Ein Brunnen-Erzeugnis

Vortragsbuch
Nr. 31
4.8. – 16.11.75

Grundlagen des numerischen Rechnens und Computer-Algebra

4.8. – 8.8. 1975

(I.) Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung der Ordnungs- und Verbandsstrukturen.

Betrachtet man die Intervallräume $(I\!I\mathbb{R}, +, *, /, \subseteq)$, $(I\!I\mathbb{C}, +, *, /, \subseteq)$ usw. bezüglich ihrer algebraischen Struktur, so stellen sich gewisse Regularitätseigenschaften bezüglich der stets assoziativen Addition heraus. Nach bekannten Einbettungssätzen lassen sich reguläre abelsche Halbgruppen einbetten in Gruppen. Es entsteht im Hinblick auf die oben genannten Räume jedoch die Frage, können in die so gewonnenen Einbettungen bzgl. der Addition stets auch Ordnungs- und Verbandsstrukturen sowie eventuell weitere geg. Verknüpfungen unter Erhaltung der Isotonieeigenschaft mitgeführt werden.
Diese Fragen können jedoch unter allgemeinen Gesichtspunkten so beantwortet werden: Jede isotone, isoton reguläre abelsche Halbgruppe $(M, \circ, \leq)$ läßt sich (bis auf Isomorphien) eindeutig einbetten in eine kleinste isotone Gruppe $(Q, \circ, \leq)$. ($(M, \circ, \leq)$ heißt isoton, isoton regulär, wenn gilt: $\bigwedge_{a,b,x\in M} a \circ x \leq b \circ x \iff a \leq b$)

Entsprechende Aussagen lassen sich unter geeigneten stärkeren Voraussetzungen angeben bezüglich sup-verbandsgeordneten reg. Halbgruppen. Ist $(R, +, \cdot, \leq)$ ein Ringoid, wobei $(R, +, \leq)$ sup-verbandsg. Halbgruppe ist, so kann die Multiplikation unter schwachen Verträglichkeitsforderungen in die von $(R, +, \leq)$ erzeugten Einbettung unter Isotonieerhaltung fortgesetzt werden.

(II.) Einführung einer Überlaufarithmetik in der Intervallrechnung

Dieser zweite Teil kann als Beispiel für die Anwendung der oben geschilderten erweiterten Intervallräume betrachtet werden. Folgendes Beispiel zeigt, wann das Rechnen mit ∞ und somit mit Überläufen auf Rechenanlagen notwendig sein kann. Ist $A(x_1, \ldots, x_n)$ eine arithm. Funktion mit den Parametern $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, so können arithm. Teilausdrücke existieren, die Singularitäten besitzen, aber sich im Gesamtausdruck als hebbar erweisen. Beispiele solcher Funktionen sind Kettenbrüche der Art:

$$f(x) = a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\ddots \, a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n - x}}}}$$

Es existieren i.a. $n-2$ hebb. Singularitäten und höchstens 1 echte Singularität.

Somit wäre die Berechnung derartiger Kettenbrüche ohne Einbeziehung von ∞ und Überlauf auf R.A. numerisch nicht möglich. Assoziiert man zu den Intv. Räumen die Intervalle $[a, \pm\infty]$, $[\pm\infty, b]$ usw. und setzt die Division auf Intervalle $[a, b]$ mit $a \cdot b \leq 0$ fort, so erhält man die sog. Intervall-Außenintervallrechnung $(\mathbb{V}, +, *, /, \subseteq)$, die sich mit Hilfe der vorgenannten erweiterten Intervallräume algebraisch beschreiben lassen.

In diesem Raum lassen sich sich dann solche arithm. Ausdrücke mit hebb. Singularitäten numerisch berechnen und würde im obigen Beispiel für <u>jedes</u> Intervall $X \in I\!I\!R$ sogar den exakten Komplex $W(f, X)$ (bis auf Rundungsfehler) berechnen.

Edgar Kaucher
D-75 Karlsruhe
Inst. f. Angew. Math. d.
Universität Ka.

I. Ein Konzept für eine allgemeine Theorie der Rechnerarithmetik

Es sei M eine geordnete algebraische Struktur. Will man eine in M auszuführende Rechnung in einer Teilmenge N⊆M approximieren, so muß man die Verknüpfungen in N und die Abbildungsfunktion (Rundung) □: M→N für die Elemente geeignet wählen. Als notwendige Bedingungen an einen Homomorphismus zwischen geordneten algebraischen Strukturen lassen sich Bedingungen für die Definition der Verknüpfungen in N und für die Rundungsfunktion □ ableiten. Es zeigt sich, daß die Rundungsfunktion □ nicht nur verantwortlich ist für die Übertragung der Elemente von M nach N, sondern auch für die sich in N ergebende Struktur. Diese wird zu einer Verallgemeinerung der Struktur in M. Die angegebenen Bedingungen führen auch auf sinnvolle Verträglichkeitseigenschaften zwischen den Strukturen in M und N. Durch Angabe schneller Algorithmen wird gezeigt, daß sich die abgeleiteten Bedingungen realisieren lassen im Falle des Überganges von den reellen bzw. komplexen Zahlen bzw. Vektoren bzw Matrizen über den reellen oder komplexen Zahlen sowie der Mengen der Intervalle über diesen Räumen in betreffende Räume über Gleitkommazahlen.

II. Über die beim numerischen Rechnen mit Rechenanlagen auftretenden Räume

Es wird gezeigt, daß sich die beim numerischen Rechnen mit Rechenanlagen auftretenden Räume, daß sind insbesondere die Gleitkommasysteme, Vektoren und Matrizen über Gleitkommasystemen die Komplexifizierungen darüber, sowie die Räume der Intervalle über den bereits genannten Mengen durch zwei abstrakte Strukturen beschreiben lassen. Diese lassen sich bei geeigneter Definition der Verknüpfungen erklären als invariante Strukturen bezüglich monotoner und antisymmetrischer Rundungen in ein symmetrisches Raster.

Ulrich Kulisch
D-75 Karlsruhe
Inst. f. Angew. Math. d.
Universität Karlsruhe.

I Methoden und Ergebnisse der Computer Algebra

Die Computer Algebra entwirft, analysiert und implementiert algebraische Algorithmen ("Verfahren in endlich vielen Schritten"). Oberstes Ziel ist es, die Integrität der algebraischen Strukturen bei der Implementierung beizubehalten. Dies ist voll möglich bei endlichen Körpern geeigneter Charakteristik. Ganzzahlarithmetik kann in einer Genauigkeit realisiert werden, die nur vom Gesamtspeicher, nicht aber von der Wortlänge abhängt. Auf diesen Grundbereichen aufbauend, können Algorithmen für Polynome, rationale Funktionen, Gausssche ganze Zahlen, Matrizen, Potenzreihen, reelle algebraische Zahlen und für Entscheidungsverfahren in reell oder algebraisch abgeschlossenen Körpern exakt implementiert werden. Durch die Ausdehnung dieser Objekte bedingt, die dynamisch variiert, ist eine strenge Kostenanalyse erforderlich, die insbesondere die zeitliche Komplexität nach oben abzuschätzen hat. Der Fundamentalsatz für Polynomrestfolgen und typische modulare Algorithmen für Polynom-G.G.T. und -Faktorisierung über $Z[x_1,\dots,x_r]$ werden vorgestellt. Collins' SAC-1 Softwaresystem enthält die effizientesten bekannten algebraischen Algorithmen.

R. Loos
D-675 Kaiserslautern
Fachbereich Informatik, Universität

Effiziente Implementierung der Arithmetik beliebig langer ganzer Zahlen.

1) Datenstruktur für Langzahl-Arithmetik
   a) externe kanonische Darstellung durch Liste der Ziffern zu einer noch zu wählenden Basis
   b) Realisierung dieser Darstellung auf dem Computer durch Listensystem (nicht durch Felder, da diese nicht dynamisch)
2) Das SAC-1 Listen-System: Aufbau einer Zelle, available space list, reference-count-Methode.
3) Algorithmen für die Arithmetik (klassische Algorithmen; bei Division nach Pope / Stein)
4) Analyse der Algorithmen – theoretische und empirische Rechenzeiten.
5) Wahl der Basis (möglichst nahe an Computer-Wortlänge)

Markus Lauer
D-675 Kaiserslautern
FB Informatik
Universität Kaiserslautern

Fehlerschranken für lineare Gleichungssysteme

Die Möglichkeit, Summen und Skalarprodukte mit maximaler Genauigkeit berechnen zu können, läßt sich vorteilhaft bei der Auflösung linearer Gleichungssysteme einsetzen. Für verschiedene Algorithmen lassen sich mittels der inversen Rundungsfehleranalyse absolute Fehlerschranken bestimmen, die kleiner sind als diejenigen, die sich bei Rechnung mit normaler Gleitkommaarithmetik ergeben. Weiterhin wird das Verhalten und die

Genauigkeit der Lösung bei Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme untersucht.
Insgesamt läßt sich feststellen, daß aufgrund der Berechnung des Skalarproduktes auf eine Rundungsfehlereinheit genau in vielen Fällen eine exakte Rundungsfehleranalyse erst möglich zumindest aber vereinfacht wird und daß die sich dabei ergebenden Fehlerschranken schärfer sind als die bei üblicher Gleitkommarechnung.

K. Grüner
D-75 Karlsruhe
Inst. f. Angew. Math.
Universität Karlsruhe

I. Zum Begriff des Rasters und der minimalen Rundung.

Es wird der von Apostolatos verallgemeinerte Begriff des Rasters (genannt A-Raster) näher untersucht und dem bisher üblichen Begriff des Rasters gegenübergestellt. Bei der Betrachtung von Rundungen in A-Rastern ergeben sich wesentliche Konsequenzen. So existiert keine monotone, gerichtete Rundung einer geordneten Menge in ein A-Raster. Monotonieaussagen für eine in einem A-Raster mittels einer gerichteten Rundung erzeugten Arithmetik sind also mit den bisher bekannten Eigenschaften nicht mehr möglich. Als Verallgemeinerung der monotonen Rundung wird daher der Begriff der minimalen Rundung eingeführt.

II. Zur Konstruktion komplexer Kreisarithmetiken.

In dem Vortrag wird eine theoretische Begründung für die Konstruktion komplexer Kreisarithmetiken aufgrund einer Verallgemeinerung und Verschärfung eines früher bewiesenen Satzes gegeben. Unser Vorgehen erhält eine Reihe wichtiger Eigenschaften der algebraischen und Ordnungsstruktur in der Potenzmenge der komplexen Zahlen. Insbesondere lassen sich (gegebenenfalls unter geeigneten Voraussetzungen) verschiedene Assoziativ- und Distributivgesetze für die so eingeführte Addition, Multiplikation und Division komplexer Kreise zeigen. Als negatives Ergebnis erhalten wir jedoch, daß die für numerische Zwecke wichtige Inklusionsmonotonie sich für die Multiplikation und damit auch für die Division nicht allgemein zeigen läßt. Abschließend werden die bisher in der Literatur bekannten Kreisarithmetiken in dieses allgemeine Konzept eingefügt.

Christian Ullrich
D-75 Karlsruhe
Inst. f. Angew. Math. d.
Universität Karlsruhe

Über das zyklische Verhalten von Iterationsfolgen bei numerischen Methoden.

Ein in einem mathematischen Raum R definierter Algorithmus zeigt bei der Ausführung auf einer Rechenanlage i. a. ein anderes Verhalten, als nach den in R geltenden Eigenschaften zu erwarten wäre.

So sind die für den Algorithmus in R hergeleiteten Konvergenzaussagen auf den "zugeordneten" Maschinenalgorithmus nur bedingt anwendbar. Aufgrund der Endlichkeit der Menge der Maschinenzahlen enden jedoch z. B. alle Iterationsverfahren zyklisch, d. h. von irgendeinem Iterationsschritt an wiederholen sich endlich viele Iterierte in fester Reihenfolge. Der Vortrag gibt eine Übersicht über verschiedene Klassen iterativer Verfahren, für welche allein aufgrund der Kenntnis der algebraischen und der Ordnungsstruktur im Raum der Maschinenzahlen bzw. darüber aufgebauter Räume Aussagen über die Länge der auftretenden Zyklen hergeleitet werden können.

R. Klatte und Ch. Ullrich
D-75 Karlsruhe
Inst. f. Angew. Math. d.
Universität Karlsruhe

II Algebraische Algorithmen zur Isolierung reeller Nullstellen von Polynomen mit beliebig langen ganzzahligen Koeffizienten

Am Beispiel der Nullstellenberechnung, einem klassischen Thema der Numerik, werden Methoden der Computer Algebra exemplifiziert. Insbesondere werden zwei Algorithmen empirisch und theoretisch miteinander verglichen, die sich durch die Konstruktion einer Sturmschen Kette unterscheiden. Der zweite Algorithmus erzeugt induktiv aus den Lösungen für alle Ableitungen die Lösung für das vorgelegte Polynom; er ist besonders geeignet für ein Rechnen mit dynamisch kontrollierter Präzision und benötigt nur in Grenzfällen die volle Exaktheit der algebraischen Algorithmen. Er ist theoretisch und empirisch schneller als alle bekannten Verfahren, die die Gültigkeit der Lösung garantieren.

Rüdiger Loos
D-675 Kaiserslautern
Fachbereich Informatik, Universität

Zur Durchführbarkeit des Gaußschen Algorithmus bei lin. Gleichungssystemen mit Intervallen als Koeffizienten

Ist für eine Intervallmatrix $\mathfrak{A}$ der Gaußsche Algorithmus durchführbar, so liefert er einen Intervallvektor $\mathfrak{x}$ mit der Eigenschaft $\{x \mid Ax = b,\ A \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{b}\} \subset \mathfrak{x}$.

<u>Satz</u>: Es sei $\mathfrak{A} = (A_{ij})$ mit $A_{ij} = \langle a_{ij}, r_{ij} \rangle$, $1 \le i,j \le n$ eine Intervallmatrix und $B = (b_{ij})$ eine reelle Matrix mit $b_{ij} = |a_{ii}| - r_{ii}$, $i=j$, und $b_{ij} = -(|a_{ij}| + r_{ij})$ sonst. Falls B eine M-Matrix ist, so ist der Gaußsche Algorithmus mit der Intervallmatrix $\mathfrak{A}$ ohne Pivotisierung durchführbar.

G. Alefeld
75 Karlsruhe
Inst. f. Angew. Math.

Fehlererfassung mit partiellen Mengen.

Partielle Mengen werden in einer auf Klaua zurückgehenden 3-wertigen Mengenlehre untersucht und sind geeignet, gewisse Unschärfen bzw. Ungenauigkeiten bei der üblichen Mengenbildung exakt einzugrenzen.

H. Ratschek
4 Düsseldorf
Math. Inst. d. Univ.

Zur Approximation des Wertebereichs reeller Funktionen durch Intervallausdrücke.

Für die rechnerische Approximation des Wertebereichs reeller Funktionen genügt es vielfach die Auswertung von Intervallausdrücken heranzuziehen. Damit erhält man nicht nur einfach zu berechnende, sondern sogar monotone einschließende Approximationen für den Wertebereich über einem Intervall. In praktischen Fällen hängt die Güte der Approximation gewöhnlich linear von dem Durchmesser des betrachteten Intervalles ab. Je besser die Approximation jedoch ist, desto schneller konvergieren meist auch die damit gebildeten Verfahren.
Es wird eine Charakterisierung jener Fälle hergeleitet, in denen diese Abhängigkeit quadratisch oder von höherer Ordnung ist. Dazu werden intervallmäßige Auswertungen auf Klassen von verallgemeinerten Nullintervallen als neues Hilfsmittel eingeführt. Die sich dabei ergebenden Sätze sind starke Verallgemeinerungen von bisher sehr aufwendig bewiesenen Einzelaussagen.

Jürgen Herzberger
Institut f. Angew. Math.
Universität Karlsruhe
75- Karlsruhe / Postfach 6380

Ansätze zur Erweiterung der Kreisarithmetik

Für die Erweiterung der Ansätze der Kreisarithmetik auf Kreisbereiche werden für die Mittelpunktsdarstellung für Innenkreise nicht-negative, für Außenkreise negative Radien vorgeschlagen.
Halbebenen lassen sich in der 2. Darstellung einbeziehen:
$[c; r] \longrightarrow [|c|, \arg(c), |c|-r]$ durch $[\infty, \varphi, d]$ als Grenz-

wert von Innenkreisen. Da eine die Struktur von $P(\overline{\mathbb{C}})$ erhaltende Erweiterung bei der Multiplikation von Innenkreis und Halbebene noch nicht angegeben werden kann, wird eine Erweiterung nur auf Außenkreise vorgestellt.

Bei der zentrierten Multiplikation ergibt sich

$$[c_1; r_1] \boxdot [c_2; r_2] = [c_1 c_2; \pm (|c_1| r_2 + |c_2| r_1 \pm r_1 r_2)],$$

wenn die berechneten Radien ≥ 0 bzw < 0 sind.

Für die optimale Multiplikation erhalten wir unter ähnlichen Bedingungen mit $x = r_1 r_2 / (|c_1 c_2| \pm (|c_1| r_2 + |c_2| r_1))$

$$[c_1, r_2] \odot [c_2, r_2] = [c_1 c_2 (1+x); \pm (|c_1| r_2 + |c_2| r_1)(1+x)].$$

Manfred Hauenschild
Rechenzentrum der
Ruhr-Universität Bochum
463 Bochum / Postfach 2148

Speicheraufwand von Approximationen

B sei ein Banachraum, $\mathfrak{F}, \hat{\mathfrak{F}}$ Mengen von Funktionen $F: U \to B$ bzw. $\hat{F}: \hat{U} \to B$. Eine Abbildung $D: (U, \mathfrak{F}) \to (\hat{U}, \hat{\mathfrak{F}})$ heißt ε-Approximation für $(U, \mathfrak{F})$, falls für alle $u \in U$, $F \in \mathfrak{F}$ $\| Fu - D(F)(Du) \|_B \leq \varepsilon$. $H(D) := \mathrm{ld}_2 \#(\hat{U})$ wird als Speicheraufwand von D bezeichnet, weiter $H_\varepsilon(U, \mathfrak{F}, \vartheta) = \inf \{ H(D); D \in \vartheta \wedge D\ \varepsilon\text{-Approx.} \}$ als ε-Entropie von $(U, \mathfrak{F}, \vartheta)$. Für klassische Approximationsverfahren wird Approximationsschema $(D_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ von ε-Approximation konstruiert und der Quotient $H(D_\varepsilon) / H_\varepsilon(U, \mathfrak{F}, \vartheta)$ untersucht.

Helmut Brakhage
Fachbereich Mathematik d. Univ.
~~675~~ 675 Kaiserslautern
Pfaffenbergstraße

Gerundetes Rechnen in topologischen Vereinen

Ist $\mathfrak{A}$ eine nichtleere Menge, $*: \mathfrak{A}^2 \to \mathfrak{A}$ eine innere Verknüpfung, $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ und $R: \mathfrak{U}^2 \to \mathfrak{P}(\mathfrak{A}^2)$ eine beliebige Relation $R(U,V) \subseteq U \times V$, $U, V \in \mathfrak{U}$, so kann eine innere Verknüpfung $\overset{R}{*}: \mathfrak{U}^2 \to \mathfrak{U}$ auf der Menge $\mathfrak{U}$ von Teilmengen von $\mathfrak{A}$ definiert werden. Hierzu werden einige Sätze über die Permanenz von Eigenschaften der Verknüpfung (Kommutativität, Assoziativität, neutrales Element, Teilmengeneigenschaft u.a.) sowie wichtige Anwendungsbeispiele (Komplexmultiplikation, klassische Rundung, Intervallrechnung, „inverse" Intervalle u.a.) angegeben.

Seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{W}$, auf $\mathfrak{W}$ eine Ordnungsrelation $\le$ erklärt ($(\mathfrak{W}, \le)$ ein „Verein"), $\sigma: \mathfrak{W} \to \mathfrak{U}$ eine bezgl. $\le$ streng inklusions-monotone Abbildung (Bsp.: $\mathfrak{W}$ atomarer bzw. antiatomarer Vollverband, $\mathfrak{A}$ Menge der Atome bzw. Antiatome, σ Zuordnung der Atome bzw. Antiatome zu jedem Element aus $\mathfrak{W}$), $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{U}$ die $\overset{R}{*}$-Hülle von $\sigma(\mathfrak{W})$ und $\rho: \mathfrak{H} \to \mathfrak{W}$ sodaß

(1) $\emptyset$ bzw. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{H} \Rightarrow \rho(\emptyset) = O$ (Nullelement) bzw. $\rho(\mathfrak{A}) = E$ (Einselement)

(2) $\bigwedge_{H \in \mathfrak{H}} H \subseteq \sigma\rho(H) \vee \sigma\rho(H) \subseteq H$

(3) $\bigwedge_{H', H'' \in \mathfrak{H}} H' \subseteq H'' \Rightarrow \rho(H') \le \rho(H'')$

(4) $\bigwedge_{v \in \rho(\mathfrak{H})} \rho\sigma(v) = v$

(vorheriges Bsp.: ρ Vereinigung bzw. Durchschnitt einer Menge von Atomen bzw. Antiatomen), so definiert (ρ, σ) eine „mehrstufige"- (Vor. (1) mit (3)) oder „einstufige"- (Vor. (1) mit (4)) „Rundung". Nachfolgend wird nur letztere betrachtet. Ist $\mathfrak{W}_\top$ bzw. $\mathfrak{W}_\perp =^{def} \{ v \mid v \in \mathfrak{W}, \sigma\rho\sigma(v) \supseteq$ bzw. $\subseteq \sigma(v) \}$, so ist $\top: \mathfrak{W}_\top \to \mathfrak{W}$ bzw. $\perp: \mathfrak{W}_\perp \to \mathfrak{W}$, definiert durch $\bigwedge_{v \in \mathfrak{W}_\top} \top v =^{def} \rho\sigma(v)$ bzw. $\bigwedge_{v \in \mathfrak{W}_\perp} \perp v =^{def} \rho\sigma(v)$ eine einstufige (nicht klassische) Topologie auf $\mathfrak{W}_\top$ bzw. $\mathfrak{W}_\perp$ mit der Abschließung $\top\!\!\perp \mathfrak{W} =^{def} \mathfrak{W}_\top \cap \mathfrak{W}_\perp$

$(\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_{\top} \cup \mathfrak{W}_{\perp})$. Zentral für die hier entwickelte Theorie der Rundung, die alle bekannten Darstellungen und Beispiele umfaßt, ist die Definition einer ~~gerund~~ „gerundeten inneren Verknüpfung" auf $\mathfrak{W}$ durch $\overset{\mathcal{R}}{\underset{\rho\sigma}{*}} : \mathfrak{W}^2 \to \mathfrak{W}$ durch $\bigwedge_{\mathfrak{U},\mathfrak{V} \in \mathfrak{W}} (\mathfrak{U},\mathfrak{V}) \mapsto \rho(\sigma(\mathfrak{U}) \overset{\mathcal{R}}{*} \sigma(\mathfrak{V}))$, d.h. gerundetes Rechnen erfolgt grundsätzlich in Vereinen, auf denen ein Paar von Topologien $\top, \perp$ erklärt ist. Die Ergebnisse der algebraischen Verknüpfung liegen in der gemeinsamen Abschließung. Diese Verknüpfung ist mittels eines „Maßes" φ auf den Mengen $\sigma(\mathfrak{U})$ zu einer bewerteten gerundeten inneren Verknüpfung verallgemeinerbar, die u.a. die Verknüpfung von „fuzzy sets" erfaßt.

Es werden einige Sätze über Eigenschaften der Verknüpfung $\overset{\mathcal{R}}{\underset{\rho\sigma}{*}}$ angegeben, sowie einige Homomorphiesätze. Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \Gamma\mathfrak{W}$, $\mathfrak{G}$ $\overset{\mathcal{R}}{\underset{\rho\sigma}{*}}$-stabil, $\overset{\mathcal{R}}{\underset{\rho\sigma}{*}}$ auf $\mathfrak{G}$ kommutativ, assoziativ und $N \in \mathfrak{G}$ neutrales ~~Ein~~ Element, so wird unter geeigneten Voraussetzungen der klassische algebraische Symmetrisierungssatz über die minimale Einbettung von $\mathfrak{G}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$ dahingehend erweitert, daß $\leq$ zu $\tilde{\leq}$, σ zu $\tilde{\sigma}$, $\mathcal{R}$ zu $\tilde{\mathcal{R}}$ (und damit $\top$ zu $\tilde{\top}$, $\perp$ zu $\tilde{\perp}$) kompatibel auf $\tilde{\mathfrak{W}}$ fortgesetzt werden. Ist $\mathfrak{U} \in \mathfrak{W}$ regulär, so besteht $\tilde{\sigma}(\mathfrak{U}^{-1})$ aus der Menge $\{A^{-1} \mid A \in \sigma(\mathfrak{U}),\ A \text{ regulär}\}$. Im Beispiel des Mengenvollverbandes ist dann $\mathfrak{U}^{-1}$ Durchschnitt seiner Antiatome, wenn $\mathfrak{U}$ Vereinigung seiner Atome A ist, und umgekehrt.

Rudolf ALBRECHT
Inst. f. Informatik
Univ. Innsbruck
A-6020 INNSBRUCK
Josef Hirn Str. 5

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Schnelle Berechnung kleinster Einschliessungsintervalle für mehrfache Summen und Produkte und für beliebige Wurzeln von Gleitkommazahlen

Einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und einem Gleitkommasystem T kann man eine intervallwertige Funktion $F: T^n \to \mathbb{I}T$ zuordnen, die für jedes Element $a \in T^n$ das kleinste Einschliessungsintervall $F(a)$ zu dem exakten Wert $f(a)$ liefert. Für die drei Funktionen $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$, $\sqrt[n]{a}$ ($a_i \in \mathbb{R}$ $(i=1(1)n)$, $a \in \mathbb{R}$) werden Algorithmen angegeben, welche diese Einschließungsintervalle bei beliebigem Gleitkommasystem T berechnen. Die Algorithmen für $\sum_{i=1}^{n} a_i$ und $\prod_{i=1}^{n} a_i$ berechnen zunächst doppeltlange Ergebnisse und testen, ob diese genau genug sind. Falls nötig wird die Genauigkeit gesteigert. Der Algorithmus für $\sqrt[n]{a}$ beruht auf einer Modifikation des Newton-Verfahrens, welche es gestattet, unter gewissen Voraussetzungen das kleinste Einschliessungsintervall aus $\mathbb{I}T$ zu berechnen, das die Nullstelle einer reellen Funktion enthält. Dieses Verfahren wird auf das Polynom $x^n - a$ angewendet.

Gerd Bohlender
Institut f. Angew. Math. der Universität
D-75 Karlsruhe
Postfach 6380

(Alg. Zahlentheorie Tagung)

On the Equation $\zeta_K(s) = \zeta_L(s)$

Several equivalent formulations of $\zeta_K(s) = \zeta_L(s)$ can be easily obtained from the functional equation & Euler product for zeta functions. Essentially, $\zeta_K(s) = \zeta_L(s)$ means that (almost all) prime numbers $p \in \mathbb{Z}$ split in K and L in the same way. There are many conditions on K which ~~imply~~ guarantee that K is arithmetically solitary, that is, that

$$\zeta_K(s) = \zeta_L(s) \Rightarrow K \cong L$$

For example, if ~~the~~ ~~is~~ the normalization of K over $\mathbb{Q}$ is cyclic over K, then K is solitary; and all K with $[K:\mathbb{Q}] \leq 6$ are solitary.

Next, there are two simple methods for constructing wide classes of pairs of nonisomorphic fields $K \not\cong L$ with $\zeta_K(s) = \zeta_L(s)$. These methods are constructive, and the simplest cases of these constructions yields equations

$$f_1(x) = x^8 - \alpha$$
$$f_2(x) = x^8 - 16\alpha$$

where α is any element of $\mathbb{Z}$ for which $f_1(x)$ is irreducible and $\mathbb{Q}(\zeta_8) \cap \mathbb{Q}[\sqrt[8]{\alpha}] = \mathbb{Q}$. If Θ_1 is a root of f_1 and Θ_2 of f_2, then $K_1 = \mathbb{Q}[\Theta_1]$ is not isom. to $K_2 = \mathbb{Q}[\Theta_2]$ but $\zeta_{K_1}(s) = \zeta_{K_2}(s)$. For $\alpha = 97$ the prime 2 ramifies in K_1 as $P_1 P_2 P_3^2 P_4^4$ (all $f_i = 1$) and in K_2 as $(P_1 P_2 P_3 P_4)^2$ (all $f_i = 1$), showing that the adele rings are not $\cong$.

There is a simple example of such a pair (K, L) of degree $[K:\mathbb{Q}] = [L:\mathbb{Q}] = 7$: Shih has recently proved that $PSL(3,2)$ is a Galois group over $\mathbb{Q}$, and it is then easy to show that $PSL(3,2)$ contains 2 conj. classes of subgroups H_1, H_2 of index 7 that are "Gassmann equivalent": that is

$$|H_1 \cap c| = |H_2 \cap c|$$

for every conj. class $c \in PSL(3,2)$. This then implies that the fixed fields K_1, K_2 of H_1, H_2, have the same zeta functions. Equations for these fields are:

$$f_1(x) = x^7 + 14x^4 - 42x^2 - 21x + 9$$
$$f_2(x) = x^7 - 7x + 3$$

(Eq. from Leopoldt & Trinks)

Robert Perlis
Uni Regensburg
FB Math.

Algebraische Zahlentheorie
10.–16. August 1975

Power residues and exponential congruences

The following theorems were mentioned (K is an algebraic number field)

Theorem 1. A binomial $x^{p^\nu} - \alpha$ (p prime) is the product of polynomials normal over K if and only if at least one of the following conditions is satisfied for a suitable $\gamma \in K$

(i) $\alpha^w = \gamma^{p^\nu}$

(ii) $p = 2$, $w \not\equiv 0 \bmod 4$, $\nu \leq \tau$, $\alpha = -\gamma^2$

(iii) $p = 2$, $w \not\equiv 0 \bmod 4$, $\nu = \tau + 1$, $\sqrt{-(\zeta_{2^\tau} + \zeta_{2^\tau}^{-1} + 2)} \in K$, $\alpha = -\gamma^2$

(iv) $p = 2$, $w \not\equiv 0 \bmod 4$, $\nu = \tau + 1$, $\sqrt{-(\zeta_{2^\tau} + \zeta_{2^\tau}^{-1} + 2)} \notin K$

$$\alpha = -(\zeta_{2^\tau} + \zeta_{2^\tau}^{-1} + 2)^{2^\lambda} \gamma^{2^{\lambda+1}}, \quad 1 \leq \lambda \leq \tau - 2$$

(v) $p = 2$, $w \not\equiv 0 \bmod 4$, $\nu \geq \tau + 2$, $\alpha = -(\zeta_{2^\tau} + \zeta_{2^\tau}^{-1} + 2)^{2^{\nu-2}} \gamma^{2^{\nu-1}}$.

Here w is the number of roots of unity contained in K, τ the greatest integer such that $\zeta_{2^\tau} + \zeta_{2^\tau}^{-1} \in K$.

Theorem 2 A binomial $x^n - \alpha$ is abelian over K if and only if

$$\alpha^w = \gamma^n, \quad \gamma \in K.$$

Theorem 3 If $\alpha = \vartheta^n$, $\vartheta \in K(\zeta_n)$, $\alpha \in K$ then

$$\alpha^\sigma = \gamma^n, \quad \gamma \in K$$

where

$$\sigma = \Big(n, w, \operatorname*{l.c.m.}_{\substack{q \mid n \\ q \text{ prime or } q = 4}} [K(\zeta_q) : K]\Big)$$

Moreover if $\zeta_{(4,n)} \in K$ and $n \equiv 0 \bmod (n,w) \underset{q|n,\, q \text{ prime}}{\mathrm{l.c.m}} [K(\zeta_q):K]$

(*) or $\zeta_{(4,n)} \notin K$ and $n \equiv 0 \bmod 2^{\tau}(n,w) \underset{q|n,\, q \text{ prime}}{\mathrm{l.c.m}} [K(\zeta_q):K]$

then
$$\alpha = \gamma^{n/6}.$$

Theorem 4 If $\alpha_1^{x_1} \dots \alpha_k^{x_k} = \gamma^n$, $\gamma \in K$ implies $x_1 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0 \bmod n$ then for any integers $c_1, \dots, c_k \equiv 0 \bmod 6$ there exist infinitely many prime ideals $\mathfrak{p}$ of $K(\zeta_n)$ such that
$$\left(\frac{\alpha_i}{\mathfrak{p}}\right)_n = \zeta_n^{c_i} \qquad (1 \le i \le k)$$

Moreover if n satisfies the condition (*) and
$$\zeta_w^{x_0} \alpha_1^{x_1} \dots \alpha_k^{x_k} = \gamma^{n/6},\ \gamma \in K \text{ implies } x_1 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0 \bmod \tfrac{n}{6}$$
then there exist infinitely many prime ideals $\mathfrak{p}$ of $K(\zeta_n)$ such that
$$\left(\frac{\zeta_w}{\mathfrak{p}}\right)_n = \zeta_{(n,w)}^{c_0}, \quad \left(\frac{\alpha_i}{\mathfrak{p}}\right)_n = \zeta_n^{c_i} \quad (1 \le i \le k)$$

Theorem 5. If $f \in K[x]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ and the congruence
$$f(\alpha_1^{x_1} \dots \alpha_k^{x_k}) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$$
is soluble for almost all prime ideals $\mathfrak{p}$ of K then the equation
$$f(\alpha_1^{x_1} \dots \alpha_k^{x_k}) = 0$$
~~has a solution~~ is soluble in rational numbers.

Theorem 6. If $\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{kj}, \beta_j \in K$ $(j = 1, \dots, l)$ ~~and~~ the congruence
$$\prod_{j=1}^{l} (\alpha_{1j}^{x_1} \dots \alpha_{kj}^{x_k} - \beta_j) \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}$$
is soluble for all ideals $\mathfrak{m}$ of K prime to any fixed $\mathfrak{D} \neq 0$ then the equation
$$\prod_{j=1}^{l} (\alpha_{1j}^{x_1} \dots \alpha_{kj}^{x_k} - \beta_j) = 0$$
is soluble in integers.

Andrzej Schinzel
Math. Institute PAN
Warszawa, Poland

Effektive Lösung p-adischer Gleichungssysteme: Elementarer Beweis (ohne Hilfsmittel aus der Algebraischen Geometrie) des Satzes von Greenberg, Pac. J. Math. 51 (1974) 143–153

Martin Kneser

Einbettungsproblem mit abelschem Kern.

Man gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit eines Einbettungsproblems von Zahlkörpern mit abelschem Kern.
Man betrachtet Charaktere dieses Kernes mit Werten in der Idelklassengruppe. Diese Charaktere sollen über dem Grundkörper definiert sein. Die Bedingungen bestehen darin, daß solch ein Charakter die 2-Kohomologieklasse des Problems annulieren soll.
Unter die Voraussetzung, daß die lokalen Bedingungen für die Lösbarkeit erfüllt sind, bleiben nur endlich viele (sogenannte globale) Bedingungen.
Ist der Kern zyklisch, so gibt es höchstens eine globale Bedingung, und sie wird explizit bestimmt.
Insbesondere findet man zum Beispiel die Ergebnisse von Damey und Martinet über Quaternionenerweiterungen wieder.

Georges Poitou
425 Faculté
91405 Orsay
Frankreich

Relations between ideal class numbers

The following notation is used:

G the finite Galois group of 2 relatively normal number fields K/k

H a subgroup of G, HK the subfield of K fixed by H, and $\tilde{H} = \sum_{h \in H} h$

C the Galois group of the max. real subfield of K when $k = \mathbb{Q}$

$U = U_K$, HU, $U_k = GU$ the unit groups of K, HK, and k resp,

W, HW the roots of unity in K, HK

n_H, h_H, R_H the degree $[G:H]$, the class number, and the regulator of HK

1_H^G the character on G induced by the principal character on H

X a finite dimensional $\mathbb{Q}[G]$ module, and L a G-lattice of X, (ie a $\mathbb{Z}[G]$-module for which $\mathbb{Q} \otimes L = X$)

X^* an isomorphic image of the dual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, \mathbb{Q})$ of X; and

HX, HX^*, HL, HU, ... the submodules of $X, X^*, L, U, \ldots$ fixed by H

A pairing $(\, , \,) : X \times Y \to \mathbb{C}$ for two left $\mathbb{Q}[G]$ modules X, Y is defined by (i) $(\, , \,)$ is bilinear in $\mathbb{Q}$, (ii) $(\, , \,)$ is G-invariant i.e. $(gx, gy) = (x, y)$ (iii) $X^{\perp} = \{ y \in Y \mid (x,y) = 0 \ \forall \ x \in X \} = 0$ and $Y^{\perp} = \ldots = 0$

This definition forces Y to be an isomorphic copy of $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, \mathbb{Q})$ and we call it the <u>dual</u> of X with respect to $(\, , \,)$ and write $Y = X^*$.

If L and M are G-lattices of X and X^* resp., the <u>regulator</u> is defined by
$R(HL, HM) = |H|^{-n} \, |\det((x_i, y_j))|$ where $n = \dim HX$, and $\{x_i\}, \{y_j\}$ are bases of HL and HM.

<u>Theorem</u> If L_1 and L_2 are $\mathbb{Z}[G]$ isomorphic G-lattices of X, and if $\sum_H a_H 1_H^G = 0$ then

$$\prod_H [HL_1 : HL_2]^{a_H} = 1$$

<u>Corollary</u> Suppose L, M are G-lattices of X, X^* resp and $\sum_H a_H 1_H^G = 0$

Then $\prod_H R(HL, HM)^{a_H}$ is independent of the choice of pairing $(\, , \,)$ on $X \times X^*$

Further, if L^* and M are $\mathbb{Z}[G]$ isomorphic then $\prod_H R(HL, HM)^{a_H} = \prod_H N_H(L)^{-a_H}$
where $L^* = \{ y \in X^* \mid (x, y) \in \mathbb{Z} \ \forall \ x \in L \}$ and $N_H(L) = R(HL, H(L^*))^{-1}$

We apply these theorems to number fields with $G = \mathrm{Gal}\, K/\mathbb{Q}$, $X^* = \mathbb{Q} \otimes U$, $X = \mathbb{Q}[G]\tilde{C} / \mathbb{Q}\tilde{G}$ and $L = \mathbb{Z}[G]\tilde{C} / \mathbb{Z}\tilde{G}$. The pairing $(g\tilde{c}, e) = \log|\tilde{c}_{g^{-1}} e|$ for $e \in U/W$ makes $R_H = R(HL, H(U/W))$ into the regulator of HK.

A Minkowski unit is a real unit ϕ of K which generates a torsion free subgroup of finite index in U.

