von der Oberwolfacher Atmosphäre besonders angeregt und ungemein bereichert sowohl durch die Vorträge als auch durch die Diskussionen, neu gestellte Probleme und die persönlichen wissenschaftlichen Kontakte.

Für die diesjährige Tagung erscheint besonders charakteristisch die weitgehende Heranziehung der Strukturen der modernen Algebra und Funktionalanalysis als Basisstrukturen der Funktionalgleichungen (z.B. in Zusammenhang mit alternierenden Gleichungen und gruppentheoretischen Gesichtspunkten). Daneben kamen die klassischen Problemstellungen und Methoden zur Geltung (z.B. bei Funktionalgleichungen erster Stufe, bei Fragen nach analytisch ausgezeichneten Lösungen einerseits, und bei der Reduktion der Regularitätsvoraussetzungen andererseits). Hervorzuheben wären ferner Anwendungen auf verschiedene Gebiete der Geometrie, der Algebra und schließlich der Wirtschaftswissenschaft.

Wir möchten nicht verfehlen, darauf hinzuweisen, daß sich die Reihe der Tagungen über Funktionalgleichungen auszuwirken beginnt in der Bildung von Arbeitskreisen und organisch zusammenhängenden Vortragsgruppen. Auch diesmal wurden einige früher und hier gestellte Probleme im Laufe der Tagung gelöst.

Leider waren mehrere Kollegen durch Schwierigkeiten z.B. bürokratischer Natur an der Teilnahme verhindert.

18 Teilnehmer aus fünf Ländern waren anwesend.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Tagungsbericht

Funktionalgleichungen
10. bis 16. Juli 1966
(4. Tagung)

Die vierte Tagung über Funktionalgleichungen fand vom 10. bis 16. Juli im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Sie stand, wie bisher, unter der Leitung der Professoren J. Aczél (Waterloo, Ont. - Giessen), O. HAUPT (Erlangen-Nürnberg) und A. OSTROWSKI (Basel).

Alle Teilnehmer fühlten sich, wie immer, von der Oberwolfacher Atmosphäre besonders angeregt und ungemein bereichert sowohl durch die Vorträge als auch durch die Diskussionen, neu gestellte Probleme und die persönlichen wissenschaftlichen Kontakte.

Für die diesjährige Tagung erscheint besonders charakteristisch die weitgehende Heranziehung der Strukturen der modernen Algebra und Funktionalanalysis als Basisstrukturen der Funktionalgleichungen (z.B. in Zusammenhang mit alternierenden Gleichungen und gruppentheoretischen Gesichtspunkten). Daneben kamen die klassischen Problemstellungen und Methoden zur Geltung (z.B. bei Funktionalgleichungen erster Stufe, bei Fragen nach analytisch ausgezeichneten Lösungen, einerseits bei der Reduktion der Regularitätsvoraussetzungen andererseits). Hervorzuheben wären ferner Anwendungen auf verschiedene Gebiete der Geometrie, der Algebra und schließlich der Wirtschaftswissenschaft.

Wir möchten nicht verfehlen, darauf hinzuweisen, daß sich die R[illegible] der Tagungen über Funktionalgleichungen auszuwirken beginnt in der Bildung von Arbeitskreisen und organisch zusammenhängenden Vortragsgruppen. Auch diesmal wurden [illegible] im Laufe der Tagung gelöst.

Leider waren mehrere Kollegen durch Schwierigkeiten z.B. bürokratischer [illegible] an der Teilnahme verhindert.

18 Teilnehmer aus fünf Ländern waren anwesend.

Teilnehmer:

ACZÉL, J. (Waterloo, Ont., Kanada - z-Zt. Giessen)
DJORDJEVIĆ, R. (Beograd, Jugoslawien)
EICHHORN, W. (Würzburg)
FISCHER, P. (Budapest, Ungarn)
FUCHS, L. (Budapest, Ungarn)
GOŁAB, St. (Kraków, Polen)
HARUKI, H. (Osaka, Japan)
HAUPT, O. (Erlangen-Nürnberg)
KANNAPPAN (Annamalai Nagar, Indien)
KNESER, H. (Tübingen)
KUCZMA, M. (Katowice, Polen)
MAIER, W. (Jena)
McKIERNAN, M.A. (Waterloo, Ont., Kanada)
MUSZÉLY, Gy. (Budapest, Ungarn)
OSTROWSKI, A. (Basel, Schweiz)
SCHWERDTFEGER, H. (Montreal, Kanada)
TARGONSKI, Gy. (New York, USA - z.Zt. Zürich, Schweiz)
VASIĆ, P.M. (Beograd, Jugoslawien)

Kurzfassungen der Vorträge sowie die Problemstellungen und Bemerkungen folgen (getrennt voneinander) in chronologischer Reihenfolge.

A. Vortragsauszüge:

KUCZMA, M.: Über den unbestimmten Fall in der Theorie der linearen Funktionalgleichung erster Stufe und Ordnung

Die Gleichung

(1) $$\varphi[f(x)] = g(x)\,\varphi(x) + F(x)$$

(φ - unbekannt) wird in einem linksgeschlossenen Intervall $[a,b)$ betrachtet unter den Annahmen, daß die Funktionen f, g und F in $[a,b)$ stetig sind, f streng monoton wächst und die Ungleichungen $a < f(x) < x$ in (a,b) erfüllt $(f(a) = a)$ und $g(x) \neq 0$ in (a,b). Das Verhalten der stetigen Lösungen der Gleichung (1) hängt davon ab, ob $|g(a)| < 1$ oder $|g(a)| > 1$ ist. Der Fall, wo $|g(a)| = 1$ ist, wird der unbestimmte genannt. Für diesen unbestimmten Fall wird jetzt das Verhalten der in

$[a, b)$ stetigen Lösungen untersucht. Es stellt sich heraus, daß es im wesentlichen drei Möglichkeiten gibt, abhängig von dem Verhalten des unendlichen Produktes $\prod_{n=0}^{\infty} g[f^n(x)]$.

Wenn man die Lösungen untersucht, die in $[a, b)$ von der Klasse C^r sind, dann ist der unbestimmte Fall der, wo $|g(a)/[f'(a)]^r| = 1$ ist. Für $r = 1$ wurde dieses Problem von B. CHOCZEWSKI betrachtet.

TARGONSKI, Gy.: Lineare Operatoren auf Funktionenalgebren

Operatoren auf Funktionenalgebren "mit einem Multiplikationstheorem" werden untersucht. In nullteilerfreien Algebren mit Einselement gehören alle solche Operatoren in eine von drei Klassen: Multiplikatoren (M), Substitutionen (H) und Derivationen (D). Die Klasse D enthält Logarithmen von Operatoren der Klasse H. Die SCHRÖDERsche Gleichung erscheint in diesem Zusammenhang als Eigenwertgleichung des Substitutionsoperators. Die Frage nach der Entwicklung von Elementen nach Reihen (bzw. Integralen) von Lösungen führt zu einer der Theorie der linearen Differentialgleichungen analogen Behandlung für lineare Funktionalgleichungen.

OSTROWSKI, A.: Über eine Verallgemeinerung des EULERschen Produktes $\prod (1 + x^{2^\nu})$.