It is easy to calculate $N_H(L)$ and therefore, if M is generated by a Minkowski unit, the corollary above gives $\prod \{R_H\, n_H\, [H(U/W) : H(MW/W)]\}^{a_H} = 1$

Artin has shown $\sum a_H 1_H^G = 0 \Rightarrow \prod \zeta_H(s)^{a_H} = 1$. If $\zeta_H(s)$ is expanded about $s=0$ its leading coefficient is $-\frac{h_H R_H}{\omega_H}$ and so $\prod (h_H R_H \omega_H^{-1})^{a_H} = 1$. Hence

Brauer's Theorem (Math Nachr 4 (1950) p158) If M is the group of units generated by a Minkowski unit then $\prod h_H^{a_H} = \prod (n_H [HU : HM])^{a_H}$

The calculation of a Minkowski unit can be avoided in the following way: Let $S = \{H \mid a_H \neq 0\}$, $V_S = \langle HU \mid H \in S \rangle_{\mathbb{Z}[G]}$, $N_S = \langle HL \mid H \in S \rangle_{\mathbb{Z}[G]}$, $Y_S = \mathbb{Q} \otimes N_S$ and $Y_S^* = \mathbb{Q} \otimes V_S$. Y_S, Y_S^* are clearly dual subspaces of X and X^* and their intersections with L and M are isomorphic. The two theorems above now yield

Theorem If $\sum a_H 1_H^G = 0$ and $A \underset{\mathbb{Z}[G]}{\cong} L \cap Y_S$ is a submodule of U then $\prod h_H^{a_H} = \prod \{n_H [HU : HA]\}^{a_H}$
Moreover, A may be chosen within V_S

Thus no more units than those in the HK $(H \in S)$ need be calculated.
A similar theorem can be proved for any ground field k by the same techniques and this leads to a generalization of Kuroda's class number relation (Nagoya Math J 1 (1950) p1)
It was not possible to mention this because of lack of time, but a very special case of the theorem that can be proved is this:

Theorem Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{a_i} \mid 1 \leq i \leq n)$ for p odd prime, $a_i \in \mathbb{Q}$ such that $[K:\mathbb{Q}] = p^n$
Let T be the set of subfields of degree p over $\mathbb{Q}$, and h_t $(t \in T)$ their class numbers
Let h be the class number of K, $Q = [U_K, W_K \prod_{t \in T} U_t]$ and

$$A = (p^n-1)/(p-1) - n + \tfrac{1}{2}\{ n + (n-1)(p^n-1)/2 - (p^n-1)/(p-1)\}$$

Then $\quad h \prod_{t\in T} h_t^{-1} = Q\, p^{-A}$

Colin Walter
Dept. Pure Mathematics
Mill Lane
Cambridge, England.

Galois module structure

L/K is a normal extension of number fields, $Gal(L/K) = \Gamma$, $\mathcal{O} = int(L)$, $\mathfrak{o} = int(K)$. If L/K is tame then $\mathcal{O}$ is locally free over $\mathfrak{o}(\Gamma)$ (E. Noether). One wants to determine the class $(\mathcal{O})$ in the class group $Cl(\mathfrak{o}\Gamma)$ of the group ring $\mathfrak{o}\Gamma$, assuming tame ramification. This can be computed via resolvents and resolvent modules $(\mathcal{O}\,|\,\chi)$, associated with the characters χ of Γ. There is a deep connection of these with the Galois Gauss sums $\tau(\chi)$ introduced by Hasse, occurring in the functional equation of the Artin L-function. In the particular case when $K = \mathbb{Q}$, $(\mathcal{O}\,|\,\chi)$ is generated by $\tau(\chi)$ over the ring of integers of $\mathbb{Q}(\chi)$. This leads to 1) explicit results on the module structure of $\mathcal{O}$, e.g. normal integral bases theorems for particular groups Γ, 2) a general theorem connecting $(\mathcal{O})$ and the constants $W(\chi)$ in the functional equation, for symplectic χ.

A. Fröhlich (FRÖHLICH)
King's College, London

Brauer Groups and Jacobians

The Problem: Classification of covers
(*) $C \xrightarrow{\varphi} C'$ where: C, C' are projective, non-singular curves; C, φ, C' are defined over a field k; C' is of genus 0, and; $\deg(\varphi) = n$. Given C, and n, the goal is to decide whether or not a given form of $\mathbb{P}^1$ appears in (*) as C'.

The Method: Consider $n > 2g-2$ where g is the genus of C. By use of the morphisms $C' \hookrightarrow C^{(n)} \xrightarrow{\Phi} J^{(n)}(C)$ where: $C^{(n)}$ is the n-th symmetric product of C; $J^{(n)}(C)$ is the connected component of the Picard variety of C corresponding to divisor classes of degree n, and; C' is contained as a form of $\mathbb{P}^1$ in a fiber of Φ, we interpret the original problem in terms of the étale cohomology theory of Artin-Grothendieck. Certain formulas relating classes in the Grothendieck-Brauer groups are produced. In cases when explicit identification of the $\mathbb{P}^n$-bundle $C^{(n)} \xrightarrow{\Phi} J^{(n)}(C)$ can be made (by identification of its Čech cocycle in the étale topology) the original problem is solved. This includes the cases $g = 0$ (partly due to Witt) and $g = 1$, $n = 2$ (considered by MacRae and Samuel). ■

Michael D. Fried
Dept. of Mathematics
University of California (Irvine)
Irvine, California 90808
U.S.

Dyadotropic Polynomials

The polynomial $f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 + 2x + 4$ takes values

$$(*)\left\{\begin{array}{cccccccc} x & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(x) & -2 & -16 & -4 & 4 & 2 & 8 & 64 \end{array}\right\}$$

showing a "tendency toward ($\pm$) powers of two". This property is so strong it deserves a special name (see title). For a formal definition we call a monic polynomial of degree N "dyadotropic" when it takes $N+1$ consecutive values equal to $\pm$ a power of two. We are concerned primarily with special types, biquadratic dihedral of type

$$f(x) = N_{2/1}\, g(x), \quad g(x) = x^2 + \alpha x + e\ ; \quad \left\{\begin{array}{l} e = \pm 2^s \quad (s \geq 1) \\ \alpha = \dfrac{a + b\sqrt{d_0}}{2} \end{array}\right.$$

$$d_0 \equiv 1 \pmod 8$$

For the case $(*)$ $e = 2$, $\alpha = (1+\sqrt{41})/2$.

In a machine enumeration several <u>parametric</u> types emerged for $e = +2$ and -2 while for $e = +4$ and -4 only a finite number of special cases emerged.

e	a	d	Ω_1	Ω_2	$(d = d_0 b^2)$
2	$\frac{1}{3}(2^u - (-1)^u)$	$(a+6)^2 + (-1)^u 8$	$(\xi-1)^{u+1}/(\xi+1)$	$(\xi+2)\xi^u/(\xi-2)^{u+1}$	(e.g.),
-2	$2^u + 1$	$(a+2)^2 - 8$	$(\xi+1)^{u+1}/(\xi-1)$	$(\xi+2)\xi^u/(\xi-2)^{u+1}$	(e.g.),
4	1	113	$(\xi-1)^3/(\xi+1)$	$(\xi+2)^6\xi/(\xi-2)^8$	(e.g.).

Here Ω_1 and Ω_2 are units (For case $*$ again $e = 2$, $u = 1$). The reason for these units is that in $k_2 = Q(\sqrt{d_0})$, $2 = \mathfrak{2}_1\mathfrak{2}_2$ and in ~~$Q(\xi)$~~

$$k_4 = Q(\xi), \quad \mathfrak{2}_1 = \mathfrak{2}_{11}\mathfrak{2}_{12}, \quad \mathfrak{2}_2 = \mathfrak{2}_{20}^2.$$

Thus $\left\{\begin{array}{l} (\xi+2), (\xi), (\xi-2) \text{ are divisible only by } \mathfrak{2}_{20}, \mathfrak{2}_{12} \\ (\xi+1), (\xi-1) \quad \text{" \quad " \quad " \quad "} \quad \mathfrak{2}_{11} \end{array}\right\}$ leading to units.

By asymptotic development of regulators, ε, Ω_1 and Ω_2 are <u>independent</u> as $u \to \infty$ (ε = unit of k_2), but for small u there may be interesting relations. The question of fundamental units is left untouched.

Harvey Cohn
Dept of Mathematics
City College of New York
138 Street and Convent Ave
New York, N.Y., 10031

Polynômes sur un corps fini.

Les résultats exposés se trouvent (aussi) dans. (et se trouveront)

1) Polynômes sur un corps fini Bull Sc Math 2e série 95, 1971

2) Critères d'irréductibilité des polynômes composés à coefficients dans un corps fini. Acta Arithmetica Vol 30 n°3

(Adresse Personnelle
S. AGOU
89 Rue garibaldi
69006 LYON FRANCE)

Simon AGOU
Departement de mathematiques
Université Claude Bernard LYON 1
43 Boulevard du 11 Novembre 1918
69621 - Villeurbanne
FRANCE

Maximal abelsche Erweiterung von Funktionenkörpern über lokalen Körpern der Charakteristik 0.

Sei K ein $\wp$-adischer Körper, $F|K$ ein Funktionenkörper einer Variablen, S eine endliche Stellenmenge von F. Um die Galoisgruppe der maximal abelschen, außerhalb von S unverzweigten Erweiterung F_S von F zu finden, muß man Isogenien von kommutativen zusammenhängenden algebraischen Gruppen in die verallgemeinerte Jacobische J_m $(m = \Sigma \mathfrak{p})$ über $\bar{K}$ betrachten, auf deren Kern $G(\bar{K}|K)$ trivial operiert. Aus der Struktur von $J_m \times \bar{K}$ bekommt man im allgemeinen nur Abschätzungen von $G(F_S/F)$, falls aber die zu F gehörende Kurve ausgeartete zerfallende Reduktion im Sinne von Mumford (Comp. Math. 24) hat, erhält man unter Verwendung der analytischen Theorie (Tate, Roquette, Mumford, Manin, Drinfeld) eine genaue Beschreibung:

$$G(F_S/F) \cong G(\mathrm{Kat}(K) \times \hat{\mathbb{Z}}^g \times \prod_{i=1}^{g} \mathbb{Z}/s_i \times \prod_{\mathfrak{p} \in S \setminus P_0} \Delta(\mu_{\mathfrak{p}}) / \langle R(\sigma, q_i) \rangle_{\sigma \in G_{ab},\ i = 1..g}$$

wobei $g = g(F)$ das Geschlecht von F ist,

$q_1, \dots, q_g$ eine Basis des zu Γ gehörenden Periodengitters ist, $s_i = ggT($Anzahl der Einheitswurzeln in K, Max$\{m, \sqrt[m]{q_i} \in K\})$, $D(\mu_g) \simeq$ Einheitswurzeln im Restklassenkörper $\bar{F}(g)$ von g und $R(\sigma, q_i)$ $(\sigma \in G(\bar{K}|K))$ explizit bestimmbare Relationen sind. Falls C nicht zerfallende ~~Reduktion~~ ausgeartete Reduktion hat, tritt im Wesentlichen statt dem Faktor $\bar{\mathbb{Z}}^g$ ein Faktor $\bar{\mathbb{Z}}^{g-d} \times \prod_{i=1}^{d} (\mathbb{Z}/n_i)$ auf, der durch den Zerfällungskörper von $\mathrm{Pic}^0(C^0)$ bestimmt ist. Falls C gute Reduktion hat, ist $G(F_S(\mathcal{F}) \simeq G_{ab} \times N$ mit $|N| < \infty$.

Gerhard Frey, Math. Institut, Saarbrücken

Class Groups of Congruence Function Fields.

In this joint work with D. Madden, a lower bound is given for the exponent of the null class group of a congruence function field, if it belongs to a class of abelian extensions of rational function fields. This answers, in particular, the analogue of the following question of Iwasawa: Does the exponent of the ideal class group of an imaginary quadratic number field become infinitely large with the absolute value of the discriminant?

M. L. Madan
Dept. of Maths.
Ohio State University
Columbus, Oh. 43210
U.S.A.

On a conjecture of Dedekind on ζ-functions.

We consider the following problem, going back to Dedekind: Let K be an algebraic number field, L/K a finite extension. Is $\zeta_L(s)/\zeta_K(s)$ an entire function (in the whole complex plane)? In my ~~report~~ talk I spoke about the following result (January 1974) [INDAGATIONES MATHEMATICAE 37, 1975]:

Let L/K as above and assume that there is a field $\Omega \supset L$, such that Ω/K is galois and such that $Gal(\Omega/K)$ is a finite solvable group. Then $\zeta_L(s)/\zeta_K(s)$ is an integral function.

This result generalises the following results, at least in the cases where solvable groups are involved:

E. ARTIN, Math. Ann. 1923
R. DEDEKIND, Crelle 1900
R. BRAUER, Am. J. of Math. 1947
R. VAN DER WAALL, Crelle 1974

Finally I would like to mention that Mr. UCHIDA in Japan found the same result also in january 1974. He published his result (and his proof is almost the same as mine) in the Tokyo Journal, May 1975. Therefore this is an independent discovery.

Robert W. VAN DER Waall
(Nijmegen).

Euclid's algorithm in cyclotomic fields. – It is proved that for $m = 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 15$ and 20 the usual norm map is a Euclidean algorithm on the ring $\mathbb{Z}[\zeta_m]$; here ζ_m denotes a primitive m-th root of unity. The proof relies on an old idea originally due to Gauss (Werke, II, p. 395) and Cauchy (Oeuvres Complètes, 1. Ser, X, pp. 240–254) and recently rediscovered by Cassels (Crelle 238 (1969), 112–131). Details will be published in the Journal of the London Mathematical Society.

H. W. LENSTRA, JR. (AMSTERDAM).

Stable Fields

Def: A finitely generated regular field extension F/K is said to be stable, if there exists a seperating transcendence base $\underline{t}$ such that the Galois closure $\hat{F}$ of $F/K(\underline{t})$ is regular over K. The base $\underline{t}$ is said to be a ~~sep~~ stabilizing base.
A field K is said to be stable if every finitely generated regular extension F of K is stable.
A field K is said to be PAC, if every absolutely irreducible variety V defined over K has a K-rational point.
Theorem A: Every PAC field is stable.
Theorem B: Every field of characteristic 0 is stable.
Application of Theorem A: Let K be a denumerable hilbertian field with a valuation v. Let e be a positive integer. Then almost all $(\underline{\sigma}) \in G(K_s/K)^e$ has the following property: For every extension w of v to $\tilde{K}$ and for every absolutely irreducible variety V defined over $\tilde{K}(\underline{\sigma})$, the set $V(\tilde{K}(\underline{\sigma}))$ is w-dense in $V(\tilde{K})$.
Application of Theorem B: Let K be a denumerable hilbertian field of characteristic 0. Then K has a normal extension N with the following properties

1) $G(N/K) \cong \prod G_i$, where the G_i ~~is~~ are finite groups.
2) N is a PAC field.
3) N does not contain any field of the form $\tilde{K}(\underline{\sigma})$ with $(\underline{\sigma}) \in G(\tilde{K}/K)^e$.

W.D. Geyer showed after the lecture that N can be constructed so as also to be hilbertian, thus solving an open problem.
Sketch of the proof of Theorem B: 1) It suffices to find, for a given extension F/K as above, a seperating transcendence base $\underline{t}$ such that $[F:K(\underline{t})] = n$ and $G(\tilde{K}\hat{F}/\tilde{K}(\underline{t})) \cong S_n$.
2) It suffices to prove the Theorem for $\dim_K F = 1$
3) Suppose that $\dim_K F = 1$ and $t \in F$ is a sep. transcendence element. t is a stablizing element if every prime divisor p of

$\tilde{K}(t)/\tilde{K}$ that ramifies in $\tilde{K}F$ decompose there in the form $\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_1 + \cdots + \mathfrak{O}_{n-2} + 2\mathfrak{O}_{n-1}$.

3) ~~AAK bass~~ If char $K = 0$, then F/K has a node projective model $\Gamma \in \mathbb{P}^2$.

4) If $\deg \Gamma = n$, then there exists a K-rat. point $O \in \mathbb{P}^2 - \Gamma$ such that every line through O cuts Γ in at least $n-1$ points

5) The stereographic projection from O on $\mathbb{P}^1$ maps a generic point $\mathfrak{P}$ of Γ onto a generic point ~~O~~ Q of $\mathbb{P}^1$. $K(Q) = t$ and t is a stabilizing element of F/K.

Moshe Jarden, Tel-Aviv.

Isomorphisms of Formal Groups, formal moduli and operations in BP cohomology

1. The problem.

Let $\mathbb{Z}[V;T]$ be short for $\mathbb{Z}[V_1, V_2, \ldots; T_1, T_2, \ldots]$. (Choose a prime number p) The elements $m_i, \bar{m}_i$ in $\mathbb{Q}[V;T]$ are defined by the formulae

$$m_0 = 1 = \bar{m}_0, \quad m_n = m_{n-1}\frac{V_1^{p^{n-1}}}{p} + \cdots + m_1\frac{V_{n-1}^p}{p} + \frac{V_n}{p}, \quad \bar{m}_n = \sum_{i=0}^{n} m_i T_{n-i}^{p^i}$$

Now define $\bar{V}_i \in \mathbb{Q}[V;T]$ by the requirement that

$$\bar{m}_n = \bar{m}_{n-1}\frac{\bar{V}_1^{p^{n-1}}}{p} + \cdots + \bar{m}_1\frac{\bar{V}_{n-1}^p}{p} + \frac{\bar{V}_n}{p}$$

Miracle (Witt type): the $\bar{V}_i$ are polynomials with integral coefficients in $V_1, \ldots, V_i, T_1, \ldots, T_i$

Problem. Calculate the polynomials $\bar{V}_i$.

2. A recursion and a congruence formula

Define polynomials $U_s, W_{s,\ell}, Y_s$ in variables $V_1, V_2, \ldots; T_1, T_2, \ldots; S_1, S_2, \ldots$ as follows

$$Y_r = (V_1 T_{r-1}^p - T_{r-1} S_1^{p^{r-1}}) + \cdots + (V_{r-1} T_1^{p^{r-1}} - T_1 S_{r-1}^p)$$

$$U_1 = V_1, \quad U_s = \sum_{k=1}^{s-1} V_k W_{s-k,k} + Y_s + V_s$$

$$W_{s,\ell} = p^{-1}\left(U_s^{(p^\ell)} - (U_s + pT_s)^{p^\ell}\right)$$

where $U_s^{(p^\ell)}$ means the polynomial obtained from U_s by replacing all indeterminates with their p^ℓ-th powers. Then if $\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_s$ are known, we have

$$\bar{V}_{s+1} = \bar{U}_{s+1} + pT_{s+1}$$

where $\bar{U}_{s+1}$ is obtained from U_{s+1} by substituting $\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_s$ for $S_1, \ldots, S_s$

Using this one can prove that modulo $(T_1, T_2, \ldots)^2$ we have

$$\overline{V}_n \equiv \sum_{(s_1,\dots,s_t,i,j)} (-1)^t \left(V_{s_1} V_{n-s_1}^{p^{s_1}-1} p^{s_1-1}\right) \cdots \left(V_{s_t} V_{n-s_1-\dots-s_{t-1}}^{p^{s_t}-1} p^{s_t-1}\right)\left(-T_i V_j^{p^i}\right) +$$

$$+ \sum_{(s_1,\dots,s_t,i)} (-1)^t \left(V_{s_1} V_{n-s_1}^{p^{s_1}-1} p^{s_1-1}\right) \cdots \left(V_{s_t} V_{n-s_1-\dots-s_{t-1}}^{p^{s_t-1}} p^{s_t-1}\right)\left(p T_i\right)$$

$$+ V_n$$

where the first sum is over all sequences $(s_1,\dots,s_t,i,j)$, $s_k \in \mathbb{N}$, $i,j \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ such that $s_1+\dots+s_t+i+j=n$ and the second sum is over all sequences $(s_1,\dots,s_t,i)$ $s_k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $s_1+\dots+s_t+i=n$.

3 Applications to formal groups

Define $f_V(X) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i X^{p^i}$, $f_{V,T}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{m}_i X^{p^i}$, $\alpha_{V,T}(X) = f_{V,T}^{-1}(f_V(X))$. Then $f_V(X)$ is the logarithm of a p-typically universal formal group and $\alpha_{V,T}(X)$ is a universal isomorphism between p-typical formal groups. Now $f_{V,T}(X) = f_{\overline{V}}(X)$, so that $V_i \mapsto \overline{V}_i$ represents a universal way of ~~ob~~ describing isomorphisms between p-typical formal groups. Using this and the results of 2 above one obtains

A) A new proof of Lazard's classification theorem for ~~for~~ one dimensional formal groups over an algebraically closed field

B) A New proof of the Lubin-Tate formal moduli theorem

4 Applications to BP cohomology

~~The right mod.~~ $BP_*(pt) = \mathbb{Z}_{(p)}[V_1, V_2, \dots]$, $\dim V_i = 2(p^i-1)$. $BP_*(BP) = BP_*(pt)[T_1, T_2, \dots]$. $BP_*(BP)$ is also a right $BP_*(pt)$ module via the map $\eta_R: BP_*(pt) \to BP_*(BP)$, $V_i \longmapsto \overline{V}_i$. The cohomology operations of BP cohomology can be described as continuous $BP_*(pt)$ homomorphisms $BP_*(BP) \to BP_*(pt)$. To find out what they do to elements of $BP_*(pt)$: compose with η_R. Let $E = (n_1, n_2, \dots)$ be a sequence of elements in $\mathbb{N}$, almost all zero. The cohomology operation r_E is defined as $r_E(V_i)$ = coefficient of T^E in $\overline{V}_i$. Using the results of 2 above one can calculate $r_{\Delta_i}(V_n)$, $\Delta_i = (0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)$ and give congruence relations for $r_E(\Delta_n)$ mod $(p^{p+1}, V_1, \dots, V_{i-1})$ for $\|E\| \geq p^n - p^i$, where $\|E\| = n_1(p-1) + n_2(p^2-1) + \dots$

5. References Reports 7119, 7201, 7502, 7513, 7514 Econometric Institute, Erasmus Univ. of Rotterdam

Michiel Hazewinkel, Rotterdam

Gauss-Dirichlet Class Number Formulae, for Imaginary Quadratic Fields.

The object is to give elementary (and simple) proofs of the class-number formulae

(1) $(2-\chi(2))h = \sum \chi(a), \qquad (0 < a < \frac{|d|}{2})$

where $d<0$, h and χ are the discriminant, the class number, and quadratic character of the field $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, respectively. B.A. Wenkov (Math. Z. (1933)) succeeded in giving proofs of (1) for the cases $d \not\equiv 1 \pmod 8$ using continued fractions and Gauss' results on the representations of binary quadratic forms by the ternary form $X^2+Y^2+Z^2$. However, the continued fractions arguments are quite involved. By using the quaternion algebra $\mathbb{Q}(-1,-1)$ and attaching certain (finite) sequences from $SL(2,\mathbb{Z})$ to each a in (1), Wenkov's arguments are considerably simplified.

~~Any~~ maximal order in $\mathbb{Q}(-1,-1)$ is a (non-commutative) principal ideal domain; and this is true of four other generalized, positive-definite, quaternion algebras. By applying similar techniques to one of these, namely $\mathbb{Q}(-1,-3)$, it can be shown that for primes $m \equiv 7 \pmod{12}$, one has

$$(2-\chi(2))h = \sum \chi(a) \qquad \left(\frac{m}{6} < a < \frac{m}{3}\right)$$

where h is the class number of $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$.

M. Davis.

Eine Bemerkung über kubische Einheiten

Sei K ein nicht-galoisscher kubischer Zahlkörper, $\Omega = \mathbb{Q}(\sqrt{D_K})$ und $L = K\Omega$ die galoissche Hülle von K; dann ist $a = [E_L : E_K E_{K'} E_\Omega] \in \{1, 3, 9\}$ (K' ein zu K konj. Körper).

Theorem 1: Ist $D_K < 0$ und $\varepsilon > 1$ die Grundeinheit von K, so ist $a = 1$ oder 3 je nachdem, ob die Gleichung $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \varsigma^j \gamma^3$ ($j = 0, 1, 2$, $\gamma \in L$) nicht lösbar oder lösbar ist; die Gleichung ist lösbar mit $j = 0$ genau dann, wenn die Gleichung $m\varepsilon = \beta^3$ ($m \in \mathbb{Q}$, $\beta \in K$) lösbar ist.

Damit können Probleme von COHN (1972) und BERWICK (1933) abschließend behandelt werden. Im reellen Fall gilt ein ähnliches Kriterium; auch hier kann mit Ausnahme der Berechnung von $[N_{L/\Omega} E_L : E_\Omega^3]$ die Entscheidung zu $a = 1, 3$ oder 9 bereits durch Rechnungen in K entschieden werden.

Die von Scholz 1933 entdeckten Zusammenhänge zwischen Einheitenindex und Struktur der Divisorenklassengruppe von L sowie die Resultate von CALLAHAN (Mathematika 1974) lassen sich auf den Fall eines Diederkörpers vom Grade $2p$ (p prim) über $\mathbb{Q}$ verallgemeinern.

F. Halter-Koch

Zum 1. Fall der Fermatschen Vermutung

Sei p eine Primzahl, $p>3$ und b_p der "Irregularitätsindex" von p (d.h. die Anzahl derjenigen Bernoullischen Zahlen B_i, $i=2,4,\dots,p-3$, für die $B_i \equiv 0 \bmod p$ ist).

Satz: $\exists\, x,y,z \in \mathbb{Z},\ p \nmid xyz,\ x^p+y^p=z^p \Rightarrow b_p > \sqrt{p}-2$.

Zum Beweis darf O.B.d.A angenommen werden, daß x,y,z paarweise teilerfremd sind und $x \not\equiv y \bmod p$ ist. Man betrachtet im p-ten Kreiskörper $\mathbb{Q}(\zeta)$ (ζ eine primitive p-te Einheitswurzel) die Elemente

$$\alpha_i = \frac{x+\zeta^i y}{x+y} \qquad (i=1,2,\dots,p-1)$$

und in $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ die durch die $\log \frac{\alpha_i}{\alpha_{-i}}$ erzeugte additive Untergruppe A, von der man zeigt:

$$\sqrt{p}-2 < \dim_{\mathbb{F}_p} A/pA \le b_p .$$

Die 1. Ungl. ergibt sich aus einer Rechnung von M. Eichler: Eine Bemerkung zur Fermatschen Vermutung, Acta arithm. 11, 1965; die 2. Ungl. folgt aus dem Kummerschen Kriterium (von dem mit Hilfe einer expliziten Formel zum Reziprozitätsgesetz ein einfacher Beweis gegeben wurde) und einem Satz über die Kummerschen logarithmischen Differentialquotienten (H. Brückner: Zum 1. Fall der Fermatschen Vermutung, Crelles J. 274/275, 1975).

Helmut Brückner, Hamburg

A Brief Survey on Fermat's Last Theorem.

I told some of the old, not so old and even recent results concerning Fermat's last theorem, but alas, it is not yet proved — only up to 58150 (or in the first case up to 3×10^9).

Paulo Ribenboim

Lösbare Gleichungen $ax^n - by^n = c$ und Grundeinheiten für einige algebraische Zahlkörper vom Grade $n = 3, 4, 6$

Es sei $m = D^n \pm cd$ mit $n, d, D \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$, $c = \begin{cases} 1 \text{ oder } p & \text{für } n = p^\nu \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ (p prim), ferner $\omega = \sqrt[n]{m}$, $K_n = \mathbb{Q}(\omega)$.
Dann gilt nach Bernstein, Hasse, Halter-Koch und Stender der

<u>Satz</u>: $d \mid D^{n-1}$ (o.B.d.A. $p^n \nmid d$) $\Rightarrow E = \left\{ \varepsilon_k = \frac{\omega^k - D^k}{(\omega - D)^k} \mid k \mid n,\ k \neq 1 \right\}$ ist ein <u>unabhängiges</u> Einheitensystem von K_n

Unter weiteren Voraussetzungen für m (m quadratfrei für $n=2$, m kubenfrei für $n=3$, $\frac{m}{d}$ quadratfrei für $n = 4, 6$) erweist sich E im Falle $n = 2, 3, 4, 6$ – von einigen Ausnahmen und Modifikationen abgesehen – als <u>Grundeinheitensystem</u> des Körpers K_n. (s. Journ. Numb. Theory 7 (1975)).
Man kann nun zeigen, daß es sich bei den Körpern K_n um solche Körper handelt, zu denen mindestens eine lösbare diophantische Gleichung der Form $ax^n - by^n = c$ „gehört". Hierdurch werden im Falle $n = 3, 4, 6$ insbesondere die von Delaunay, Nagell, Tartakowski und Ljunggren im Zusammenhang mit der Frage nach der Lösbarkeit der Gleichung erzielten einheitentheoretischen Ergebnisse auf K_n anwendbar. Daraus ergibt sich eine Neubegründung sowie eine erhebliche Ausdehnung der oben erwähnten Resultate. Es können u.a. explizit Grundeinheiten für alle Typen der nicht galoisschen Teilkörper von $L_8 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m}, i)$ $(i = \sqrt{-1})$ und $L_{12} = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{m}, \varsigma)$ (ς primitive 3-te Einh.-w.) angegeben werden. Zum Beispiel gilt für $n = 6$ der folgende

<u>Satz</u>: Es sei $A, B \in \mathbb{N}$ mit $A - B = 1$, $(A, B) \neq (5, 4)$. Dann gilt:

(a) A oder B quadratfrei $\Rightarrow \varepsilon_k = \frac{(\sqrt[6]{A})^k - (\sqrt[6]{B})^k}{(\sqrt[6]{A} - \sqrt[6]{B})^k}$ für $k \mid 6$
(A und B kein Quadrat, Kubus)*) sind Grundeinheiten von $K_6 = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{AB^5})$

(b) A oder B kubenfrei $\Longrightarrow$ $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[6]{-27AB} - \sqrt[3]{B}}{\sqrt[3]{A} - \sqrt[6]{-27AB} - \sqrt[3]{B}}$, $\lambda_2 = \frac{1}{A}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[6]{-27AB} - \sqrt[3]{B}\right)^3$
(A und B keine Kuben)*) sind Grundeinheiten von $K_6 = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{-27AB^5})$.

*) Sind die Bedingungen ( ) nicht erfüllt, müssen aus ξ_0 bzw. λ_2 entsprechende Wurzeln gezogen werden.

Hans-Joachim Stender (Köln)

Potenzreste

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ und $P(a,n)$ die Menge aller Primzahlen p, für die die Kongruenz $X^n \equiv a \pmod p$ wenigstens eine Lösung besitzt. Bekanntlich läßt sich $P(a,n)$ durch Restklassen beschreiben, falls der Zerfällungskörper von $X^n - a$ abelsch ist. Trost gibt an, wann $X^n \equiv a \pmod p$ für alle Primzahlen p bis auf endlich viele Ausnahmen lösbar ist. Es wird die Frage untersucht, welche Eigenschaften a, b, n, m besitzen müssen, damit $P(a,n)$ und $P(b,m)$ bis auf endlich viele Ausnahmeprimzahlen übereinstimmen. Für den Spezialfall $n = m$ wird diese Frage in Arbeiten von Gerst und Schinzel beantwortet. Hier wird für den allgemeinen Fall ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angegeben und untersucht, ob sich hieraus für $n \neq m$ ebenso wie in dem von Gerst behandelten Fall $n = m$ Gegenbeispiele zur Vermutung von Kronecker ergeben.

Volker Schulze (Clausthal-Zellerfeld)

Kroneckerklassen algebraischer Zahlkörper

Es wird berichtet über die Ergebnisse von W. Jehne und eigene Beiträge zum Problem der Kronecker-Äquivalenz von Zahlkörpern. Zwei algebraische Zahlkörper heißen Kronecker-Äquivalent, wenn in ihnen (bis auf endlich viele Ausnahmen) dieselben Primideale von k einen Primteiler ersten Grades besitzen. Die Beziehung zwischen den Minimalkörpern einer

Kroneckerklasse mit zerfallender Galoisgruppe und lokal-trivialen eindimensionalen Kohomologieklassen wird dargestellt und dann benutzt, um zu zeigen, daß die endliche Zahl nicht-konjugierter Minimalkörper einer Kroneckerklasse beliebig groß werden kann. Darüberhinaus kann man zeigen, daß sehr viele Kroneckerklassen unendlich sind, genauer: Hat die Erweiterung $K|k$ entweder

a) einen Automorphismus einer Ordnung l mit $l \neq 1$ ungerade oder $l = p^m - 1$ (p Primzahl, $m \geq 2$) oder

b) eine Automorphismengruppe G der Ordnung 8, die zyklisch ist oder die Quaternionengruppe, so existieren unendlich viele zyklische Erweiterungen $L_i|K$, so daß L_i zu K über k Kroneckeräquivalent ist. Diese Resultate gelten nicht für galoissche Erweiterungen $K|k$ vom Grad 2 oder 4. Für "quadratische" Kroneckerklassen gilt der folgende

Satz: Ist $L|k$ quadratisch, K und L Kroneckeräquivalent, ~~und~~ $K \neq L$ und o.E. $K|L$ ohne echte Zwischenkörper. Dann ist die Galoisgruppe $G(\tilde{K}|k)$ der galoisschen Hülle $\tilde{K}$ von $K|k$ eine Automorphismengruppe einer nicht-abelschen einfachen Gruppe N, welche die inneren Automorphismen von N enthält. N ist der einzige minimale Normalteiler von $G(\tilde{K}|L)$. Es gilt: $N \neq PSL(2,p^\nu)$ und $N \neq \mathfrak{A}_n$ ($\nu \in \mathbb{N}$, p Primz., $n \geq 5$).

Dieser Satz wird gewonnen im Rahmen allgemeinerer Untersuchungen atomarer Kroneckerklassen $\mathfrak{K}$, d.h. $\mathfrak{K} \ni K$ mit $K|k$ hat keine Zwischenkörper. Die atomaren Kroneckerklassen werden klassifiziert ("Baer-Klassifikation"), und es werden alle vier Typen über $\mathbb{Q}$ unendlich oft realisiert. Zwei der vier Typen werden genauer studiert, u.a. wird gezeigt, daß der sog. "Sockel" in diesem Fall nur aus Minimalkörpern besteht.

Norbert Klingen (Köln)

A generalization of a theorem by J.T. Tate.

Theorem (Tate). An elliptic curve $E/\mathbb{Q}$ has bad reduction at p for at least one rational prime p.

We proved the following generalization of this theorem:

Theorem. An elliptic curve E/K, where K is an imaginary quadratic number field, has bad reduction at $\wp$ for at least one prime ideal $\wp$ of O_K, the ring of integers in K, provided E/K has a global minimal Weierstrass equation.

Let (*) $y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ be a global minimal equation for E/K; then $a_i \in O_K$ and $v_\wp(\Delta)$ is minimal for each $\wp$ of O_K. Here Δ is the discriminant of Δ and $v_\wp$ denotes the $\wp$-adic valuation. Hence Δ is a unit, if we assume that E/K has good reduction at all $\wp$.

Introducing quantities:

$b_2=a_1^2+4a_2$; $b_4=a_1a_3+2a_4$; $b_6=a_3^2+4a_6$; $c_4=b_2^2-24b_4$; $c_6=-b_2^3+36b_2b_4-216b_6$

we have in particular that $c_4^3-c_6^2=2^6 3^3\Delta$. By solving the Diophantine equation (**) $X^3-Y^2=2^6 3^3\varepsilon$, where ε is a unit of K, we check whether such solutions come from an elliptic curve E/K; i.e. if $(x,y) \in O_K \times O_K$ solves (**), then $(x,y)=(c_4,c_6)$ for some values of c_4, c_6 in that case. Since each equation (**) has only finitely many solutions this method is succesful, provided one can solve (**) in all cases.

We distinguish between the cases: (1) $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, $m \neq 1$ or 3 and (2) $K=\mathbb{Q}(i)$ or $K=\mathbb{Q}(\varsigma)$ with $\varsigma=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$. In case (1) we observe that if $(x,y) \in F(K)$, then $(\bar{x},\bar{y}) \in F(K)$ and hence $(x,y)+(\bar{x},\bar{y}) \in F(\mathbb{Q})$. Here $F(K)$ stands for the group of K-rational points on the elliptic curve F given by an equation (**). We know that $F(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2$ and this knowledge enables us to recover the point (x,y).

Case (2) proves much harder. In case $K=\mathbb{Q}(i)$ it is sufficient to consider (**) with $\varepsilon=-i$ and when $K=\mathbb{Q}(\rho)$ we consider (**) with $\varepsilon=\pm\rho$. Factorization in a quadratic extension of K respectively a cubic extension of K gives after lengthy calculations the required answer. Another method that can be used in this case is the following: the two fields in question have the property, that every elliptic curve E/K having good reduction everywhere, has a point of order 2 defined over K. This can be proved by means of class field theory. The diophantine problem now becomes much more simple. In fact, E/K has an equation $y^2=x^3+a_2x^2+a_4x$, $a_i\in\mathcal{O}_K$, $\Delta=\varepsilon 2^{12}$; thus

$$a_4^2(a_2^2-4a_4)=\varepsilon 2^8.$$

This last equation is very easy to solve.

We also give examples to show that the requirement: "E/K has a global minimal equation", cannot be missed out.

R.J. Stroeker (Rotterdam)

On a Conjecture of Brandler

Notation: $m\equiv 1\ (8)$ prime

ε: fundamental unit of $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$

p: odd prime with $\left(\frac{-1}{p}\right)=\left(\frac{m}{p}\right)=1$

$\mathfrak{p},\hat{\mathfrak{p}}$ prime divisors of p in $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ respectively.

h: class number of $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$

<u>Theorem</u>: The quadratic character

$$\left[\mathcal{E}/\mathfrak{p}\right] = 1 \iff \hat{\mathfrak{p}}^{h/4} \text{ is a principal}$$

ideal in $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$.

This corrects conjecture of Brandler which appeared in J. of No. Theory (1973).

Charles J. Parry (Blacksburg)

<u>On the Néron–Tate height for an elliptic curve over a global field</u>. Néron (1965) and Tate (1964) proved the following <u>theorem</u>: Let A denote an abelian variety over a global field K and $\varphi : A \to \mathbb{P}_m$ be a K-morphism into a projective space. Then there is a quadratic form q and a linear form l on the group ~~$\mathcal{E}_K$~~ A_K of rational points of A over K such that the height h on A_K (relative to φ) is equivalent to $q+l$. The question to be dealt with here is that of how to estimate the difference $h-(q+l)$ in the case of an elliptic curve $A = \mathcal{C}$ over K. Suppose that K has a proper set M_K of absolute values v satisfying the sum formula with multiplicities $\lambda_v \in \mathbb{R}$, $\lambda_v > 0$. If the curve is given by a Weierstraß equation (let char $K \neq 2, 3$) $Y^2 = X^3 + aX + b$ put $\mu_v = \min\left(\frac{1}{2}v(a), \frac{1}{3}v(b)\right)$ for each $v \in M_K$ and $\nu_v = \min(0, \mu_v)$ for each $v \in M_K$. Set $-\mu = \sum_{v \in M_K} \lambda_v \mu_v$, $-\nu = \sum_{v \in M_K} \lambda_v \nu_v$ and $-\alpha = \sum_{v \in M_K} \lambda_v \alpha_v$, where $\alpha_v = 0$ if v is (non-)archimedean and $\alpha_v = -\log 2$ if v is archimedean. Define the Néron–Tate height $(q :=)$ $\hat{h}$ on $\mathcal{C}_K$ by $\hat{h}(P) = \lim_{n \to \infty} \frac{h(2^n P)}{2^{2n}}$. Then $\hat{h}$ is a quadratic form. Take $l(P) = 0 \ \forall P \in \mathcal{C}_K$. We then get the estimate

$$-\frac{1}{2}(3\nu+7\alpha) \leq h(P)-\hat{h}(P) \leq 3\nu+4\alpha \text{ for } P\in \mathcal{C}_K.$$

This result gives at the same time a simple proof of the above-mentioned theorem of Néron and Tate in the special case considered.