Das allgemeine Produkt wird angesetzt als $\prod_{\nu=0}^{\infty} (1 + x_\nu) = \Phi(x)$, wo $x_0 = x$, $x_{\nu+1} = \varphi(x_\nu)$ ist. Die Aufgabe war, alle Fälle zu finden, wo $\varphi(x)$ rational und $\Phi(x)$ algebraisch ist, während das Produkt etwa in einer Umgebung des Ursprungs konvergiert. Die Untersuchung lief auf die Behandlung der Funktionalgleichung $\Phi(x) = (1+x)\,\Phi(\varphi(x))$ hinaus und förderte viele bemerkenswerte Spezialentwicklungen.

HARUKI, H.: On the functional equation $f(x+y) = F(f(x), f(y))$.

The following theorem is proved:

THEOREM: If $f(x)$ ($\not\equiv$ const) is a one-valued meromorphic function in $|x| < +\infty$, and $F(u, v)$ is a one-valued complex function of two complex variables u, v in $|u| < +\infty$, $|v| < +\infty$, then the solution of [a, b] stetigen Lösungen untersucht. Es stellt sich heraus, daß es wesentlichen drei Möglichkeiten gibt, abhängig von dem Verhalten unendlichen Produktes $\prod_{r=0}^{\infty} g[f^r(x)]$.

Wenn man die Lösungen untersucht, die in [a, b] von der Klasse C sind, dann ist der unbestimmte Fall der, wo $|g(a)/[f'(a)]^r| = 1$. Für r = 1 wurde dieses Problem von R. CHOCZEWSKI betrachtet.

TARGONSKI, Gy.: Lineare Operatoren auf Funktionalgebren

Operatoren auf Funktionalalgebren "mit einem Multiplikations... werden untersucht. In nullteilerfreien Algebren mit Einselement ... ren alle solche Operatoren in eine von drei Klassen: Multiplikato... (M), Substitutionen (S) und Derivationen (D). Die Klasse D enthält Logarithmen von Operatoren der Klasse M. Die SCHRÖDERsche G... chung erscheint in diesem Zusammenhang als Eigenwertgleichung Substitutionsoperators. Die Frage nach der Entwicklung von Elem... nach Reihen (bzw. Integralen) von Lösungen führt zu einer der Th... der linearen Differentialgleichungen analogen Behandlung für die Funktionalgleichungen.

OSTROWSKI, A.: Über eine Verallgemeinerung des EULERschen Produktes $\prod (1+x^{2^\nu})$.

Das allgemeine Produkt wird angesetzt als $\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+x_\nu) = \varphi(x)$, $x_0 = x$, $x_{\nu+1} = \sigma(x_\nu)$ ist. Die Aufgabe war, alle Fälle zu finden ... $\sigma(x)$ rational und $\varphi(x)$ algebraisch ist, während das Produkt stets einer Umgebung des Ursprungs konvergiert. Die Untersuchung ... die Behandlung der Funktionalgleichung $\varphi(x) = (1+x)\,[illegible](\sigma(x))$ ... und forderte viele bemerkenswerte Spezialentwicklungen.

[illegible], H.: On the functional equation $f(x+y) = F(f(x), f(y))$.

The following theorem is proved:

THEOREM: If $f(x)$ ($\neq$ const) is a one-valued meromorphic function in $|x| < \infty$, and $F(u,v)$ is a one-valued complex function of two complex variables u, v in $|u| < +\infty$, $|v| < +\infty$, and the solution of ...

$$f(x+y) = F(f(x), f(y))$$

are the following and only these:

(i) $$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

(ii) $$f(x) = \frac{a\ \exp(kx)+b}{c\ \exp(kx)+d},$$

where a, b, c, d, k are arbitrary complex constants with $(ad - bc)k \neq 0$.

KUCZMA, M.: Über analytische Lösungen gewisser Funktionalgleichungen

Es wurde über Arbeiten von W. SMAJDOR, A. SMAJDOR und M. KUCZMA berichtet. Sind $f(z)$ und $h(z, w)$ in Umgebung von $z = 0$ bzw. $(z, w) = (0, 0)$ analytische (komplexe) Funktionen komplexer Veränderlichen, $f'(0) = s$ mit $0 \leq |s| < 1$ und existiert eine formale Lösung $\varphi(z)$ der Funktionalgleichung $\varphi(z) = h(z, \varphi[f(z)])$, die die Bedingung $\varphi(0) = 0$ erfüllt, so ist diese Lösung nicht nur formal, sondern auch aktuell, d.h. die formale Potenzreihe $\varphi(z)$ hat einen positiven Konvergenzradius. Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung des KÖNIGschen Satzes über die SCHRÖDERsche Funktionalgleichung angesehen werden.

Der Fall der Gleichung $\varphi[f(z)] = g[\varphi(z)]$, wo $f(z)$ im Nullpunkt eine Nullstelle höherer Ordnung hat, läßt sich auf den vorigen zurückführen durch die Einführung einer neuen unbekannten Funktion $\varphi(z) = z^{-r}\varphi(z)$.

Der Fall $|s| = 1$ (s keine Einheitswurzel) ist wesentlich schwieriger. Für die lineare Gleichung $\varphi[f(z)] - g(z)\varphi(z) = F(z)$ wurde die Existenz einer Menge M auf dem Einheitskreis, vom Maß 2π, bewiesen, so daß, wenn $s \in M$ und $g(0) = s^k$ ($k \geq 0$, ganz), dann hat die homogene Gleichung $(F(z) \equiv 0)$ eine einparametrige Familie der nicht identisch verschwindenden und in einer Umgebung vom Nullpunkt analytischen Lösungen. Für die inhomogene Gleichung $(F(z) \not\equiv 0)$ wurden, unter denselben Annahmen $s \in M$, $g(0) = s^k$, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen gefunden, damit es analytische Lösungen geben soll.

SCHWERDTFEGER, H.: Über eine Funktionalgleichung der Gruppentheorie

Das Problem der normalen Gruppenerweiterung einer multiplikativen Gruppe G mit einer additiven Gruppe Γ führt auf die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = F(f(x), f(y))$$

are the following and only these:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{i}$$

$$f(x) = \frac{a \exp(kx) + b}{c \exp(kx) + d}, \tag{ii}$$

where a, b, c, d, k are arbitrary complex constants with $(ad - bc)k \neq 0$.

KUCZMA, M.: Über analytische Lösungen gewisser Funktionalgleichungen

Es wurde über Arbeiten von W. SMAJDOR, A. SMAJDOR und M. KUCZMA berichtet. Sind $f(z)$ und $h(z, w)$ in Umgebung von $z = 0$ bzw. $(z, w) = (0, 0)$ analytische (komplexe) Funktionen komplexer Veränderlichen, $f'(0) = s$ mit $0 \leq |s| < 1$ und existiert eine formale Lösung $\varphi(z)$ der Funktionalgleichung $\varphi(z) = h(z, \varphi[f(z)])$, die der Bedingung $\varphi(0) = 0$ erfüllt, so ist diese Lösung nicht nur formal, sondern auch aktuell, d.h. die formale Potenzreihe $\varphi(z)$ hat einen positiven Konvergenzradius. Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung des KÖNIGschen Satzes über die SCHRÖDERsche Funktionalgleichung angesehen werden.

Der Fall der Gleichung $\varphi[f(z)] = g(z, \varphi(z))$, wo $f(z)$ im Nullpunkt eine Nullstelle höherer Ordnung hat, läßt sich auf den vorigen zurückführen durch die Einführung einer neuen unbekannten Funktion $\psi(z) = z^{-r}\varphi(z)$.

Der Fall $|s| = 1$ (s keine Einheitswurzel) ist wesentlich schwieriger. Für die lineare Gleichung $\varphi[f(z)] - s\varphi(z) = F(z)$ wurde die Existenz einer Menge M auf dem Einheitskreis, vom Maß 2π, bewiesen, so daß, wenn $s \in M$ und $f(0) = s^k$ ($k \geq 1$, ganz), dann hat die homogene Gleichung ($F(z) \equiv 0$) eine einparametrige Familie der nicht identisch verschwindenden und in einer Umgebung vom Nullpunkt analytischen Lösungen. Für die inhomogene Gleichung ($F(z) \not\equiv 0$) wurden, unter denselben Annahmen $s \in M$, $g(0) = s^k$, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen gefunden, damit es analytische Lösungen geben soll.

SCHWERDTFEGER, H.: Über eine Erweiterung der Gruppentheorie

Das Problem der normalen Gruppenerweiterung einer multiplikativen Gruppe G mit einer additiven Gruppe A führt auf die Funktionalgleichung

$$g(\alpha, \beta+\gamma)\, g(\beta, \gamma) = g(\alpha+\beta, \gamma)\, \varphi_\gamma(g(\alpha, \beta)),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ und $g(\alpha, \beta) \in G$ und die $\varphi_\gamma(a)$ Automorphismen in G sind. Wenn $G = R^x$ die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen ist und Γ eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen (mod 2π), so ist $\varphi_\gamma(a) = a$ und $g(\alpha, \beta) = \text{const.}$

MAIER, W.: Simpliciale Funktionalgleichungen.

Die Geometrie n-dimensionaler Räume fester Krümmung baut das Inhaltsmaß eines Simplex auf durch $n+1$ unabhängige Veränderliche wie Keilwinkel oder Kantenlängen. Durch eine Zerlegung des Ausgangssimplex in Teilsimplexe entstehen Funktionalgleichungen, die sich mit n (mod 2) wesentlich unterscheiden). Die durch n-gliedrige Züge paarweise orthogonaler Kanten entstandenen Simplexe heißen Orthoscheme (Ose). Im Fall positiver Raumkrümmung bilden komplementär ergänzte Ose geschlossene Ketten und führen zu quadratischen Funktionalgleichungen der COXETERschen 2-Zeiger Symbole.

Die Inhaltssumme für 2 benachbarte Ose vereinfacht sich hinsichtlich benötigter Integrationen. Faßt man die Gesamtheit aller durch m-fache Integration rationaler entstehenden Funktionen als Vektorraum auf, so können einerseits die seit E. KUMMER bekannten Funktionalgleichungen der Polylogarithmen $L_m(z)$ verstanden werden als Folgerung aus dem Bestehen endlicher Gruppen. Andererseits können bei $m > 5$ keine zweistufigen lineare Funktionalgleichungen für L_m bestehen.

GOŁĄB, S.: Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte

Es werden die Lösungen der Funktionalgleichung

(1) $$\varphi[xy+\lambda] = \varepsilon x^n \varphi[y+\varphi^{-1}(\varepsilon\mu x^{-n})]$$

untersucht, wo

$$\varepsilon = 1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} x,$$

n eine festgelegte natürliche Zahl ist, und λ einen Parameter bedeutet. Dabei ist

$$\mu = \varphi(\lambda).$$

φ^{-1} bedeutet die zu φ inverse Funktion. Der Bereich der Funktional-

$$g(\alpha, \beta+\gamma)\, g(\beta, \gamma) = g(\alpha+\beta, \gamma) [illegible] g(\alpha, [illegible])),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \in$ [illegible] und $g(\alpha, 0) = C$ und die [illegible]$_\gamma(a)$ Automorphismen in G sind. Wenn [illegible] $= R^x$ die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen ist und [illegible] eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen (mod [illegible]), so ist [illegible]$_\gamma(a) = a$ und [illegible]$(\alpha, \beta) =$ const.

MAHER, W.: Simplicial[illegible] Funktionalgleichungen

Die Geometri[illegible] [illegible]dimensionaler Räume fester Krümmung baut das Inhaltsmaß eines [illegible] Simplex auf durch $n+1$ unabhängig Veränderliche wie Kantenwinkel [illegible] Kantenlängen. Durch eine Zerlegung des Ausgangs-Simplex in [illegible] Simplexe entstehen Funktionalgleichungen, die sich mit (mod 2) [illegible] [illegible]tlich unterscheiden). Die durch n-gliedrige Züge paarweise orthogonaler Kanten entstehende Simplexe [illegible] Orthoschema (...). Im Fall positiver Raumkrümmung bilden [illegible] ergänzte geschlossene Kette und führen zu quadratischen [illegible]mal-gleichungen der [illegible]schen 3-Zeiger Symbole.

Die Inhaltsumme für [illegible] Ecke des [illegible] verknüpft sich hinsichtlich benötigter Integrationen. Faßt man die Gesamtheit aller durch m-fache Integration rationaler entstehenden Funktionen als Vektorraum auf, so können einerseits die seit E. KUMMER bekannten Funktionalgleichungen der Polylogarithmen $L_m(z)$ verstanden werden als Folgerung aus dem Bestehen [illegible] Gruppen. Andererseits können bei m [illegible] keine zweistufige[illegible] [illegible]gleichungen für L_m bestehen.

[illegible]MAR, S.: [illegible] Funktionalgleichung der Theorie [illegible] geometrischen Objekte

Es werden [illegible] Lösungen der Funktionalgleichung

$$[illegible] = [illegible]^{-1} [illegible] \qquad (1)$$

untersucht, [illegible]

$$[illegible] = 1 \quad \text{oder} \quad [illegible] = \operatorname{sgn} [illegible]$$

[illegible] eine feste natürliche Zahl ist, und [illegible] ein Parameter bedeutet. Dabei ist

$$[illegible]([illegible]).$$

$^{-1}$ bedeutet die zu [illegible] Funktion. Der Bereich [illegible] gleichung ist

y beliebig,

$x \neq 0$, sonst beliebig.

Es wird auch auf eine weitgehende Verallgemeinerung der Funktionalgleichung (1) hingewiesen.

McKIERNAN, M.A.: Generalization of a characterization of MÖBIUS transformation by elementary functional equation

Let f map the four complex points z_o, z_1, z_2, z_3, not on one circle, to $z_i' = f(z_i)$ also not on one circle. Let C_o be the circle through z_1, z_2, z_3, C_1 through z_o, z_2, z_3 and C_2 that through z_o, z_1, z_3. Similarly C_i' is the circle through z_j' for $j \neq i$. If f is such that

1) $f(z_i) = f(z)$ implies $z = z_i$ for $z \in D = \bigcup_{j=o}^{2} C_j$;

2) f maps D onto $D' = \bigcup_{j=o}^{2} C_j'$;

3) f maps any three points of D which are co-dircular with z_1, z_2 or z_3 into points of D' co-circular with z_1', z_2', or z_3' respectively, then f coincides on the set D with a MÖBIUS transformation or its conjugate.

(These results were obtained in collaboration with Prof. J. ACZEL).

ACZÈL, J.: Über Kollineationen von drei und von vier Geraden der projektiven Ebenen über beliebigen Körpern

Eine in den Schnittpunkten ein-eindeutige Abbildung dreier bzw. vierer Geraden der projektiven Ebene über einem Körper, die kollineare Punkte dieser Geraden in ebensolche überträgt, ist die Zusammensetzung zweier linearen Transformationen mit einem Endomorphismus der multiplikativen Halbgruppe bzw. des Körpers (in der Mitte).