Horst G. Zimmer (Saarbrücken)

Ähnlichkeiten von quadratischen Formen über $\mathbb{Z}$, und Hecke-Operatoren.

$F_1,\dots, F_H$ seien die Matrizen eines Systems von definiten quaternären quadratischen Formen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, der Diskriminante $|F_i| = d$ = Körperdiskriminante, welche alle Formenklassen repräsentieren. Es wird vorausgesetzt, dass die Formen nur gerade Zahlen darstellen. Es bedeute $c_i(m)$ die Anzahl der Darstellungen von $2m$ durch F_i und $p_{ij}(m)$ die Anzahl der ganzzahligen Substitutionen $X^t F_i X = m F_j$, dividiert durch die Einheitenanzahl von F_j. Es werden die Thetareihen

$$\vartheta(z) = (\vartheta_i(z)) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_i(m) e^{2\pi i m z}\right)$$

gebildet und in einem Vektor von H Komponenten angeordnet. Mit den H-reihigen Matrizen $P(m) = (p_{ij}(m))$ gelten folgende Formeln:

$$\vartheta(z)\,\frac{1}{2}\,P(p) = \vartheta(z)\,T(p) \qquad \text{für } \left(\frac{d}{p}\right)=1,$$

$$\vartheta(z)\,P(p^2) = \vartheta(z)\left(T(p^2)+Ip\right) \qquad \text{für } \left(\frac{d}{p}\right)=-1,$$

wenn $T(p)$ bzw. $T(p^2)$ den Hecke-Operator und I die Identität bedeutet.

Die Transformationen $X^t F_i X = m F_j$ und speziell diejenigen mit $i=j$ lassen sich in der 2. Cliffordschen Algebra darstellen. Diese ist die nur im Unendlichen verzweigte Quaternionen-Algebra K über dem reellen

Zahlkörper $k = Q(\sqrt{d})$. Es wird vorausgesetzt, dass k die Idealklassenzahl 1 habe. Dann gehört zu den verschiedenen Idealklassen die H-reihige Matrix

$$\Theta(z_1, z_2) = \sum_{\mu \geqq 0} B(\mu)\, e^{2\pi i(\mu z_1 + \mu' z_2)},$$

wo μ alle total positiven Zahlen und 0 durchläuft und $\mu \to \mu'$ der nicht-identische Automorphismus von k/Q ist. ~~Es ist leicht zu~~ Die als Koeffizienten auftretenden Matrizen sind die Anzahlen der ganzen Ideale der Normen μ in den Klassen, welche den Indexpaaren ij zugeordnet werden können. $\Theta(z_1, z_2)$ besteht aus Modulformen zur Hilbertschen Modulgruppe, und die $B(\mu)$ liefern eine Darstellung der Hecke-Operatoren für diese.

Ferner gilt

$$B(\pi) = B(\pi') = \frac{1}{2} P(p) \qquad \text{für } (\pi)(\pi') = (p)$$

und

$$B(p) = P(p^2) \qquad \text{falls } (p) \text{ ein Primideal ist.}$$

Der oben und hier erwähnte Zusammenhang mit den Hecke-Operatoren lässt sich folgendermassen formulieren.

Sei $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{2\pi i n z}$ eine Spitzenform zu $\Gamma_0(d)$ vom Charakter $\left(\frac{d}{n}\right)$ und Gewicht 2, welche sich als eine Linearkombination von den Thetareihen $\vartheta_i(z)$ darstellen lässt, und welche eine Eigenfunktion der Hecke-Operatoren ist. Weiter sei

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^{-s}$$

die zugeordnete Dirichletreihe. Dann ist

$$F(s) = f(s)\bar{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n n^{-s}$$

die Dirichletreihe zu einer Spitzenform

$$\Phi(z_1, z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n e^{2\pi i n(z_1 + z_2)}$$

zur Hilbertschen Modulgruppe, welche sich als eine Linear-kombination der Koeffizienten der Funktion $\Theta(z_1, z_2)$ darstellen lässt, und welche eine Eigenfunktion der Hecke-Operatoren zur Hilbertschen Modulgruppe ist.

Dieser Satz wurde 1969 von Doi und Naganuma für allgemeinere Modulformen bewiesen, falls in k der Euklidische Algorithmus gilt. Vermutlich lassen sich aber alle Modulformen als Linear-kombinationen von Thetareihen darstellen.

Die Zusammenhänge lassen sich auf die verallgemeinerten Thetareihen im Sinne von Schoeneberg übertragen.

14. August. M. Eichler – Basel.

Potenzsummen in Körpern

In unendlichen Körpern einer von 2 verschiedenen Charakteristik werden Summen 2^n-ter Potenzen $(n \in \mathbb{N})$ untersucht. Dazu wird der Anordnungsbegriff verallgemeinert, außerdem wird die Theorie Krullscher Bewertungen herangezogen. Eine Teilmenge $T \subset K$ heißt Präordnung n-ter Stufe, wenn folgendes erfüllt ist: $K^{2^n} \subset T$, $T \neq K$, $T+T \subset T$, $TT \subset T$; maximale Präordnungen heißen Ordnungen n-ter Stufe. Sei $Q_n = \{ \sum x_i^{2^n} \mid x_i \in K \}$.

Satz 1 $\quad Q_n = \bigcap\limits_{P \text{ Ord. } n\text{-ter Stufe}} P$; für $n = 1$ von Artin 1927 bewiesen. Der Übergang zur Bewertungstheorie liefert folgendes Lemma; dazu sei P Ordnung n-ter Stufe,

$$\mathcal{O} = \{ a \in K \mid \bigvee_{r \in \mathbb{Q}_+^\times} r \pm a \in P \}, \quad \mathcal{J} = \{ a \in K \mid \bigwedge_{r \in \mathbb{Q}_+^\times} r \pm a \in P \}$$

Lemma: 1.) $\mathfrak{o}$ ist Bewertungsring, $\mathfrak{p}$ max. Ideal von $\mathfrak{o}$

2.) $\bar{P} := \mathfrak{o} \cap P \bmod \mathfrak{p}$ ist Anordnung von $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$

3.) $[K^\times : P^\times] = 2\,[\Gamma : v(P^\times)]$

(v Bewertung zu $\mathfrak{o}$, Γ Wertegruppe)

4.) Explizite Konstruktion von P aus $\bar{P}$ und v.

Hieraus ergibt sich: Satz 2) 1.) Hat K Ordnung höherer Stufe, dann ist K formal-reell 2.) K nicht reell $\Rightarrow \bigwedge_n K = Q_n$

(zu 2. siehe auch Joly, Acta Arith. 17).

Satz 3.) Es sind äquivalent: 1.) jede Ordnung höherer Stufe ist Anordnung 2.) jede Bewertung v mit formal-reellem Restklassenkörper hat 2-teilbare Wertegruppe 3.) $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q_{n+1} = \dots$ 4.) ex $n < m$: $Q_n = Q_m$.

Korollar: K sei algebraische Erweiterung eines Körpers mit genau einer Anordnung, dann gilt in K: $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q_{n+1} = \dots$.

Satz 4.) Sei $\# K = \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$. Zu $x_1, \dots, x_r \in K$ gibt es $y_1, \dots, y_s \in K$ mit:

$$(x_1^{2^n} + \dots + x_r^{2^n})^{2^m} = y_1^{2^{n+m}} + \dots + y_s^{2^{n+m}}.$$

In gewisser Weise ergänzt Satz 4 eine von Hilbert (1909) bei seiner Lösung des Waringschen Problems gefundene Identität. Zum Beweis wird die Fortsetzung von Ordnungen höherer Stufe mit Hilfe der Bewertungstheorie aufgrund des obigen Lemmas studiert.

Eberhard Becker (Köln)

Local class field theory is easy

This talk consisted of an outline of the paper of the same title to appear in ~~[illegible]~~ Advances in Math 17 (1975).

Michiel Hazewinkel.

Über die Klassenzahlen der Ringklassenkörper über imaginär-quadratischen Zahlkörpern

Sei Ω Ringklassenkörper über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper Σ. Für solche Körper hat C. Meyer in seiner Dissertation eine Klassenzahlformel aufgestellt, die die Relativklassenzahl h_Ω / h_Σ mit gewissen Einheiten aus Ω in Beziehung setzt, die durch singuläre Werte von Modulfunktionen dargestellt werden. Durch Ausdeutung dieser Klassenzahlformel nach der Methode, die Hasse und Leopoldt im Fall der Kreiskörper angewendet haben, erhält man hier Teilbarkeitsaussagen folgender Art.

1) $N_\Omega \dfrac{h_\Omega}{h_\Sigma} \in \mathbb{N}$ mit $N_\Omega \in \mathbb{N}$ und $N_\Omega \mid (24[\Omega:\Sigma])^\mu$, $\mu \in \mathbb{N}$,

2) $\Omega \supseteq \Omega_i \supseteq \Sigma$; $i = 1, \dots, e$; $\Omega_i \cap \Omega_j = \Sigma$ $i \neq j$; $\Longrightarrow$

$$N_\Omega \frac{h_\Omega}{h_\Sigma} = m \prod_{i=1}^{e} N_{\Omega_i} \frac{h_{\Omega_i}}{h_\Sigma} ; \quad m \in \mathbb{N}.$$

Für Teilkörper K von Ω welche den Grundkörper Σ nicht enthalten lassen sich analoge Aussagen für die Relativklassenzahlen h_K / h_{K_0} herleiten, wobei h_{K_0} die Klassenzahl des maximal absolut abelschen Teilkörpers von K bedeutet.

Reinhard Schertz (Köln)

Harmonische Analyse und Darstellungstheorie topologischer Gruppen (17 bis 23. 8 1975)

Square root of the Poisson kernel and Kunze-Stein property.

Let G be a semi-simple not compact Lie group, connected with finite center, and $G = KAN = K\bar{A}_+K$ Iwasawa and Cartan decompositions of G. Let M be the centralizer of A in K. Let $B = K/M \simeq G/MAN$ the Furstenberg boundary of the symmetric space $X = G/K$. The Poisson kernel $P(x,b)$ is the function defined on $X \times B$ by $P(gK, kM) = e^{-2\rho(H(g^{-1}k))}$, where $2\rho = \Sigma$ restricted positive roots, and where $\exp[H(\cdot)]$ is the component of $\cdot$ in A for $G = KAN$.

If $f \in L^2(B, dk_M)$, the function $F = \sqrt{P} *_B f$, i.e.

$$F(gK) = \int_B P^{1/2}(gK, b) f(b)\, db$$

is the coefficient $(\pi(g)1 \mid \bar{f})_{L^2(B)}$ of the quasi-regular representation π of G in $L^2(G/MAN)$.

Theorem. For every $q > 2$, $\sqrt{P} *_B L^2(B) \subset L^q(X)$.

(cf. N. Lohoué and P. Eymard, Annales Sc. de l'E.N.S., t. 8., 1975, pp 179-188).

The proof remains essentially on an estimation of $\|P((\exp H)K, \cdot)\|_{\mu}$ when $H \to \infty$, and ~~as~~ applying in the right place the interpolation theorem of Marcinkiewicz.

Corollary. If $1 \leq p < 2$, if $h \in L^p(G)$ is right-K-invariant then $h *_G L^2(G) \subset L^2(G)$.

It is conjectured (Kunze-Stein) that this assertion is true without the hypothesis of K-invariance

(Pierre EYMARD, Nancy).

An approach to some Fourier multiplier criteria

Sufficient conditions for radial functions $e(|v|)$, $v \in \mathbb{R}^n$, (or $e(|v|^2)$) to belong to $[L^r(\mathbb{R}^n)]^\wedge \subseteq M_p^q$, $r \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$, $p \geq 1$, and improvements of Marcinkiewicz type in case $1 < p \leq q < \infty$ are derived by the following method: One considers $e(t)$ on $(0,\infty)$ and represents it as an $(\alpha+1)$-th integral of its $(\alpha+1)$-th derivative, $\alpha \geq 0$. The kernel of the resulting integral is essentially the Fourier transform of the dilated (Bochner-) Riesz kernel of order $\alpha \geq 0$. Therefore, the problem to decide if $e(|v|)$ (or $e(|v|^2)$) is a multiplier or not (under sufficient smoothness conditions upon $e(t)$) is reduced to a discussion of the (Bochner-) Riesz kernel. In essential, this idea is already contained in the convexity theorem (Pólya's condition) or in the quasi-convexity theorem (see A. Beurling, Neuv. Congrès Math. Scand, Helsingfors 1938, pp. 345–366).

(Walter Trebels, Darmstadt)

Harmonic analysis on hyperboloids

In a note of 1968 Molcanov introduced the spherical functions for the homogeneous space $O(p,q)/O(p,q-1) = G/H$. The subgroup H is not compact so that these spherical functions are in fact distributions. In this talk we study the case $p=1$.

There is on G/H an invariant pseudo-riemannian structure. We define the spherical functions as eigendistributions of the pseudo Laplace Beltrami operator, invariant by H. For these functions we give an integral representation of Laplace type. We determine the positive definite spherical functions, and we prove an analogue of the theorem of Bochner, i.e. an integral representation of the positive definite distributions on G, biinvariant by H.

(Jacques Faraut, Tunis)

Zeta functions of Selberg's type.

Let G be a connected semisimple Lie group with finite center, K a maximal compact subgroup of G, Γ a discrete torsion-free subgroup of G such that $\Gamma\backslash G$ is compact. Let T be a finite-dimensional ~~irreducible~~ representation of Γ with character χ. Assuming that $\operatorname{rank}(G/K) = 1$, we show how one can construct a zeta function $Z_\Gamma(s, \chi)$ of a complex variable s. This function is holomorphic in a suitable half-plane, and has a meromorphic continuation to the whole plane. It satisfies a functional equation in which the Harish-Chandra c-function of G/K plays a role. The zeroes and poles of Z_Γ give us information about the spectral decomposition of ~~$L_2(\Gamma\backslash G)$ and the topology of the manifold $\Gamma\backslash G/K$. In particular one can construct examples of Γ for which $L_2(\Gamma\backslash G)$ can~~ the representation of G induced from T, as well as the topology of the manifold $\Gamma\backslash G/K$. In particular, one can construct examples of Γ, χ, such that the representation of G induced from χ contains non-trivial representations of the spherical non-tempered (complementary) series. These results were obtained by Selberg for $G = SL(2,\mathbb{R})$ in J. Ind. Math. Soc. (1956).

Ramesh Gangolli (Seattle).

Bessel functions and invariant theory.

A general theorem is proved which determines the invariants for the restriction of an irreducible holomorphic representation λ of a complex classical group G to a classical subgroup L of sufficiently large dimension. This theorem is then used to identify certain irreducible components of metaplectic (Shale-Weil) representations with discrete series representations of $Sp(n,\mathbb{R})$, $U(n,n)$, and $O^*(4n)$.

Roy C. Kunze (Irvine)

Harmonic Analysis and Differential Equations on Symmetric Spaces.

For a symmetric space $X = G/K$ of the noncompact type the Fourier transform

$$\tilde{f}(\lambda, b) = \int_X f(x)\, e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))}\, dx$$

as defined in Bull. Amer. Math. Soc. 1965 is discussed in some detail, and used to prove, for each G-invariant differential operator D on X, the existence theorems

$$D C^\infty(X) = C^\infty(X)$$
$$D \mathcal{S}'(X) = \mathcal{S}'(X)$$
$$D \mathcal{D}_0'(X) = \mathcal{D}_0'(X)$$

where $\mathcal{S}'(X)$ is the space of tempered distributions on X and $\mathcal{D}_0'(X)$ the set of K-finite distributions on X. The proofs, which proceed via suitable Paley-Wiener type theorems for the Fourier transform $f(x) \to \tilde{f}(\lambda, b)$, make use of Harish-Chandra's expansion theorems for Eisenstein integrals, and some results from Kostant's work on the spherical principal series.

Sigurdur Helgason (Cambridge).

Symmetry in Fourier-Stieltjes algebras

We consider the Fourier-Stieltjes algebra $B(G)$ of linear combinations of positive definite functions on a locally compact group G. Motivated by the results of Hewitt and Kakutani for the measure algebra of an lca group, we ask whether or not $B(G)$ is a symmetric Banach $*$ algebra. We outline a proof of the following result. (due to me and M. Mislove)

Theorem Let G be a compact extension of an abelian group

(a) If G is a connected Lie group, $B(G)$ is symmetric $\Leftrightarrow$ $G = V \times_\eta K$, where V is a vector group, K is a compact group, and V has no nonzero K-fixed points.

(b) If G is almost connected, $B(G)$ is symmetric iff G is the projective limit of Lie groups, each of which has a connected component of the form in (a).

(c) If G is compactly generated or Lie and $B(G)$ is symmetric, G is almost connected.

Two examples are mentioned to explain "compactly generated or Lie" in (c). An example of a noncommutative Hewitt-Kakutani phenomenon is mentioned. Finally we briefly discuss the relation of all this to Hopf W^* algebras

John Liukkonen (New Orleans)

Harmonic analysis and centers of Beurling algebras

The talk reports on joint work with John Liukkonen concerning the center $ZL^1_\omega(G)$, or more generally the algebra $Z^B L^1_\omega(G)$ of B-invariant functions, of the Beurling algebra $L^1_\omega(G)$, where G is a locally compact group, B is a group of automorphisms containing the inner automorphisms, and ω is a B-invariant weight function on G. The study is carried out first for the case that B is precompact. In this case we identify the maximal ideal space of $Z^B L^1_\omega(G)$ with a space of spherical functions. The spaces of spherical functions that can arise in this manner are parametrized by the B-invariant, continuous, homogeneous weight functions on G. As a corollary we obtain necessary and sufficient conditions that the spherical functions be positive-definite and in case ω is symmetric, that the involutive Banach algebra $Z^B L^1_\omega(G)$ be ~~positive definite~~ symmetric.

We give sufficient conditions for $Z^B L^1_\omega(G)$ to be regular and Tauberian, hence also for Wiener's condition to hold. Finally, assuming that G has precompact conjugacy classes, and that ω is symmetric but not necessarily central, we determine when $L^1_\omega(G)$ is symmetric.

Richard D. Mosak (Rochester)

A Class of Idempotent Measures on Compact Nilmanifolds

A convolution algebra of biinvariant Borel measures is introduced on compact homogeneous spaces possessing invariant probability measures & is related to the continuity-preserving bounded translation-invariant linear maps in the L^2-space. A Borel-structure isomorphism $\underset{\wedge}{F}$ is introduced between a nilmanifold $D\backslash N$ & a torus T^ℓ of the same dimension, carrying measures $\nu \in M(D\backslash N)$ into $\nu_F \in M(T^\ell)$ so that $\hat{\nu}_F(n) \underset{n}{\equiv} (\varphi_n * \nu)(De)$ where $(\varphi_n \circ F)(t) = \exp 2\pi i n \cdot t$.

These tools are used to classify those measures which can serve as convolution algebras mapping $L^2(D\backslash N)$ into the π-primary summand $\mathcal{H}_\pi$ of $L^2(D\backslash N)$ in terms of the representation theory of N and $\underset{\wedge}{\text{the}}$ structure of D. The intertwining operators in $\mathcal{H}_\pi$ are described as "well-defined left translations", and it is shown how to intertwine measures, and also projections.