Auf die Entwicklungsgeschichte der Sätze und Beweise sowie auf den Zusammenhang mit der Theorie der Gewebe wurde auch hingewiesen.

KNESER, H.: Zur lokalen Iteration analytischer Funktionen

Sei $z \to g(z)$ holomorph bei $z = 0$, $g(0) = 0$, also $g(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$. Die Iteration $z_o = z$, $z_{n+1} = g(z_n)$ wird im Falle $|a_1| \neq 1$ beherrscht durch die von G. KOENIGS gegebene Lösung φ der SCHRÖDER-Glei-

gleichen ist

y [illegible] beliebig,

$x \neq 0$, sonst beliebig.

[illegible] wird auch auf eine weitgehende Verallgemeinerung der Funktional-gleichung (1) hingewiesen.

MONKEMEYER, M.A.: On realization of a characterization of MÖBIUS transformation by elementary functional equation

Let f map the four complex points z_0, z_1, z_2, z_3, [illegible] on a circle, to $z_i' = f(z_i)$ also not on one circle. Let C_0 be the circle through z_1, z_2, z_3, C_1 through z_0, z_2, z_3 and C_2 that through z_0, z_1, z_3. Similarly C_i' is the circle through z_j' for $j \neq i$. If f is such that

1) $f(z_1) = f(z)$ implies $z = z_1$ for [illegible] C_i;

2) f maps [illegible] onto [illegible];

3) f maps any three points of [illegible] which are co-circular with z_1, z_2, or z_3 into points of [illegible] co-circular with z_1', z_2', or z_3' respectively, then f coincides on [illegible] with a MÖBIUS transformation or its conjugate.

(These results were obtained in collaboration with Prof. J. ACZÉL).

[illegible]: Über Kollineationen von drei und von vier Geraden der projektiven Räume über beliebigen Körpern

Eine [illegible] Abbildung dreier bzw. vierer Geraden [illegible] projektiven [illegible] Körper, die kollineare [illegible], ist die Zusammen-setzung zweier [illegible] mit einem [illegible] Automorphismus der multiplikativen [illegible] bzw. [illegible] Körpers (in den Fällen).

Auf die [illegible] Schiefkörpers sowie auf den Zusammenhang mit [illegible] hingewiesen.

chung $\varphi(g(z)) = a_1 \varphi(z)$. Den nächst-einfachen Fall $a_1 = \exp(2k\pi i/n)$ führte P. FATOU zurück auf die Iteration von $x \to f(x)$ mit

$f(x) = x+1+\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^{-1-\nu/p}$ bei $x = \infty$. Er löste in einem Winkel $|\arg(x-B)| < \pi - \gamma$ $(0 < \gamma)$ die ABEL-Gleichung $\chi(f(x)) = \chi(x) + 1$ durch $\chi(x) = \lim (x_n - n - b_o \log n)$ und gab eine asymptotische Näherung für χ bei $|x| \to \infty$. Nach einer unveröffentlichen Arbeit von H.-J. SCHUHMANN werden asymptotische Reihen gewonnen:

$$x_n = x+n+b_o \log \frac{x+n}{n} + \Sigma a_{\mu\nu\sigma} (\log \frac{x+n}{x})^\sigma x^{-\mu/p} (x+n)^{-\nu/p} + O(x^{-L}),$$

$$\chi(x) = x - b_o \log x + \Sigma a_{\mu o o} x^{-\mu/p} + O(x^{-L}),$$

$(\mu, \nu, \sigma \geq 0;\quad 1 \leq \mu+\nu \leq Lp-1;\quad \sigma \leq \nu/p)$.

KANNAPPAN, P.: On the cosine functional equation for groups

The functional equation

(A) $$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y),$$

where f is a complex-valued function on a group G, is considered. One obvious way to solve (A) on G is by means of a homomorphism, say g, on G into the multiplicative group of non-zero complex numbers. If g is such a homomorphism then

(B) $$f(x) = \frac{g(x) + g^*(x)}{2},$$

where $g^*(x) = g(x)^{-1}$, is a solution of (A). The question arises as to whether or not all solutions of (A) on G have the form (B). The Answer is yes if G is Abelian and if G is non-Abelian, then with the additional condition

(C) $$f(x+y+z) = f(x+z+y)$$

the above result is true. If f is a continuous solution of (A) on a topological group G, the corresponding homomorphism g is also continuous. Further, if f is a measurable (Haar) solution of (A) on a locally compact group G, then f is continuous. There do exist unbounded, discontinuous solutions of (A).

ohne ... $\varphi(f(z)) = a_1 \varphi(z)$. Den nächst-einfachen Fall, $a_1 = \exp(2k\pi i/n)$ führt ... FATOU zurück auf die Iteration ... $f(x)$ mit $f(x) = x + 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^{-1-\nu/p}$ bei $x = \infty$. Er löst ... in einem Winkel $|\arg(x - B)| < \pi - \gamma$ $(0 < \gamma)$ die ABEL-Gleichung $\chi(f(x)) = \chi(x) + 1$ durch $\chi(x) = \lim (x_n - n - b_0 \log n)$ und gab eine asymptotische Entwicklung für χ bei $|x| \to \infty$. Nach einer unveröffentlichten Arbeit von H.-J. SCHUHMANN werden asymptotische Reihen dazu:

$$x_n = x + n + b_0 \log \frac{x+n}{x} + \sum c_{\mu\nu\ldots} (\log \frac{x+n}{x}) x^{\ldots} (x+n)^{-\nu/p} + O(x^{-1}),$$

$$\chi(x) = x - b_0 \log x + \sum a_{\mu\nu} x^{\ldots/p} + O(x^{-L}).$$

$$(\mu, \nu, \ldots : \quad 1 \leq \mu + \nu \leq Lp - 1; \quad \ldots/p).$$

KANNAPPAN, Pl.: On the cosine functional equation for groups

The functional equation

$$f(x+y) + f(x-y) = 2 f(x) f(y), \qquad (A)$$

where f is a complex-valued function on a group G, is considered. One obvious way to obtain (A) on G is by means of a homomorphism, say g, on G into the multiplicative group of non-zero complex numbers. If g is such a homomorphism, then

$$f(x) = \frac{g(x) + g^*(x)}{2} \qquad (B)$$

where $g^*(x) = g(x)^{-1}$, is a solution of (A). The question arises as to whether or not all solutions of (A) have the form (B). The answer is yes if G is Abelian and if G is non-Abelian, then with the additional condition

$$f(x+y+z) = f(x+z+y) \qquad (C)$$

the above result is true. If f is a continuous solution of (A) on a topological group G, the corresponding homomorphism is also continuous. Further, if f is a measurable (linear) solution of (A) on a locally compact group G, then f is continuous. There do exist unbounded, discontinuous solutions of (A).

VAJZOVIĆ, F.: Über den Funktional H mit der Eigenschaft: $(x,y) = 0 \Longrightarrow H(x+y) + H(x-y) = 2H(x) + 2H(y)$.
Bericht von P. FISCHER

SATZ 1: Es sei H ein stetiges auf einem (reellen oder komplexen) HILBERTschen Raum X der Dimension ≥ 3 definiertes Funktional mit der Eigenschaft

(1) $(x,y) = 0 \quad (x,y \in X) \Longrightarrow H(x+y) + H(x-y) = 2H(x) + 2H(y)$.

Dann gibt es einen stetigen linearen Operator A und stetige quasilineare Operatoren B, C, so daß

$$H(x) = (Ax, x) + (Bx, x) + (x, Cx)$$

für jedes $x \in X$ gilt.

LEMMA 1: Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gibt es stetige Funktionale A, B, C, (die auf X definiert sind) mit der Eigenschaft (1), für die außerdem für alle komplexen Zahlen λ und für alle $x \in X$

$$A(\lambda x) = |\lambda|^2 A(x), \qquad B(\lambda x) = \lambda^2 B(x), \qquad C(\lambda x) = \lambda^{-2} C(x)$$

gilt, und deren Summe das Funktional H ergibt.

FISCHER, P. und Gy. MUSZÉLY: Verallgemeinerung der CAUCHYchen Gleichung in normierten Räumen

Es sei G eine additive Halbgruppe und H ein HILBERT-Raum. Die auf der Menge G geltende Funktionalgleichung

(1) $\|f(x+y)\| = \|f(x) + f(y)\|$,

wobei $x, y \in G$, und $f: G \to H$ ist, ist mit der CAUCHYschen Funktionalgleichung äquivalent.

Im Falle, wo H einen nicht streng-normierten Raum bezeichnet, kann man eine solche Funktion f(x) konstruieren, die der Gleichung (1) genügt, der CAUCHYschen Gleichung aber nicht. In jedem reellen streng-normierten Raum H, wobei $\dim H \leq 2$ ist, besteht die Äquivalenz. Man kann mehrere Regularitätsbedingungen angeben, die die Äquivalenz in beliebigen streng-normierten Räumen versichern können.

FISCHER, P: Über die Funktionalgleichung $\|f(x+y)\| = \|f(x)+f(y)\|$ im HILBERT-Raum

Der Vortragende bespricht einen kurzen Beweis des folgenden Satzes,

der in dem Vortrag von P. FISCHER und Gy. MUSZÉLY ohne Beweis erwähnt wurde:

SATZ: Es sei G eine additive Halbgruppe, und H ein HILBERT-Raum. Die auf der Halbgruppe G geltende Funktionalgleichung

$$\| f(x+y) \| = \| f(x) + f(y) \| ,$$

wobei $x, y \in G$, und $f: G \to H$ ist, ist mit der CAUCHYschen Funktionalgleichung äquivalent.

FISCHER, P.: Über die Gleichung $[f(x+y)]^2 = [f(x) + f(y)]^2$

Es sei G eine Halbgruppe und R ein kommutativer Ring ohne Nullteiler. Die auf der Halbgruppe G geltende Funktionalgleichung

$$[f(x+y)]^2 = [f(x) + f(y)]^2,$$

wobei $x, y \in G$, und $f: G \to R$ ist, ist mit der CAUCHYschen Funktionalgleichung äquivalent. Der Satz besteht auch im Falle, wo der Ring Nullteiler hat, aber keine nilpotente Elemente besitzt. Die Vermutung ist, daß diese Äquivalenz nie besteht, wenn der Ring auch nilpotente Elemente $\neq 0$ enthält.

HOSSZÚ, M. and H. ŚLATAK: Remarks on the functional equation $e(x,y) f(xy) = f(x) + f(y)$

Bericht von Gy. MUSZÉLY

Supposing that e is a complex number with absolute value 1, the functional equation written in the title can be reduced to its special case $e \equiv 1$. The binary operations occurring in the equation may be arbitrary (not necessarily abelian) group operations. The method can be applied also for the more general functional equations

$$e(x,y,z) f(x+y+z) = f(xy) + f(xz) + f(yz) - f(x) - f(y) - f(z)$$

and

$$P[f(x), f(y), f(xy)] = 0,$$

in particular

$$[f(x) + f(y)]^n = [f(xy)]^n,$$

where $|e| = 1$, and P is a polynomial (defined on a commutative ring without zero divisors).

der in dem Vortrag von P. FISCHER und Gy. MUSZÉLY ohne Beweis erwähnt wurde:

SATZ: Es sei G eine additive Halbgruppe, und H ein HILBERT-Raum. Die auf der Halbgruppe G geltende Funktionalgleichung

$$\| f(x+y) \| = \| f(x) + f(y) \| ,$$

wobei $x, y \in G$, und $f: G \to H$ ist, ist mit der CAUCHYschen Funktionalgleichung äquivalent.

FISCHER, P.: Über die Gleichung $[f(x+y)]^2 = [f(x) + f(y)]^2$

Es sei G eine Halbgruppe und R ein kommutativer Ring ohne Nullteiler. Die auf der Halbgruppe G geltende Funktionalgleichung

$$[f(x+y)]^2 = [f(x) + f(y)]^2,$$

wobei $x, y \in G$, und $f: G \to R$ ist, ist mit der CAUCHYschen Funktionalgleichung äquivalent. Der Satz besteht auch im Falle, wo der Ring Nullteiler hat, aber keine nilpotente Elemente besitzt. Die Vermutung ist, daß diese Äquivalenz nie besteht, wenn der Ring auch nilpotente Elemente $\neq 0$ enthält.

HOSSZÚ, M. and H. ŚLATAK: Remarks on the functional equation $e(x, y) f(xy) = f(x) + f(y)$
Bericht von Gy. MUSZÉLY

Supposing that e is a complex number with absolute value 1, the functional equation written in the title can be reduced to its special case $e \equiv 1$. The binary operations occurring in the equation may be arbitrary (not necessarily abelian) group operations. The method can be applied also for the more general functional equations

$$e(x, y, z) f(x+y+z) = f(xy) + f(xz) + f(yz) - f(x) - f(y) - f(z)$$

and

$$P[f(x), f(y), f(xy)] = 0,$$

in particular

$$[f(x) + f(y)]^n = [f(xy)]^n,$$

where $|e| = 1$, and P is a polynomial (defined on a commutative ring without zero divisors).

[illegible] dem Vortrag von P. FISCHER und Gy. MUSZÉLY ohne Beweis erwähnt wurde:

SATZ: [illegible] eine [illegible] Halbgruppe, und H ein HILBERT-Raum. Die auf der Halbgruppe G erklärte Funktionalgleichung

$$\|f(x+y)\| = \|f(x)+f(y)\|,$$

wo $x, y \in G$, und $f: G \to H$ ist, ist mit der CAUCHYschen Funktionalgleichung äquivalent.

FISCHER, P.: Über die Gleichung $[f(x+y)]^2 = [f(x)+f(y)]^2$

Es sei G eine Halbgruppe und R ein kommutativer [illegible] ohne Nullteiler. Die auf der Halbgruppe G erklärte Funktionalgleichung

$$[f(x+y)]^2 = [f(x)+f(y)]^2,$$

wo $x, y \in G$, und $f: G \to R$ ist, ist mit der CAUCHYschen Funktionalgleichung äquivalent. Das bleibt [illegible] im Falle, wo der Ring Nullteiler hat, [illegible] Elemente besitzt. Die Vermutung ist, daß [illegible] auch gilt [illegible].