Leonard F. Richardson (Baton Rouge)

Relations between automorphism groups of self-dual cones and symmetric domains

First I answer the question I mentioned here two years ago: Given two self-dual cones Ω and Ω' in real vector spaces U and U' and a linear map $\varphi: U \to U'$ inducing an equivariant map of Ω into Ω', does the complex extension $\varphi_{\mathbb{C}}: U_{\mathbb{C}} \to U'_{\mathbb{C}}$ induce also an equivariant map of the corresponding tube domain $\mathfrak{D} = U + i\Omega$ into $\mathfrak{D}' = U' + i\Omega'$? I show that this follows easily from the categorical equivalence between self-dual cones and formally real Jordan algebras and the explicit description of the Lie algebra of the holomorphic automorphism group $Hol(\mathfrak{D})$ in terms of the Jordan algebra U. Then, generalizing the situation, I report my recent result that among Siegel domains (of the second kind) the symmetric domains can be characterized by three conditions, and that similar question can be considered in a category of "quasi-symmetric domains" (defined by the first two conditions), which are determined essentially by a pair of a self-dual cone Ω and a "linear representation" of it, and hence can be classified completely (as done by Takeuchi).

Ichiro Satake (Berkeley, Calif.)

Neighbouring Type I von Neumann factors

It is proved that two type one von Neumann factors whose distance is less than one (in a sense defined by Kadison and Kastler) then they are isomorphic.

Carlo Cecchini (Genova, Italy)

Spherical functions on a real semisimple Lie groups as functions on a complex Lie group.

$G_{\mathbb{C}}$ a complex semisimple Lie group. G, resp. $\mathcal{U}$, is a non-compact, resp. compact real form. Let $G = KAN$ and $G_{\mathbb{C}} = \mathcal{U}A_1N_1$ be compatibel Iwasawa decompositions. Let δ be the Cartan involution on G. Let $K_{\mathbb{C}}$ be the complexification of K. The spherical functions corresponding to the pairs (G,K), and $(G_{\mathbb{C}},\mathcal{U})$, are resp.

$\varphi_\lambda, \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $\Phi_\mu, \mu \in (\mathfrak{a}_1)^*_{\mathbb{C}}$.

~~Theorem~~ Prop. 1. Define for $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ $\psi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(\sigma(x)^{-1}x)$, $x \in G$.

(i) ψ_λ has a unique extension to $\Psi_\lambda \in C^\infty(\mathcal{U}\backslash G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}})$.

(ii) $\Phi(g) = \int_{\mathcal{U}} \Psi_\lambda(xu)\,du$ is a spherical funkt. i.e. $\Phi = \Phi_{\mu_\lambda}$.

Recal that the spherical ~~functions~~ Fourier-Transform on $G_{\mathbb{C}}$ is rather simple, and the Plancherel measure is $\delta_\mu \, d\mu$ (δ_μ a polynomium). As a fairly simple consequence of this and prop. 1 we get

Theorem 1 If G is a normal real form, then the spherical Fourier-Transform satisfy the Paley-Wiener theorem, and the Plancherel measure is given by $\alpha(\lambda)d\lambda$. Where $\alpha(\lambda) = \delta_{\mu_\lambda} \int_{K_{\mathbb{C}}} \Phi_{\mu_\lambda}(h)\,dh$.

From Harish-Chandras Plancherel formula for (G,K) of cause one deduces that $\alpha(\lambda) = |c(\lambda)|^{-2}$.

Mogens Flensted-Jensen

Heat-diffusion semi-group and nilpotent Lie groups.

Suppose a constant field of forces $Y(t)$ in $\mathbb{R}^d$ depends on random parameter and time in such a way that $Y(t)$ is a Brownian motion and let $X(t)$ be a Brownian motion of a particle in $\mathbb{R}^d$. The energy $E(t)$ is a random process whose distribution is calculated by interpreting $(X(t), Y(t), E(t))$ a random process on the Heisenberg group $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

A. Hulanicki

Laws of Large numbers on Lie groups

We take a connected an amenable Lie group G and a probability p which generate G and we prove that the mean lenght of the products $g_1 \dots g_n$ goes to zero according to the vanishing of the expectation of the projection of the probability measure on the largest quotient vector group of G

Y. Guivarc'h

On the principal series for a simply connected complex semi-simple groups G (examples).
We establish a relationship between Verma modules and the principal series of representations of G. We use it to obtain the following three examples. Let $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of G.

1) First for $\mathfrak{g} = D_4$ we exhibit a representation belonging to the (Spherical) principal series which contains infinitely many subrepresentations. We deduce from that that in the center of enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ of $\mathfrak{g}$, there exists a maximal ideal which is contained in infinitely many two sided ideals of $U(\mathfrak{g})$ (one knows that only a finite number of them can be prime).

2) Second using a result of A. Joseph we show that if $\mathfrak{g}$ is simple, different from $Sl(n, \mathbb{C})$ there exists an irreducible representation of G which is not weakly equivalent to any representation induced by a finite-dimensional representation of a parabolic subgroup of G. This gives a counter example to a theorem of Zelobenko.

3) Third we give a negative answer to a question raised by B. Kostant concerning the $\mathfrak{g}$-finite $\mathbb{C}$-endomorphisms of a simple $\mathfrak{g}$-module.
This work is a joint work with M. Duflo.

Nicole CONZE-BERLINE (CNRS).

The Wiener tauberian theorem for semi direct products of abelian groups.
We prove that if the locally compact group G is a semi direct product of two abelian groups then its group algebra $L^1(G)$ has the Wiener property i.e. every closed twosided ideal I of $L^1(G)$ is contained in a kernel of continuous irreducible Hilbert space representation π. The proof is given by a construction of suitable representation π.

Tadeusz Pytlik

Character formulas for distributions associated with primary and irreducible projections in L^2 of a nilmanifold $\Gamma\backslash N$.

Decompose $L^2(\Gamma\backslash N) = \oplus_{\sigma \in (\Gamma\backslash N)^\wedge} \mathcal{H}_\sigma$ into primary subspaces (each irreducible $\sigma \in \hat{N}$ appearing with finite multiplicity). Auslander + Brezin showed that projections which commute with the action of N, such as the primary projections $P = P_\sigma$ or irreducible $P \leq P_\sigma$, are determined by right-Γ invariant distributions $D = D_P \in \mathcal{D}'(\Gamma\backslash N)$. We ~~show~~ give explicit formulas expressing the distributions for P_σ, and for certain "constructible" irreducible projections $P \subseteq P_\sigma$, as sums of characters on tori imbedded in $\Gamma\backslash N$.

A typical $\sigma \in (\Gamma\backslash N)^\wedge$ is induced from a maximal integral character (χ, M): here $\chi = e^{2\pi i \ell}|M$ where (i) $\ell \in \mathfrak{n}^*$ (ii) $\mathfrak{m}$ = max. dim. subalgebra subordinate to ℓ and $M = \exp(\mathfrak{m})$, (iii) M rational ($\Gamma \cap M\backslash M$ compact), (iv) $\chi|\Gamma \cap M = 1|\Gamma \cap M$. As explained by Richardson, $\sigma = \mathrm{Ind}(M\uparrow N, \chi)$ can be realized on an explicit irreducible subspace $\mathcal{H}_{(\chi,M)} \subseteq L^2(\Gamma\backslash N)$. The projection $P_{(\chi,M)}$ ~~the~~ onto this "constructible subspace" is determined by the following distribution

$$\langle D_{(\chi,M)}, f \rangle = \Sigma'_{\gamma \in \Gamma \cap M \backslash \Gamma} \left(\int_{\Gamma \cap M \backslash M} \overline{\chi(m)}\, f(\Gamma m \gamma)\, d\dot{m} \right) \qquad \forall f \in C^\infty(\Gamma\backslash N)$$

$$= \Sigma'_{\gamma \in \Gamma \cap M \backslash \Gamma} \left(\int_{\Gamma \cap M^\gamma \backslash M^\gamma} \chi^\gamma(m)\, f(\Gamma m)\, d\dot{m}^\gamma \right),$$

as proved (for general M) in joint work by Greenleaf, Corwin, & R. Penney. Here $\chi^\gamma(g) = \chi(\gamma g \gamma^{-1})$ is a character on $M^\gamma = \gamma^{-1} M \gamma$ for $\gamma \in \Gamma$ and $d\dot{m}^\gamma$ = normalized M^γ-invariant measure on $\Gamma \cap M^\gamma \backslash M^\gamma \cong \Gamma \backslash \Gamma M^\gamma$, a closed variety in $\Gamma\backslash N$. Actually χ^γ is constant $= 1$ on $(\Gamma \cap M^\gamma)[M^\gamma, M^\gamma]$ and so may be realized as a character on the torus $\mathbb{T}^\gamma = (\Gamma \cap M^\gamma)[M^\gamma, M^\gamma] \backslash M^\gamma$.

Order estimates can be given for these distributions if $M \triangleleft N$. Order(D) controls the loss of smoothness when we apply the corresponding projection to functions in $C^k(\Gamma\backslash N)$; $P_D : C^k \to C^0 \iff \mathrm{order}(D) \leq k$.

Fred Greenleaf (New York Univ. / Courant Inst.)

Holomorphic Representations of nilpotent Lie groups

Let G be a simply-connected nilpotent Lie group, $G_{\mathbb{C}}$ its complexification. Let $\mathcal{EP}(G)$ denote the cone of positive-definite functions on G which extend holomorphically to $G_{\mathbb{C}}$. If π is a unitary representation of G, let $E(\pi)$ denote the space of vectors v so that $x \mapsto \pi(x)v$ extends holomorphically to $G_{\mathbb{C}}$. Then $\mathcal{EP}(G)$ consist exactly of the representative functions $\varphi_v(x) = (\pi(x)v, v)$, $v \in E(\pi)$. We can study the growth of such φ_v at infinity on $G_{\mathbb{C}}$ by using the descending central series of $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ to define a one-parameter group of dilations on $G_{\mathbb{C}}$ and an associated homogeneous gauge $|z|$. Then φ_v is of growth $\exp(A|z|^p)$ on $G_{\mathbb{C}}$ $\Leftrightarrow$ $\tilde{v}(x) = \pi(x)v$ is of similar growth. Call this space of vectors $E_p(\pi)$. If G is l-step nilpotent, then $E_p(\pi)$ is dense in $\mathcal{H}(\pi)$ for all $p > l$.

Roe Goodman (Rutgers U. / New Brunswick)

On Kostant's complementary series

Let X ~~be a~~ $= G/K$ be a rank one symmetric space of the non compact type (G a connected, non compact, simple Lie group with finite center, K a maximal compact subgroup) and $G = KAN$ an Iwasawa decomposition, M the centralizer of A in K. Then

Theorem The convolution algebra $\mathcal{K}(M\backslash K/M)$ is commutative.

Corollary 1 (Kostant). $L^2(K/M) = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{H}_\alpha$, with multiplicity one.

Corollary 2 (Godement-Dixmier) Every irreducible unitary representation of G of class 1 with respect to K decomposes (as a representation of K) into a direct sum of inequivalent irreducible components.

Using a subgroup L such that $K \supset L \supset M$, K/L a compact symmetric space, L/M a sphere, the zonal spherical functions φ_α associated to the irreducible component $\mathcal{H}_\alpha$ can be described. As an application, we get a construction (analogous to the one known in the case of $X = SO_0(1,n)/SO(n) = S^{n-1}$) for the class 1 complementary series of Kostant.

Reiji TAKAHASHI (Nancy)

<u>Estimates of lower bound for spectrum of the horizontal Laplacian on K equivariant function</u>

G s.s. non compact Lie group, K its compact maximal. μ an irreducible representation of K, $L^2_\mu(G)$ the $L^2(G)$ subspace consisting of right μ-equivariant functions, $\Delta = \Omega_G - \Omega_K$ the horizontal laplacian. $-\Delta$ is a positive subelliptic differential operator, $\tau_p(\mu)$ denotes the lowest bound of its spectrum when restricted to $L^2_\mu(G)$.

1) An estimate of $\tau_p(\mu)$ can be derived from Hörmander subelliptic estimates (Compte Rendus T279 p 185)

2) Exact expression for $\tau_p(\mu)$ can be obtain trivially from the behavior of the resolvent kernel for the heat equation on L^2_μ. Then the estimates of ergodicity of the resolvent can be made using a splitting of the probability space ~~[illegible]~~ associated to Δ. A comparison lemma is finally obtain giving infinitesimal criterium sufficient to insure $\tau_p(\mu) < \tau_p(\lambda)$ (Compts Rendus T280 p. 793)

3) The ergodic approach used in 2) can be also used for flat bundle: for instance covering of the fundamental domain $SL(2,\mathbb{Z}) \backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ (Comptes Rendus T 280 p 1009) Marie Paule et Paul Malliavin

Institut H. Poincaré 11 rue ~~Pierre~~ et Marie Curie Paris 75005

Ergodic Equivalence Relations, Cohomology + von Neumann algebras.

In joint work with Jacob Feldman we study equivalence relations R on a standard Borel measured space (X,μ) such that R is a Borel subset of $X \times X$ and the equivalence class $R(x)$ of almost all x is countable and $\mu(R(E))=0$ if $\mu(E)=0$. Examples of such R's are relations R_G associated to a countable group G of Borel automorphisms of (X,μ) by $(x,y) \in R_G \iff \exists g \in G$ $g\cdot x = y$. Isomorphism of R_{G_1} and R_{G_2} means that G_1 + G_2 are orbit equivalent or Dye equivalent. One of the first results is that any such R is an R_G but the point is that one may choose many different G giving the same R and R that is the invariant object. One may define ergodicity and there is a type classification. One may define the notion of hyperfiniteness where $R = \cup R_n$. $R_n \subset R_{n+1}$ so that $R_n(x)$ is finite a.e. Then R is hyperfinite $\iff$ $R = R_{\mathbb{Z}}$ ($\mathbb{Z}$ = integers) extending results of Dye + Krieger.

One may introduce cohomology groups $H^n(R,A)$ for appropriately defined R-modules A + one can write down a natural set of axioms so that these are the unique solutions. For R ergodic, a $c \in Z^1(R,A)$ A locally compact one may define a "skew product" relation $R(c)$ on $X \times A$ and A operates by translation on the $R(c)$ invariant sets so that we have by Mackey's point realization theorem one has an ergodic action of A on a space Z which one may call following Mackey the range of the cocycle c. The isotropy groups of this action of A on Z are a.e. constant, say $A(c)$ and we call this the proper range of c. Generalizing the Araki-Woods asymptotic ratio set for ITPFI factors + Krieger's asymptotic ratio set for a single ergodic transformation, one may introduce the asymptotic range $\Lambda_*(c)$ of c. One may then show that $\Lambda_*(c) = A(c)$ is a closed subgroup of A depending only on the cohomology class of c.

Finally if we start with an R and $\sigma \in H^2(R, \mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$ = circle) we may construct a von Neumann algebra of "matrices" over R twisted with the cohomology class σ. In case $R = R_G$, $\sigma = (1)$, G acting freely this is the Von Neumann - Murray group measure construction. We call the algebras $M(R,\sigma)$; it contains a distinguished abelian subalgebra $D(R,\sigma) = A$ of "diagonal" matrices. ~~Then given M and an~~ A has the following properties relative to $M = M(R,\sigma)$

(1) A is max abelian

(2) A is regular ie. its normalizer generates M

(3) $\exists$ a faithful normal conditional expectation E of M onto A.

Call such a ~~pair~~ A a Cartan subalgebra of M in the general case.

<u>Thm</u> If $M \supset A$ where A is a Cartan subalgebra, then $M \simeq M(R,\sigma)$ so $A \simeq D(R,\sigma)$.

We are also able to determine the structure of the group $\mathrm{Aut}(M, A)$ of automorphisms of M sending A into itself

Calvin C Moore

Berkeley, Ca. U.S.A.

Rosenthal sets in $\mathbb{R}$.

$\Lambda \subset \mathbb{R}$ is called a Ro-set if $f \in L_\infty(\mathbb{R})$, spec $f \subset \Lambda \Rightarrow f$ is continuous
$\Lambda \subset \mathbb{R}$ " " " Ro^*-set if " " $\Rightarrow f$ is almost periodic.

For compact Λ's $Ro \neq Ro^*$
" discrete Λ's it is unknown

Λ is called uniformly discrete if $\inf\limits_{\substack{\lambda' \neq \lambda'' \\ \lambda', \lambda'' \in \Lambda}} |\lambda' - \lambda''| > 0$.

It is well known that, for Λ uniformly discrete, ~~a const~~ there exists a constant $l > 0$ such that, for every interval I of length l, ~~all~~ ~~ex~~ the norms

(1) $\int\limits_I |w|^2$ and $\Sigma |a_n|^2$

are equivalent for all trigonometric polynomials with spectrum in Λ (and with coefficients a_n), with the same equivalence constants.

Hence one deduces easily that if Λ_k ~~~~ is uniformly discrete and independent then Λ is a Ro^*-set.

Theorem 1. If ~~there~~ $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ $(= \Lambda)$ is a uniformly discrete sequence and if two real numbers α_1, α_2 exist such that α_1/α_2 is irrational and $\lambda_k \alpha_1 \to 0$, $\lambda_k \alpha_2 \to 0$ mod 2π, then Λ is a Ro^*-set.

The proof is based on the theorem of ~~A~~ Loomis saying that a bounded function with countable compact spectrum is almost periodic. ~~E~~ In order to apply this theorem one maps $\mathbb{R}$ into the torus $\mathbb{T}^2$ by putting $t \xrightarrow{\alpha} (e^{i\alpha_1 t}, e^{i\alpha_2 t})$. So $\alpha(\Lambda)$ is compact countable. Instead of $\mathbb{R}$ one is dealing with $Gp(\alpha_1, \alpha_2) = H$ with discrete topology, the dual of $\mathbb{T}^2$. A bounded function f on ~~A~~$\mathbb{R}$ with spectrum in Λ gives raise to a bounded function φ on H ~~which~~ ~~on~~ with spectrum in Λ. The function φ turns out to be almost periodic (Loomis) and to have the same Fourier coefficients as f (viewed as a S^2-a.p. function, according to (1)). Since H is dense in $\mathbb{R}$, φ can be extended ~~E~~ on the whole of $\mathbb{R}$ ~~as~~ where it is almost periodic and a.e. equal to f. So Λ is a Ro^*-set.

From th. 1 one deduces (by Weyl's equidistribution theorem)

Theorem 2. If $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ is uniformly discrete and the sequence (n_k) is such that $n_k / k \to \infty$ then a sequence of indices (i_k) exists such that (λ_{i_k}) is a Ro^*-set and that, for an infinite sequence $k_1 < k_2 < \ldots$, one has $i_{k_s} / n_{k_s} \to 0$.

By means of Khintchine's theorem on „normal forms" one proves

Theorem 3. If $\sum \frac{1}{n_k} < \infty$ then a Ro^*-set (m_k) consisting of integers exists such that $m_k = o(n_k)$.

S. Hartman (Wrocław, Poland).

Mathematical Methods in Celestial Mechanics: 25.8.1975 – 29.8.1975

The N Body Problem

A selective survey of recent results in the n-body problem of celestial mechanics: The first part concerned the asymptotic behavior of all solutions of the n-body problem (which exist on the time interval $(0,\infty)$) as time, t, approaches infinity. Essentially, if $\underline{r}_i$ is the vector position of the ith mass relative to the center of mass, then either $\max_{k \neq j}\{|\underline{r}_k - \underline{r}_j|\}/t \to \infty$ and $\min\{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|\} \to 0$; or $\underline{r}_i = \underline{A}_i t + O(t^{2/3})$ where $\underline{A}_i$ is some vector constant, perhaps zero $(i = 1, 2, \ldots, n)$. In the second case more results follow. The first case cannot occur for $n < 4$. If binary collisions are admitted, it does for $n = 4$. The second part of the talk concerned possible configurations of n body systems. This is a generalization ~~due~~ of the Hill curves ~~from the~~ to three and n-body system. Finally, the third part concerned the existence and relative abundance of collisions and non-collision singularities.