HOSSZÚ, M. and [illegible]: Remarks on the functional equation $e(x,y)f(xy) = f(x)f(y)$

Bericht von Gy. MUSZÉLY

Supposing that [illegible] complex number with [illegible] value 1, the functional equation [illegible] the title can be reduced to the special case $e = 1$. The binary operation occurring in the equation may be arbitrary (not necessarily a [illegible] group operation). The method can be applied also for the more general functional equation:

$$e(x,y,z)f(x+y+z) \; [illegible] \; f(xy) \; [illegible] \; f(xz) \; [illegible] \; f(yz) - f(x) - f(y) - f(z)$$

and

$$[illegible] \; f(x), f(y), f(xy) \; [illegible] = 0.$$

In particular

$$f(x) + f(y) \; [illegible] = [f(xy)] \; [illegible],$$

where $|e| = 1$, and [illegible] is a polynomial (defined on a commutative ring without zero divisors).

HARUKI, H.: On an extension of JENSEN's functional equation

Considering JENSEN's functional equation

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2},$$

where $f(x, y)$ is a real-valued function of two real variables x, y, and $f \in C^2$ in the whole x, y-plane, we have the following functional equation

$$(1) \quad \frac{1}{4}[f(x+t, y+t) + f(x-t, y+t) + f(x-t, y-t) + f(x+t, y-t)] = f(x, y),$$

where x, y, t are real variables.

THEOREM. If $f \in C^2$ in the whole x, y-plane, then the solution of (1) is the following and only this:

$$f(x, y) = \mathrm{Re}(a_o z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4)$$

($z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$), where a_o is an arbitrary purely imaginary constant and a_1, a_2, a_3, a_4 are arbitrary complex constants.

McKIERNAN, M.A.: On HARUKI's functional equation

HARUKI's equation is

$$(I) \quad f(x+v, y+v) + f(x+v, y-v) + f(x-v, y+v) + f(x-v, y-v) = 4f(x, y)$$

for all x, y and v. It is shown that if (I), then also

$$(II) \quad f(x+v, y) + f(x-v, y) + f(x, y+v) + f(x, y-v) = 4f(x, y)$$

for all x, y and v. Then we define (x, y) to be a H-point if (I) and (II) hold for all v, and show that: If all points on the x and y axes are H-points of f, then f has the form (assuming bounded by a measurable function)

$$f(x, y) = c_1 + c_2(x^2 - y^2) + c_3(x^2 - 3xy^2) + c_4(y^2 - 3yx^2) + S(x, y),$$

where $S(x, -y) = S(-x, y) = -S(x, y)$ for all x, y. Hence f coincides with a polynomial on the axes and hence possesses all derivatives with respect to x, similarly for y, at the origin. It follows that (I) for all x, y, for bounded f, implies analyticity.

ACZÉL, J. and G. CHOQUET: The general solution of the "rectangle equation" and the general measurable solution of the "square equation"

A simple proof is given that the most general solution of

(R) $\quad 4f(x,y) = f(x+u,y+v) + f(x+u,y-v) + f(x-u,y+v) + f(x-u,y-v)$

is

$$f(x,y) = a(x,y) + b(x) + c(y) + d,$$

where a, b, c are arbitrary additive functions (a in both variables), d an arbitrary constant. So the general measurable real solution of (R) is

$$f(x,y) = axy + bx + cy + d,$$

with arbitrary constants a, b, c, d.

As to the more difficult equation

(S) $\quad 4f(x,y) = f(x+t,y+t) + f(x+t,y-t) + f(x-t,y+t) + f(x-t,y-t),$

the second author has given the following method to find all measurable solutions of (S) from all differentiable ones, which were determined by HARUKI: Take the convolution of f with a sufficiently smooth function of a small support. The convolution will satisfy (S) too and be sufficiently often differentiable, so HARUKI's solution can be applied.

DJORDJEVIĆ, R. et P.M. VASIĆ: Sur une classe des équations fonctionnelles

La solution générale continue de l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=1}^{m+n} f_i(a^{m-1}x_i + a^{m-2}x_{i+1} + \dots + ax_{i+m-2} + x_{i+m-1},$$
$$a^{n-1}x_{i+m} + a^{n-2}x_{i+m+1} + \dots + ax_{i+m+n-2} + x_{i+m+n-1}) = 0$$

(f_i sont des fonctions complexes des variables complexes) est déterminée. Aussi, on a déterminé la solution générale dans le cas où $f_1 = f_2 = \dots = f_{m+n}$.

VASIĆ, P.M.: Equations fonctionnelles à plusieurs fonctions incollues dont toutes ne dépendent pas du même nombre d'arguments

On a déterminé la solution générale d'une classe des équations fonctionnelles linéaires à plusieurs fonctions inconnues dont toutes ne dépendent pas du même nombre d'arguments. Aussi on a examiné la possibilité d'obtenir des solutions dans le cas où les fonctions inconnues sont égales.

EICHHORN, W.: Lösung eines mathematischen Problems der volkswirtschaftlichen Produktionstheorie

Von den in den Lehrbüchern der Volkswirtschaftslehre eingeführten sogenannten Produktionsfunktionen $F = F(x, y)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $F \geq 0$ wird zumeist vorausgesetzt, daß sie gleichzeitig die folgenden Eigenschaften besitzen:

(I) $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \quad \lambda \geq 0;$

(II) $\frac{\partial F}{\partial x} > 0$ für $x < \bar{x}(y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ für $y < \bar{y}(x)$;

(III) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0$ für $x > x_o(y)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$ für $y < y_o(x)$;

(IV) es existieren Konstanten $c_1 > o$, $\epsilon_1 > 0$ derart, daß $\frac{\partial^2 F(x, c_1)}{\partial x^2} \geq 0$ für $x < \epsilon_1$ ist, oder Konstanten $c_2 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ derart, daß $\frac{\partial^2 F(c_2, y)}{\partial y^2} \geq 0$ für $y < \epsilon_2$ ist.

Der Vortragende beweist: Solche Funktionen existieren nicht. Nichtexistenzaussagen von dieser Art gibt es auch im Falle von Funktionen von n Veränderlichen mit analogen Eigenschaften, selbst dann, wenn F homogen vom Grade α $(0 < \alpha \leq 1)$ ist.

SAKOVIČ, G.N.: Über die d'ALEMBERTsche Formel für die Saitenschwingungen

Bericht von P.M. VASIĆ

Die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x+u, y-v) + f(x-u, y+v) = f(x+v, y-u) + f(x-v, y+u)$$

ist (ohne irgendwelche Regularitätsvoraussetzungen)

$$f(x, y) = F(x+y) + G(x-y)$$

mit beliebigen Funktionen F, G. Die allgemeine reguläre (z.B. nach einem Argument meßbare) Lösung der Gleichung

$$f(x+u, y) + f(x-u, y) = f(x, y+u) + f(x, y-u)$$

läßt sich noch in dieser Form (und zuerst in der Form der d'ALEMBERT-schen Integrale

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[f_o(x+y) + f_o(x-y)] + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_1(x+ty)dt \;)$$

darstellen. Die letzte Gleichung wird auch im unregulären Falle gelöst. Dann kann seine Lösung die erwähnte Form nicht haben.

Noch ein Paar verwandter Funktionalgleichungen ist gelöst.

B. Problemstellungen und Bemerkungen

1. Problem: Gibt es Operationen bezüglich derer die Vereinigungsmenge dreier (endlich vieler) reeller Zahlenintervalle eine (bezüglich der natürlichen Ordnung) geordnete nichtkommutative Gruppe bildet? (Vgl. das - seither gelöste - "Oberwolfacher Fn-Gl. Problem 4", Arch. Math. 15 (1964), S. 436). [Bemerkung: Für ein einziges Intervall ist die Antwort: n e i n, für die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Intervallen (der reellen Zahlengeraden unter Ausschluß der ganzen Zahlen) ist die Antwort: j a. S. Arch. Math. 17 (1966), S. 292-297, den Artikel von ACZÉL-PICKERT].

J. ACZÉL

2. Problem: Verallgemeinerte Tschebyscheffsche Polynome.
Es sei $f_{n+1}(x) = R[f_n(x), x]$, $f_1(x) = x$, ein System von Funktionen. Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $\{f_n(x)\}$ eine Familie von kommutierenden Funktionen sei: $f_n \circ f_m = f_m \circ f_n$. [Eine hinreichende Bedingung ist: das Additionstheorem $\sigma(x+y) = R[\sigma(x), \sigma(y)]$ hat eine inversible Lösung]. Weiterhin: man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\{f_n(x)\}$ ein System von Polynomen sei. [Die hinreichende Bedingung, daß $R(x,y)$ ein Polynom in x und y ist, führt - außer einer kommutierenden Familie von linearen Funktionen - zu $\frac{(Ax+B)^n - B}{A}$; selbst das System der TSCHEBYSCHEFFschen Polynome wird von einem irrationalen Additionstheorem produziert].

Gy. TARGONSKI

läßt sich noch in dieser Form (und zwar in der Form der [illegible]LAMBERT-schen Integrale

$$[illegible](x,y) = \frac{1}{2}[f_0(x+y) + f_0(x-y)] + [illegible] \int_{-1}^{1} f_1(x+ty)\,dt$$

darstellen. Die letzte [illegible] wird auch im [illegible] gelöst.

Dann kann [illegible] Form [illegible] hat.

Nach [illegible] verwandt [illegible] gelöst.

B. Problemstellungen und Bemerkungen

1. Problem: Gibt es [illegible] bezüglich derer die [illegible] menge [illegible] (bezüglich der natürlichen [illegible]) [illegible] Zahlenintervall [illegible] nichtkommutative Gruppe bildet? (Vgl. den [illegible] Oberwolfacher P.-Bl. Problem 4", Arch. Math. 15 (1964), S. 480. Bemerkung: Für ein einziges Intervall ist die Antwort: [illegible], für die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Intervallen [illegible] Zahlenfolge unter Ausschluß der ganzen Zahlen) [illegible] S. Aczél, [illegible] 1 (1965), S. [illegible], den Artikel [illegible].]

[illegible]

2. Problem: Verallgemeinerte Tschebyscheffsche Polynome. [illegible] $f_{n+1}(x) = [illegible]$ ein System von Funktionen. [illegible] gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $\{f_n(x)\}$ eine Familie von [illegible] Funktionen ist: $f_m [illegible] f_n = f_{m+n}$. [Eine hinreichende Bedingung ist: das Additionstheorem [illegible] $(x+y) = [illegible](x), [illegible](y)$] [illegible] Lösung [illegible] notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\{f_n(x)\}$ ein System von Polynomen [illegible]. [Die hinreichende Bedingung, daß $H(x,y)$ ein Polynom in x und y ist, führt – außer einer kommutativen Familie von linearen Funktionen – zu $\frac{(A x - B)^2 - B}{A}$; selbst den [illegible] der TSCHEBYSCHEFFschen Polynome und von ihren [illegible] Additionstheorem reproduzieren.

Cy. [illegible]

3. Bemerkung: Funktionalcharakterisierung der Exponentialfunktion. Es sei $\varphi(x)$ eine auf der ganzen reellen Zahlengeraden erklärte reelle Funktion, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\varphi(2x) = [\varphi(x)]^2,$$

$$\varphi(-x) = [\varphi(x)]^{-1},$$

$$\varphi(x) \geq 1 + ax \qquad \text{für alle reellen } x \in (-\infty, \infty).$$

(a eine feste reelle Zahl). Dann ist

$$\varphi(x) = e^{ax}.$$

M. KUCZMA

4. Bemerkung: Über algebraische Lösungen Φ der Funktionalgleichung $\Phi(\varphi(x)) = g(x)\,\Phi(x)$, für rationale $g(x)$, denen rationale $\varphi(x)$ entsprechen.

Es wurde der Satz bewiesen, daß, wenn $\varphi(x)$ rational und die Folge der Iterierten von $\varphi(x)$ nicht periodisch ist, algebraische $\Phi(x)$ n-te Wurzeln aus rationalen Funktionen von x sind.

A. OSTROWSKI

5. Problem: Die für $0 \leq r, s, t, u \leq n+1$ durch A.S.M. COXETER eingeführten Symbole $(r, s), \ldots$ zu Punktepaaren auf $\mathfrak{S}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ genügen dem Rücklauf

(1) $$(r, s)(t, u) + (r, t)(u, s) + (r, u)(s, t) = 0.$$

Nach MITRINOVIĆ existiert $\{f, g\}$ so daß der Zerfall $(r, s) = f(r)g(s) - f(s)g(r)$ besteht. Welche Zusatzbedingung muß zu (1) hinzugefügt werden, um die Ortoschemelemente auf Einheitskugeln zu kennzeichnen?

W. MAIER

6. Problem: Was kann man im Falle, wo M ein beliebiger streng-normierter Raum ist, über die Äquivalenz der Gleichung $\|f(x+y)\| = \|f(x) + f(y)\|$ und der CAUCHYschen Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sagen?

P. FISCHER und Gy. MUSZÉLY

7. Vermutung: Wenn der Ring der Funktionenwerte auch von Null verschiedene nilpotente Elemente besitzt, dann ist die Gleichung

$[f(x+y)]^2 = [f(x) + f(y)]^2$ der CAUCHYschen nicht äquivalent.

P. FISCHER

8. Bemerkung: Die zuletzt behauptete Vermutung ist in der Tat richtig. Enthält nämlich der Ring nilpotente Elemente $\neq 0$, so enthält er ein Element $a \neq 0$ mit $a^2 = 0$. Wird $f(G) = a$ gesetzt, so ist offenbar $[f(x+y)]^2 = a^2 = 0$ und $[f(x) + f(y)]^2 = 4a^2 = 0$, aber $f(x+y) \neq f(x)+f(y)$.

L. FUCHS

9. Bemerkung: Die Äquivalenz von $[f(x+y)]^n = [f(x) + f(y)]^n$ mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$, falls der Ring keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ besitzt.

L. FUCHS

10. Remark: We shall give a characterization of the quadratic expression $az^2 + bz + c$ from the standpoint of geometry using a functional equation. We prove the following theorem:

Theorem: Let us assume that ABCD is an arbetrary rectangle in the complex plane. We put $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$, where $f(z)$ is a complex-valued function of z, continuous in $|z| < \infty$. If $f(z)$ ($\not\equiv$ const) satisfies the following two invariant properties from the z-plane into the w-plane for all rectangles such as ABCD:

(C.1) $\overline{A'C'} = \overline{B'D'}$,

(C.2) the intersecting angle of two diagonals $A'C'$, $B'D'$ of the quadrangle $A'B'C'D'$ is equal to the intersecting angle of two diagonals AC, BC of the quadrangle ABCD, then and only then $f(z) = az^2 + bz + c$, where a, b, c are arbitrary complex constants with $|a| + |b| > 0$.