Donald Saari
Northwestern, Evanston, Illinois.

Numerical Aspects of Time Elements

Time elements for various Sundman time transformations are presented. Numerical evaluations are given that show that the use of time transformations improve accuracy by about one order of magnitude for a close Earth satellite

Paul Nacozy, Aug. 26, 1975
Univ. of Texas at Austin

A State Transition Matrix based on a new Satellite Theory

A new satellite theory was recently developed which is based on a set of 8 canonical two-body elements in the extended phase space. The features of this new approach to the artificial satellite problem are: (a) The theory is drastically simplified, (b) the problems that are inherent to the "classical" solutions which are connected to inaccuracies in the mean motion are no longer present since the mean motion becomes a constant (total energy), (c) No special procedures are necessary to obtain the "mean" elements, (d) the theory produces an error that is smaller than in classical theory.

Based on this new satellite theory, an analytical State Transition Matrix was derived. It's performance was discussed with numerical examples. They clearly show an improvement of the J_2-perturbed matrix against the two body version.

Gerhard R. Scheifele
Analytical + Computational Mathematics, Inc.

Decay of a Highly Eccentric Satellite

The re-entry phase of a highly eccentric satellite is discussed. Numerical simulations allowing to predict the exact date of re-entry of a highly eccentric satellite are exposed.

It is shown that there is a possibility offered by Celestial Mechanics for the satellite of having a short extension of its life time.

Re-entry of the european scientific satellite HEOS-1 predicted for October 28, 1975 is near such a situation.

Guy Janin
European Space Operation Centre
Darmstadt, West Germany

Near parabolic orbits.

Plane parabolic motion can be adequatly described by using parabolic coordinates u_1, u_2 in the plane of motion. The transformation to rectangular coordinates x_1, x_2 is given by

$$x_1 = u_1^2 - u_2^2, \quad x_2 = 2u_1 u_2, \quad r = \text{distance} = \cancel{x_1^2 + x_2^2},\ u_1^2 + u_2^2$$

thus $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

(This set of formulae is known from Pythagorean triplets in number theory).

A straight line in the $u_1 u_2$-plane is mapped onto a parabola in x_1, x_2-plane focused at the centre (1st Kepler law). The 2nd law is satisfied if a particle moves according the law u_i = linear functions of a parameter s provided s is linked to time t by

$$t' = \frac{dt}{ds} = r. \qquad \text{(Sundmann).}$$

u_1, u_2 are thus kind of a compromise between coordinates and elements (that are constant during motion). The merits and disadvantages of elements versus coordinates for numerical work were discussed by adopting this theory of parabolic motion. This theory was also applied to near-parabolic and perturbed motion.

E. Stiefel
Swiss Institute of Technology
ETH Zurich.

A new time element for a general time transformation.

The paper introduces a new time element to be used with a general time transformation for satellite equations of motion. The purpose of this time element is to reduce the growth of the numerical errors with respect to the time integration. It is characteristic for the new time element $\tau = \tau(\underline{x}, \underline{p}, t)$, that it does not depend on the independent variable s. Numerical experiments show accuracy improvements by using this time element.

J. Baumgarte
Technische Universität
Braunschweig

A new proof of Moser's twist mapping theorem.

A new proof of Moser's twist mapping theorem in the analytic version is given. Our proof is simpler ~~so~~ far we are able to formulate the iteration process for constructing an invariant curve in the frame work of the classical Newton method, such that no coordinate transformations but only Jacobians near the unit matrix have to be inverted.

Helmut Rüßmann

Universität Mainz

An Approximate Semi-Analytical Solution
for Orbit- and Attitude Maneuvers of
Spin Stabilized Satellites

The mutual interaction of orbit-attitude maneuvers is investigated by application of the "Two Variable Expansion Procedure" to the Euler equations. The resulting semi-analytical solution describes the short periodic nutation, the long term attitude variation and the mean linear acceleration of the center of mass. Some applications of the solution are shown by means of a few examples.

M. Eckstein, DFVLR - Oberpfaffenhofen

Three Theorems on Relative Motion.

The theorems treat the analytical aspects of the relative motion of non-interacting particles influenced by arbitrary forces. As special cases motion in gravitational and central force fields are discussed. The theorems generalize Encke's, Euler's and Sundman's results.

V. Szebehely, University of Texas,
Austin, Tex. USA

Trajectory Optimization by making Use of the Closed Solution of Constant Thrust-Acceleration Motion.

The problem of fuel-optimal rendezvous and transfer maneuvers in a central gravitational field is considered. By using analytical results and a parametrization of the control functions, the original optimal control problem can be solved as a sequence of mathematical programming problems. After the introduction of KS-variables and piecewise-constant thrust-accelerations, all necessary trajectory integrations are performed in closed form.

D. Rufer,
Swiss Institute of Technology
ETH Zürich.

K/S Two-Point-Boundary-Value Problems

A method for developing the missing general K/S (Kustaanheimo/Stiefel) boundary conditions is presented using the formalism of optimal control theory. As an illustrative example, the method is applied to the K/S Lambert problem to derive the missing terminal condition. The necessary equations are then developed for a solution to this problem with the generalized eccentric anomaly, E, as the independent variable. This formulation, requiring the solution of only one nonlinear equation in one unknown, results in a considerable simplification of the problem. This is possible because the energy equation is separable in this formulation. This solution, however, is restricted to nonpositive energies.

Don Jezewski
NASA, Johnson Space Center
Houston, Texas, USA

A Theory of the Trojan Asteroids

The paper constructs an analytical long-periodic solution for the case of 1:1 resonance in the restricted problem of three bodies. An intermediate Hamiltonian is furnished by the previously solved Ideal Resonance Problem. The perturbations are calculated by the method of Lie-series, the short-periodic terms are removed from the solution by equating the mean eccentricity to zero, and the calculation of the time-dependence is reduced to the inversion of a hyperelliptic integral.

The domain of the solution is a horseshoe-shaped region including the Lagrangian points L_3, L_4, and L_5 and bounded by the inequalities $|\Theta| > 2m^{1/3}$ and $|r-1| < m^{1/3}$. Here r and Θ are the polar coordinates in a rotating coordinate system, and m is the mass-parameter. The solution excludes the multiple internal resonances of the form $T_\ell = j\,T_s$, where T_ℓ and T_s are the long and the short periods, respectively, and j is an integer.

Boris Garfinkel
Yale University
New Haven, Conn. U.S.A.

Redundant Variables, Regularisation and Stabilisation in the Three-Body Problem

It has been shown (Celes. Mech. <u>10</u>, 217, 1974) that the equations of motion for the three-body problem may be cast into a form which is regular for collisions between <u>any</u> pair of bodies. The method proceeds by stages, namely

1) the introduction of redundant variables
2) the application of the KS-transformation.

The present contribution describes the relationship of this method to previous regularisations of the two- and three-body problems, and gives a different treatment of the first stage above, in a manner related to the work of Broucke and Lacs (Celes. Mech. 8, 5, 1973). Finally we discuss the stability of the method during approach to the triple collision.

Douglas C. Heggie
Trinity College, University of Cambridge, England.

The Three-Body Problem Near Triple Collision.

A theory of the triple collision and the triple close encounter in the planar problem of three bodies is presented. The basic idea is to use the homothetic transformation $\underline{x}_j = \varepsilon^2 \tilde{\underline{x}}_j$, $t = \varepsilon^3 \tilde{t}$ (Cel. Mech. 11, 429, 1975) for "blowing up" solutions of the three-body problem which are nearby Lagrangean triple collision solutions. By means of the theory of singular perturbations the close encounter is then related to parabolic motion in the three-body problem. One result is that a close triple encounter generally leads to the escape of one body with arbitrarily large asymptotic velocity.

Jörg Waldvogel
Swiss Institute of Technology,
ETH, Zürich

OPTIMAL m-FOLD RUNGE-KUTTA METHODS

Recurrent power series methods are extremely applicable to problems in celestial mechanics since the Taylor coefficients may be expressed by recurrent relations. However, as the number of Taylor coefficients increase, as is often necessary because of accuracy requirements, the computing time grows prohibitively large. In order to avoid this unfavorable situation, Dr. Erwin Fehlberg introduced, in 1960, Runge-Kutta methods that use the first m Taylor derivatives obtained by recurrent relations, or some other technique.

Optimal m-fold Runge-Kutta methods are introduced. Imbedded methods of order (m+3)[m+4] and (m+4)[m+5) are presented which have coefficients that produce minimum local truncation errors for the higher order pair of solutions of the method, as well as providing a near maximum absolute stability region. These optimal methods are compared to the existing m-fold methods for several test problems representative of those occurring in celestial mechanics. The numerical comparisons show that the optimal methods are more efficient. It is stressed that these optimal methods are particularly efficient when m is small.

Dale G. Bettis
The University of Texas at Austin

Perturbation of a Satellite Orbiter by the Oblateness of the Primary Planet

The perturbation of an orbiter around a large satellite of a giant planet (Jupiter, Saturn, Uranus or Neptune) produced by the oblateness of the planet is investigated. The perturbing force of the J_2-term (general case) and the J_4-term (special case of small eccentricity and inclination of the satellite) is expanded in an appropriate form and the main term and the parallactic terms are given explicitly. The variations of the orbital elements are derived using the stroboscopic method. An example shows that the perturbation of the orbit cannot be neglected.

E. A. Roth
Mission Analysis Division, ESOC
Darmstadt

On the Artificial Satellite Theory

Some of the basic ideas of an analytical orbiter theory which is being developed by Hubert Claes in Namur are presented.

The theory is based on the Lie transform technique and will be expressed in a closed form up to second order. The inclusion of additional terms of the third order (expanded in power series of the eccentricity) will be considered.

Special attention is being given to the choice of the elements and to the final form of the theory. Three main criteria are used. The removal of the virtual singularities of small inclination and eccentricity. The simplicity of the final form of the theory when the elements have been given their numerical values. The numerical stability of the evaluation of the theory.

Jacques Henrard
Facultés Universitaires de Namur
5000 Namur BELGIUM.

Transformations infinitésimales et 11ème intégrale du Problème des N corps

Elie Cartan has discovered that the equations of the N body-problem admits an invariant linear differential form, which comes from an 11th first integral for the extended system of Hamiltonian equations by adjunction of the action variable. We recall Cartan's "last line theorem" (p. 89, Leçons sur les Invariants Intégraux) and investigate his bearing with respect to variational equations and approach of triple collision

Fernand Nahon, Université Pierre et Marie Curie
11 rue Pierre Curie 75005 PARIS.

Sur des matrices généralisant KS

La matrice KS montre une extension de la notion de changement de variable. Usuellement $q \to Q$: $\dot{Q} = J\dot{q}$, J jacobienne. KS n'est pas jacobienne.

Soit A telle que $\begin{pmatrix} dx^\alpha \\ \pi^\lambda \end{pmatrix} = A\,du$ $\begin{matrix}\alpha = 1 \dots k \\ \lambda = k+1 \dots n\end{matrix}$ $\begin{pmatrix} \dot{x}^\alpha \\ \omega^\lambda \end{pmatrix} = A\dot{u}$

Soit $L(u, \dot{u})$, remplaçons $\dot{u}$ par $A^{-1}\begin{pmatrix} \dot{x}^\alpha \\ \omega^\lambda \end{pmatrix}$ et de $x^\alpha = F^\alpha(u)$ exprimons $u^\alpha = \varphi^\alpha(x, u^\lambda)$, L devient $\hat{L}(\dot{x}^\alpha, \omega^\lambda, x^\alpha, u^\lambda)$. Utilisant les équations de Poincaré en pseudo paramètres (ω^λ sont des pseudo paramètres).

Monsieur Langlois a montré que si les u^λ sont ignorables : $\hat{L}(\dot{x}^\alpha, \omega^\lambda, x^\alpha)$ alors $\frac{\partial \hat{L}}{\partial \omega^\lambda} = 0$ sont relations invariantes. Si j'en déduis $\omega^\lambda = \bar{\omega}^\lambda(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$ les variables x^α ont pour lagrangien $R(\dot{x}^\alpha, x^\alpha, \bar{\omega}^\lambda)$. J'en ai déduis des matrices généralisant KS à partir de la cinématique du solide à n dimensions.

Mlle Losco Faculté des Sciences de la Bouloie
Laboratoire de Mécanique Théorique
25030 Besançon Cedex

A canonical theory for the elimination of short and intermediate period terms from the problem of a high altitude earth satellite

The problem of a satellite in motion about an oblate earth (J_2 problem) has been successfully solved by G. Scheifele by introducing Delauney-Similar (DS) elements in an extended phase space with the true anomaly as independent variable. A complete first order solution was established through the use of the canonical formalism of Von Zeipel.
In this work, the DS theory is extended to the problem of an earth satellite that is perturbed by the sun and moon, and also J_2. All three effects are assumed to be the same order of magnitude. Since the external body terms depend explicitly on time, the time element appears as an additional angle variable. The hamiltonian is expressed in DS-elements with the eccentric anomaly being used as a noncanonical auxiliary variable. A more general solution to the first Von Zeipel equation allows simultaneous elimination of short and intermediate period terms (terms associated with the period of the external body). This solution will be valid for large eccentricities. The canonical transformation to mean elements is defined by a generating function that is a series involving Bessel coefficients.

Otis F. Graf Jr.
Analytical and Computational Mathematics, Inc.
16218 Covendish Dr.
Houston, Texas 77058 U.S.A.

Families of Periodic Solutions in the N-Body Problem: A Survey of Recent Results and Existence Proofs.

A brief historical review of the major contributions to the problem of existence of particular solutions as mentioned in the title was given, leading to the results of O. Perron and of M. Crandall for more than three bodies. Most of these solutions represent "superpositions" of circular keplerian motions. Since 1963 we have added to these results classes of periodic solutions representing "superpositions" of circular with elliptic keplerian motions for N=3 and N=4. Methods of proof, and ideas to overcome the inherent degeneracies for the latter periodic motions of mixed type, were outlined.

R. F. Arenstorf, Dept. of Math. / Vanderbilt University / Nashville, Tennessee.

Die sogenannten Newtonschen Differentialgleichungen der Mechanik in der analytischen Himmelsmechanik.

Das inverse Newtonsche Problem ist von I. Newton (1643-1727) in den „Philosophiae Naturalis" principia mathematica (1686/7) angesprochen, aber nicht behandelt worden. Die Einführung des Leibnizschen „Calculus" und die Aufstellung der Differentialgleichungen der Mechanik im Falle einer Zentralkraft verdankt man den Basler Mathematikern Jacob (1655-1705) und Johann (1667-1748) Bernoulli und Jacob Hermann (1678 - 1733). In seiner Abhandlung „Metodo d'investigare l'orbite di pianeti ..." (Giornale de letterati d'Italia. 2. Venedig 1710, S. 447-467) stellt Hermann zum ersten Mal unter Verwendung eines festen rechtwinkligen Koordinatensystems die Differentialgleichung des Planetenproblems auf:

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -k^2 \frac{\mathfrak{r}}{r^3}, \qquad r = |\mathfrak{r}|; \tag{1}$$

daraus gewinnt er in einfachster Weise das erste Keplersche Gesetz und die Keplergleichung:

$$\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{c} \quad , \qquad c = |\mathfrak{c}| ,$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{c} = - \frac{k^2}{r^3} \left(\mathfrak{r} \times (\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{r}}) \right) = k^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathfrak{r}}{r} \right)$$

(2) $\dot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{c} = k^2 \frac{\mathfrak{r}}{r} + \mathfrak{A}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{c} = 0$, $\mathfrak{A}\mathfrak{c} = 0$; $\mathfrak{A}$ ist der zweite Laplace'sche Vektor.

Setzt man:

$$\mathfrak{c} = c\,(\mathfrak{i}_1 \times \mathfrak{i}_2)\,; \quad \mathfrak{i}_1^2 = \mathfrak{i}_2^2 = 1, \quad \mathfrak{A} = a\mathfrak{i}_1 + b\mathfrak{i}_2 , \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{i}_1 X + \mathfrak{i}_2 Y$$

so folgt aus (2) unmittelbar

$$c\dot{X} = - k^2 \frac{Y}{r} + a \quad , \qquad c\dot{Y} = k^2 \frac{X}{r} + b\,;$$

daraus
$$c^2 = k^2 r + bX - aY$$
$$c\,r\dot{r} = aX + bY.$$

Die erste Gleichung gibt als Bahnkurven Kegelschnitte, die hier wohl zum ersten Male allgemein in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt sind; die zweite Gleichung gibt bei Einführung der exzentrischen Anomalie u:

$$r = A(1 - e \cos u), \qquad \frac{aX + bY}{\sqrt{a^2 + b^2}} = A\sqrt{1-e^2}\,\sin u$$

die Keplergleichung

$$\frac{2\pi}{T} = u - e \sin u , \qquad \frac{2\pi}{T} = \frac{k}{A^{3/2}}$$

Das System (1) war das erste System von „Differentio-Differential"-Gleichungen, das mit Hilfe eines integrierenden Faktors gelöst worden ist. Die Aufstellung der Differentialgleichungen der Mechanik für die Bewegung eines freien Massenpunktes unter der Einwirkung beliebiger äußerer Kräfte verdankt man L. Euler (1707–1783) (Recherches sur les mouvements des corps célestes en générale. Mém. de l'acad. Royale des sciences et des belles lettres. Berlin, 3 (1747) 1749. Leonardi Euleri Opera omnia, series II. 25, S. 9):

$$m\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{K}.$$

Die Hermannsche Arbeit wurde von den Zeitgenossen und noch lange nachher nicht beachtet. C. G. J. Jacobi (1804–1851) bringt die Hermannsche Integrationsmethode 1842 (J. f. die reine u. angew. Math. (Crelle) 24, §5) ohne Hinweis auf Hermann unter der expliziten Bezeichnung „nova methodus". Auch A. Sommerfeld (1868–1951) bringt sie in seinen Vorlesungen (I (1943), §6, S. 38) mit der Bemerkung: „die hier gegebene Ableitung des 1. Keplerschen Gesetzes ist von der in den Lehrbüchern gewöhnlich gebrachten verschieden."

Zum Abschluß ein Hinweis auf ein von A. Voss (1845–1931) und H. Liebmann zurückgehendes Beispiel für die Differentialgleichungen der Mechanik mit einer nichtholonomen Bedingung. Es handelt sich um die Bewegung zweier Massenpunkte, die der nichtholonomen Bedingung unterworfen sind, daß die Geschwindigkeit des einen stets senkrecht steht auf der Verbindungslinie zum anderen, und daß sonst keine weiteren Kräfte wirken. Der erstere beschreibt dann einen Kegelschnitt. S.: A. Voss: Über die Differentialgleichungen der Mechanik. Math. Annalen 25 (1885), 258–286, wo zum ersten Mal diese Differentialgleichungen mit nichtholonomen Bedingungen – die Bezeichnung ist später (1894) von H. R. Hertz eingeführt worden – behandelt sind. H. Liebmann: Einfaches Beispiel eines Punktsystems, das bei seiner Bewegung einer nichtholonomen Bedingung unterworfen ist. Zeitschrift für Math. und Physik („Schlömilch") 44 (1899), 355–356.

Lit.: O. Volk: Zur Geschichte der Himmelsmechanik: Johannes Kepler, Leonhard Euler und die Regularisierung. Preprint No. 4 (1975). Math. Institut der Julius-Maximilians-Universität Würzburg.