The main part of the proof is to use one form of the wellknown MORERA's theorem in analytic function theory.

H. HARUKI

11. Bemerkung: Sind h_λ ($\lambda \in \Lambda$) die Stützfunktionen konvexer Körper K_λ: $h_\lambda(\underline{u}) = \operatorname{Max}(\underline{u}\,\underline{x} \mid \underline{x} \in K_\lambda)$, so ist zwar der Durchschnitt

$[f(x+y)]^2 = [f(x) + f(y)]^2$ der CAUCHYschen nicht äquivalent.

F. FISCHER

1. Bemerkung: Die zuletzt behauptete [illegible] ist in der Tat nicht richtig. Enthält nämlich der [illegible] Element $a \neq 0$ mit $a^2 = 0$. Wird [illegible] $[f(x+y)]^2 = 0$ und $[f(x) + f(y)]^2 = 4a^2$ [illegible] $f(x+y) \neq f(x)+f(y)$.

[illegible]

2. Bemerkung: Die Äquivalenz von $[f(x+y)]^2 = [f(x)+f(y)]^2$ [illegible] $f(x+y) = f(x) + f(y)$ gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$, falls der Ring keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ besitzt.

L. FUCHS

13. Remark: We shall give a characterization of the quadratic expression $az^2 + bz + c$ from the standpoint of [illegible] rational equation. We prove the following theorem:

Theorem: Let us assume that ABCD is an arbitrary rectangle in the [illegible]. We put $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$, where $f(z)$ [illegible] complex-valued function of z, continuous in [illegible] $f(z)$ (y const) [illegible] following two invariant properties from the z-plane into the [illegible] such as ABCD:

[illegible] (1.1)

(2) the [illegible] diagonals $A'C'$, $B'D'$ of the quadrangle $A'B'C'D'$ [illegible] equal to the intersecting angle of two diagonals AC, BD of the quadrangle ABCD, then and only then $f(z) = az^2 + bz + c$, where a, b, c are arbitrary complex constants with $|a| + |b| \neq 0$.

The main part of the proof [illegible] one-form of [illegible] well-known [illegible] theorem in analytic function theory.

[illegible]

4. Bemerkung: [illegible] die Stetigkeit [illegible] Kör- [illegible] $f(u)$ [illegible] so ist zwei [illegible] Durchschnitt

$\bigcap_\lambda K_\lambda$ der Durchschnitt aller Halbräume $\underline{u}\,\underline{x} \leq g(\underline{u})$ $(=_{df} \inf_\lambda h_\lambda(\underline{u}))$, aber g ist nicht immer die Stützfunktion von $\bigcap_\lambda K_\lambda$. Die Stützfunktion von $\bigcap_\lambda K_\lambda$ ist vielmehr

$$h(\underline{u}) = \inf \left(\sum_\lambda h_\lambda(\underline{u}_\lambda) \mid \Sigma\, \underline{u}_\lambda = \underline{u} \right).$$

H. KNESER

12. Problem: Die Verallgemeinerung der Theorie der Gewebe, wie in Advances in Math. 1 (1965), 448-449 angedeutet und zum Teil von F. RADÓ in Math. Zeitschr. 89 (1965), 395-410 begonnen wurde, könnte vielleicht auf Funktionskomposition und Iterationsgruppen angewandt werden wie die klassische Theorie in Arch. Math. 17 (1965) von mir.

J. ACZÉL

13. Question: Is it true that a) if the n-th difference $\Delta_\omega^n f(x) \equiv 0$ for all x and all ω (real) and b) if $f(x)$ is bounded on some set of positive measure, then $f(x)$ is a polynomial? Measurable and / or bounded seems to have been proved to be sufficient, but how about conditions analogous to the CAUCHY equation theorems.

M.A. McKIERNAN

14. Bemerkung: Eine $n \times n$ Matrix $A(z)$, deren Elemente rationale Funktionen einer komplexen Veränderlichen sind, ist als das Produkt $A(z) = A_1(z)A_2(z)$ darstellbar, wo A_1, A_2 Matrizen mit den folgenden Eigenschaften sind:

1) $(A_1(z))_* = A_2(z)$ [A_* bezeichnet die parakonjurgierte $\overline{A^T(-\bar{z})}$],
2) $A_1(z)^{-1}$ und $A_2(z)^{-1}$ existieren,
3) Sämtliche Pole von $A_1(z)$ und $A_1(z)^{-1}$ (bzw. $A_2(z)$ und $A_2(z)^{-1}$) fallen in die rechte (bzw. linke) Halbebene, dann und nur dann, wenn $A_*(z) = A(z)$ und $A(z)$ auf der imaginären Achse positiv semidefinit sind.

P. FISCHER

15. Problem: S. HARTMAN, Colloq. Math. 8 (1961), 77-79, J. ACZÉL-P. ERDÖS, Publ. Math. Debrecen 12 (1965), und andere haben Sätze

... der Durchschnitt aller Halbräume $ux \le g(u)$ $(= \inf_{\lambda} h_{\lambda}(u))$, aber g ist nicht immer die Stützfunktion von ... Die Stützfunktion ... ist vielmehr

[illegible]

12. Problem: [illegible] ... in Math. Zeitschr. 89 (1965), 386-410 ... und Funktionalgleichungen ... in Arch. Math. 17 (1966) von mir.

J. ACZÉL

13. Question 1. [illegible] ... for all ... positive ... polynomially ... to the CAUCHY ... equation ... about conditions

M. A. McKIERNAN

14. Bemerkung: [illegible] ... Matrix $A(z)$, ... einer komplexen Veränderlichen sind, ... $A(z) = A_1(z) A_2(z)$ ... Matrizen ...

1) [illegible]

2) $A_1(z)^{-1}$ und $A_2(z)^{-1}$ existieren,

3) Sämtliche Pole von $A_1(z)$ und $A_1(z)^{-1}$ (bzw. $A_2(z)$ und $A_2(z)^{-1}$) fallen in die rechte (bzw. linke) Halbebene, dann und nur dann, ... der imaginären Achse ... definit ...

[illegible]

17. Problem: ... 77-79, J. ACZÉL ... Publ. Math. Debrecen 12 (1965) ... haben Sätze

des Typs bewiesen, daß die Lösungen der CAUCHYschen Gleichung auf einer Untermenge der reellen Ebene in eine allgemeine Lösung auf der ganzen Ebene einbettbar sind. Welche Mengen sind noch von dieser Art? Für $x_0 \leq x \leq x_0+1$, $y_0 \leq y \leq y_0+1$, $x+y \leq x_0+y_0+1$ haben wir das mit Herrn Z. DARÓCZY bewiesen. (NB: Auch die Fälle von dichten und diskreten Untermengen sind interessant).

L. LOSONCZI

Die fünfte Tagung über Funktionalgleichungen findet auf eine Einladung von kanadischer Seite in Waterloo Ont. im April 1967 statt. Auf einhelligen Wunsch der Teilnehmer wird daher nach Rücksprache mit der Leitung des Forschungsinstituts Oberwolfach und mit deren Zustimmung erst für den Mai oder Juni 1968 die Veranstaltung der sechsten Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach in Aussicht genommen.

Es bleibt und noch die angenehme Pflicht, zugleich im Namen aller Teilnehmer, der Leitung des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach herzlichst zu danken für die bekannt freundliche Fürsorge, die uns allen zuteil geworden ist.

(M. Kuczma, Katowice)