Die simultane Übertragung ins Englische erfolgte durch Frl. Dr. rer. nat. Frauke Hautitz, Universität Würzburg.

Otto Volk.

Error Estimates for Perturbed Systems

Based on the stability behaviour of the solutions of the unperturbed system, efficient bounds on the difference between the solutions of the perturbed and the unperturbed system are established. The results are applied to the method of averaging and to stability theory

Urs Kirchgraber
ETH, Zürich

"On the characteristic Exponents of the General Three-Body Problem".

The characteristic exponents of the general three-body problem are basically different from those in the restricted problem. They are based on the eigenvalues of an 8x8 monodromy matrix. The monodromy matrix is symplectic. The 8 eigenvalues form reciprocal pairs but 4 of them are unity, because of the energy and angular momentum integrals. The other four roots define two stability indices, rather than a single one in the restricted problem. This results in 6 types of unstable orbits and one single region of stable orbits.

R. BROUCKE
Jet Propulsion Laboratory
Pasadena, California.

"The effects of integrals on the totality of solutions of dynamical systems"

Regions of possible motions are established for any dynamical system which posses a time independent Hamiltonian with a velocity independent potential or for any system which is reducable to that form by means of integrals of the motion using only extend point transformations. The method is applied to the problem of three bodies in a plane and surfaces of zero velocity are established. These are governed by the energy, angular momentum and the masses of the participating bodies.

The analytical and geometrical properties of these surfaces provide interesting qualitative results for given constants of the motion.

K. ZARE
The University of Texas
at Austin

FURTHER INVESTIGATIONS IN THE ATMOSPHERIC DRAG PROBLEM

It is a relatively simple procedure to set-up the equations for the variations of the elements for the motions of artificial satellites in the ~~ea~~ atmosphere of a primary. The analysis of these equations may be approached in several ways. One very useful method is to develop the right-hand sides of these equations as functions of the eccentric anomaly, and then to integrate the equations over a single revolution of the orbit. The changes of the elements in one period can then be found. It is shown that one particular term in this analysis, which seems to have been neglected in earlier theories of this type, can be significant, and should therefore be retained in the analysis for some satellite motions. The term is most significant for near-circular orbits of light balloon-type satellites

A. H. JUPP
University of Liverpool, England

The Development of the Poincare-Similar Elements With Eccentric Anomaly As The Independent Variable

A new set of element differential equations for the perturbed two-body motion is derived. The elements are canonical and are similar to the classical canonical

Poincare elements, which have time as the independent variable. The Hamiltonian is extended into phase space by introducing the total energy and time as canonically conjugated variables. The new independent variable is, to within an additive constant, the eccentric anomaly. These elements are compared to the Kustaanheimo-Stiefel (KS) element differential equations, which also have the eccentric anomaly as the independent variable. For several numerical examples, the accuracy and stability of the new set are equal to those of the KS solution. This comparable accuracy result can probably be attributed to the fact that both sets have the same time element and very similar energy elements. The new set has only 8 elements, compared to 10 elements for the KS set.

Victor Bond
NASA - Johnson Space Center
Houston, Texas 77058

ORBITAL ANALYSES OF JUPITER I-IV FROM LIGHT CURVES OF MUTUAL EVENTS (joint paper with F.A. Franklin)

A world-wide observing campaign has provided a large collection of photoelectric observations of mutual occultations and eclipses of the Galilean satellites (Jup. I-IV), during the favorable apparition in 1973-74. Theoretical light curves are brought into close agreement with the observed ones by adjusting the predicted positions of the satellites and their radii. For the radii of Europa, Ganymede, and Callisto, we have derived the preliminary mean values 1525 ± 30 km, 2622 ± 40 km, and 2415 ± 43 km, respectively. From a single, well-observed light curve the relative positions of the two satellites involved can be deduced two 100 km or better.

Our results show that the two most recent orbital theories for the Galilean satellites, by Sampson (1910) and by de Sitter (1931), both suffer from longitude errors of 1000 km or more for current times, while about half as large errors may exist in the latitudes computed from Sampson's theory. de Sitter's theory, however, agrees remarkably well with the observed latitudes, at least for Io and Europa.

Kaare Aksnes

Smithsonian Astrophys. Observatory
Cambridge, Mass. 02138, U.S.A.

Newtonian Cosmology if G Varies.

If $R(t)$ is the scale factor for the expansion of the universe, so that $R(\tau) = 1$ at some epoch time τ, then according to Bondi (1948), $R^2 \ddot{R} = -\frac{4\pi}{3} G(t) \rho_0$. Here ρ_0 is the mean cosmic density at time τ. Dirac (1938) and recent developments have suggested that the gravitational constant G may diminish with time. The author uses the model $G \simeq x^{-1}$, where $x = k + t$ and $k \ll \tau$. It follows that $R^2 \ddot{R} = -B x^{-1}$, where $B = \frac{4\pi}{3} G_0 x_0 \rho_0$. The substitution $R = xu$ separates this equation.

Solutions are found for all possible values of the

Hubble constant $H_0 = \dot{R}_0$ and all cosmic densities ρ_0. The scale factor R may either increase indefinitely (open universe) or reach a maximum R_m and then diminish to zero (closed universe). A table is given for the minimum closure density ρ_{0c} versus H_0, if $x_0 = 10^{10}$ yr., with a rule for modifying the table if $x_0 \neq 10^{10}$ yr. The minimum closure density comes out about 100 times as large as the mean density of luminous matter, for current values of H_0. For a G-constant theory this ratio is about 30. I conclude that such a diminution of G would make the openness of the universe more likely than would a constant G.

The paper is to be considered primarily as a point of departure for relativistic cosmologies with varying G.

John P. Vinti

Measurement Systems Laboratory,

Massachusetts Institute of Technology, Bldg W91-202

Cambridge, Massachusetts 02139, U.S.A

Topologie

vom 1. September bis 5. September 1975

Stability of unfoldings and mappings.

We use the notation in Wassermann, "Stability of Unfoldings" (Springer Lecture Notes). Let $\eta \in m(n)^2$ be a singularity, $f \in \mathcal{E}(n+r)$ an unfolding of η ($f|\mathbb{R}^n = \eta$) and $F: (\mathbb{R}^{n+r}, 0) \to \mathbb{R}^{1+r}$ the map-germ defined by $F(x,u) = (f(x,u), u)$. If f is a stable unfolding (defined by Wassermann) then F is a stable map-germ (defined by Mather). In fact we have:

(1) f stable unfolding $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}(n) = \langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathcal{E}(n)} + \langle 1, \partial f/\partial u_i | \mathbb{R}^n \rangle_{\mathbb{R}} + \eta^* m(1)$

(2) F stable map-germ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}(n) = \langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathcal{E}(n)} + \langle 1, \partial f/\partial u_i | \mathbb{R}^n \rangle_{\mathbb{R}} + \mathcal{E}(n).\eta$

Obviously (1) implies (2) and to find singularities η where (2) holds but not (1) it is easy to show that we need to find η such that

(3) $$m(n).\eta \not\subset \langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathcal{E}(n)}.$$

If $\eta \in m(2)$ satisfies (3) then Rolf Waldi has shown that the Milnor number $\mu(\eta) \geq 16$ and $\eta = y^4 - 2y^2x^3 + x^6 - 4yx^5 - y^7$ is an example with $\mu(\eta) = 16$.

If $\eta \in m(3)$ satisfies (3) then by checking Arnol'd's list of singularities it would seem that $\eta = x^3 + yz^2 + x^2y^2 + y^7$ has the smallest Milnor number $\mu(\eta) = 15$.

If $\eta \in m(4)$ satisfies (3) then either $\mu(\eta) \geq 16$ or η splits as $\eta = x^2 + \eta'$ for some $\eta' \in m(3)$ which satisfies (3).

If $\eta \in m(n)$ for $n \geq 5$ then $\mu(\eta) \geq 16$.

Les Lander, Universität Regensburg, Fachbereich Mathematik.

Applications of the fixed point transfer. If $p: E \to B$ is a euclidean nbhd retract over B, $U \subset E$ open, and $f: U \to E$ a fibre-preserving map such $\mathrm{Fix}(f) \to B$ is a proper map then the f.p. transfer $\check{t}_f$ is essentially a map $\check{t}_f : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \times B \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \times \mathrm{Fix}(f)$. Its degree on the fibre, $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \times \{b\} \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \times \mathrm{Fix}(f) \xrightarrow{\mathrm{proj}} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$, equals the Hopf-index $\Lambda(f_b)$, where f_b is ~~the~~ f restricted to the fibre over $b \in B$. An elementary use of the definitions gives the following

Theorem 1. If $\Lambda(f_b) = \pm 1$, and $Y \to B$ is a vector-bundle whose pullback ~~to~~ $Y \times_B \mathrm{Fix}(f) \longrightarrow \mathrm{Fix}(f)$ is stable fibre-homotopically trivial then Y itself is ~~st.~~ s.f.h. trivial. ∎

If one has the situation

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "g"] & U \arrow[d, "h"] \\ E \arrow[r] & D \arrow[r] & B \end{tikzcd} \qquad \text{(commutative diagram)}$$

where f, g, h satisfy assumptions similar to those of f above one has a transitivity property of transfers

(Letting $B = pt$) $\check{t}_{fh} \sim \check{t}_{fg}\, \check{t}_{gh} : (\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N - 0) \times \mathrm{Fix}(h) \longrightarrow (\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N - 0) \times \mathrm{Fix}(g) \longrightarrow (\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N - 0) \times \mathrm{Fix}(f)$.

This implies the following product formula for Hopf-indices.

<u>Theorem 2</u> (let $B = pt$). $\mathrm{Fix}(g)$ decomposes into finitely many compact pieces $\mathrm{Fix}_n(g) = \{ y \in \mathrm{Fix}(g) \mid \Lambda(f_y) = n \}$, and

$$\Lambda(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \cdot \Lambda(g_n) ,$$

where g_n is the germ of g around $\mathrm{Fix}_n(g)$. — In particular, $\Lambda(f) = \Lambda(f_y) \Lambda(g)$ if $\Lambda(f_y)$ does not depend on $y \in \mathrm{Fix}(g)$.

Albrecht Dold (Heidelberg)

<u>Cobordism of diffeomorphisms</u>

Consider pairs (M^m, f), M a compact oriented differentiable m-dim manifold, $f: M \to M$ an orientation preserving diffeomorphism. Two such diffeomorphisms (M_1, f_1) and (M_2, f_2) without boundary are called cobordant if there exists a diffeomorphism (N, F) with $\partial(N, F) = (M_1, f_1) + (-M_2, f_2)$. The equivalence classes $[M, f]$ form an abelian group Δ^m. The proof of the following theorem was indicated.

<u>Theorem</u>: For m odd, $m \neq 3$ there is an isomorphism

$$\Theta : \Delta^m \longrightarrow \Omega^m \oplus \hat{\Omega}^{m+1}, \quad \text{where } \hat{\Omega}^{m+1}$$
$$[M, f] \longmapsto ([M], [M_f])$$

is the kernel of the signature homomorphism.

Two applications were given. 1.) The canonical map
$\pi_0(\mathrm{Diff}(M)) \longrightarrow \Delta^m$ is an affine map for m odd,
$(M,f) \longmapsto [M,f]$
$m \neq 3$. 2.) For m odd, $m \neq 3$ each diffeomorphism of a stable parallizable m-dim manifold is null bordant.

Finally for m even there was constructed an obstruction for elements in the kernel of Θ, whose vanishing implies that the element is zero in Δ^m.

Matthias Kreck (Bonn)

<u>Unoriented bordism of $SO(3)$-manifolds</u>

Let $\mathfrak{N}_*^G$ denote the unoriented bordism ring of G-manifolds. Let A_5, S_4, and $O(2)$ be the subgroups of $SO(3)$ of index 1 in their normalizers. We show:

<u>Prop 1:</u> $\mathfrak{N}_*^{SO(3)} \subset \mathfrak{N}_*^{SO(3)}[\text{all, proper}] \oplus \mathfrak{N}_*^{A_5} \oplus \mathfrak{N}_*^{S_4} \oplus \mathfrak{N}_*^{O(2)}$

Let $\mathcal{H}_*^{SO(3)}$ denote the subring in $\mathfrak{N}_*^{SO(3)}$ generated by the homogeneous spaces. Then we have

<u>Prop 2:</u> $\mathcal{H}_*^{SO(3)} \cong \mathbb{Z}_2[X, Y, Z]/(XY, XZ, YZ)$
with $X = \frac{SO(3)}{A_5}$, $Y = \frac{SO(3)}{S_4}$, $Z = \frac{SO(3)}{O(2)}$

Peter Löffler (Göttingen)

<u>Surgery</u>

Given a degree 1 map of n-dimensional geometric Poincaré complexes $f: M^n \to X^n$ ($f_*[M] = [X] \in H_n(X;\mathbb{Z})$) define the $\pi_1(X)$-equivariant Umkehr chain map

$$g: C(\tilde{X}) \xrightarrow{([X]\cap -)^{-1}} C(\tilde{X})^{n-*} \xrightarrow{\tilde{f}^*} C(\tilde{M})^{n-*} \xrightarrow{([M]\cap -)} C(\tilde{M}),$$

where $\tilde{M}$ is the pullback along f of the universal covering space $\tilde{X}$ of X.
Then g is a $\pi_1(X)$-equivariant chain homotopy right inverse for

$$\tilde{f}: C(\tilde{M}) \longrightarrow C(\tilde{X}) \quad (\tilde{f}g \simeq 1),$$

inducing direct sum decompositions of $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-modules

$$H_*(\tilde{M}) = H_*(\tilde{X}) \oplus K_*(f), \; H^*(\tilde{M}) = H^*(\tilde{X}) \oplus K^*(f).$$

The kernel modules are defined by

$$K_*(f) = H_*(C(g)) \ , \quad K^*(f) = H^*(C(g)) \ ,$$

where $C(g)$ is the algebraic mapping cone of g. Call $f: M \to X$ a normal map if there is given a stable fibre homotopy equivalence

$$b : \nu_M \simeq f^*\nu_X \ ,$$

with ν_M (resp. ν_X) the Spivak normal fibration of M (resp. X). For a normal map the Umkehr is induced by a $\pi_1(X)$-equivariant S-map

$$g : \Sigma^m \widetilde{X}_+ \longrightarrow \Sigma^m \widetilde{M}_+ \quad (m \text{ large}, \ (\Sigma^m \tilde{f})g \simeq 1)$$

in which case $C(g)$ carries the structure of an n-dimensional quadratic Poincaré complex over the fundamental group ring $A = \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$. This means that $C = C(g)$ is (chain equivalent to) a chain complex of f.g. projective A-modules

$$C : C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \xrightarrow{d} C_{n-2} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C_1 \xrightarrow{d} C_0 \qquad (d^2 = 0)$$

and there are given A-module morphisms

$$\varphi_s : C^{n-r-s} \longrightarrow C_r \qquad (s \geq 0, \ C^r \equiv C_r^* \equiv \mathrm{Hom}_A(C_r, A))$$

such that

$$d\varphi_s + (-)^r \varphi_s d^* + (-)^{n-s-1}(\varphi_{s+1} + (-)^{s+1} T\varphi_{s+1}) = 0 : C^{n-r-s-1} \longrightarrow C_r$$

$$(s \geq 0, \ T : \mathrm{Hom}_A(C^p, C_q) \to \mathrm{Hom}_A(C^q, C_p) ; \ \varphi \mapsto (-)^{pq}\varphi^* , \ C_p^{**} = C_p) \ ,$$

with the chain map $(1+T)\varphi_0 : C^{n-*} \longrightarrow C$ a chain equivalence, in fact the restriction to $C(g)$ of the $\pi_1(X)$-equivariant Poincaré duality chain equivalence $[M] \cap - : C(\widetilde{M})^{n-*} \longrightarrow C(\widetilde{M})$. There is a corresponding abstraction of Poincaré-Lefschetz duality, giving an algebraic cobordism relation on n-dimensional quadratic Poincaré complexes over A, and hence an algebraic cobordism group $L_n(A)$. Algebraic surgery below the middle dimension shows that $L_n(\mathbb{Z}[\pi])$ is naturally isomorphic to the Wall surgery obstruction group $L_n(\pi)$, for any group π. The algebraic cobordism class associated to a normal map $(f,b): M \to X$

$$\sigma_*(f,b) = (C, \varphi) \in L_n(\mathbb{Z}[\pi_1(X)]) = L_n(\pi_1(X))$$

coincides with the obstruction to making $f: M \to X$ a homotopy equivalence ($K_*(f) = 0$) by surgery, which was obtained by Wall after geometric surgery below the middle dimension using intersection and self-intersection data, at least when M is a compact manifold and X is a simple Poincaré complex (in which case C is based and $\tau((1+T)\varphi_0 : C^{n-*} \to C) = 0 \in Wh(\pi_1(X))$) and b comes from a stable trivialization of $\tau_M \oplus f^*\nu_X$ for some bundle ν_X over X in the stable fibre homotopy equivalence of the Spivak normal fibration. In short, $\sigma_*(f,b) \in L_n(\pi_1(X))$ is an "instant surgery obstruction".

Andrew Ranicki
Trinity College, Cambridge (England)

Foliations of Codimension Two with all Leaves Compact

A compact leaf of a foliation is called stable if every neighborhood of the leaf contains a neighborhood which is a union of leaves. A foliation with all leaves compact and stable is called stable. It is known that a C^1-foliation which is stable is a generalized Seifert Fibre Space. We prove:

Theorem: A C^1-foliation of a compact n-manifold by closed (n-2)-manifolds is stable.

The main steps of the proof are as follows:

(1) Theorem A: Let $\mathcal{F}$ be a C^1-foliation of codimension 2 on a compact manifold. Let all leaves of $\mathcal{F}$ be compact and coherently oriented. Let B be the union of unstable leaves. Then there is a transverse manifold T s.t.

(a) T intersects every leaf of B

(b) $\partial T \cap B = \emptyset$

The proof of theorem A draws heavily from the corresponding proof of Epstein for foliations on 3-manifolds

(2) Let d_T : Manifold $\to \mathbb{N}$ be defined by $d_T(x)$ = number of points of $M_x \cap T$, M_x the leaf of $\mathcal{F}$ through x. As a consequence of theorem A, (b) one gets

Corollary A. There is a neighborhood E of $B \cap T$ in T such that $d_T | W$ is bounded for every component W of $E \sim B$.

(3) Theorem B. Let D be transverse to a foliation $\mathcal{F}$ of codimension 2 with all leaves compact (defined on a not necessarily compact manifold). Let D intersect an unstable leaf, and let B be as above. Then there is a component W of $D \sim B$ and a point $y \in D \cap B \cap \partial W$ s.t. $\forall$ neighborhood V of y in D the function d_V is unbounded on $V \cap W$.

Obviously (3) + (2) proves the theorem. Theorem B also can be used to deduce

Corollary B: Let $\mathcal{F}$ be as in theorem B, and let M be an unstable leaf.

(a) If every leaf intersecting a nbhd of M has cyclic holonomy then every nbhd of M intersects an unstable leaf M' s.t. $\chi(M') = 0$

(b) If every leaf intersecting a nbhd. of M has abelian holonomy group and if $\dim M = 2$, then $\chi(M) = 0$.

Since a fair amount is known about stable foliations on 4-manifolds the theorem leads to a number of corollaries.

Examples: (1) A foliation as in the theorem has only vanishing secondary characteristic classes and vanishing Pontrjagin algebra of the normal bdle

(2) A foliation as in the theorem on a simply-connected closed 4-manifold is an S^2-bundle over S^2.

The theorem and theorem A have independently been proved by Edwards-Millett-Sullivan in joint work.

Elmar Vogt
(Heidelberg)

Actions of Compact Lie groups on disks, where the fixed-point set of any subgroup is a disk or empty

The following problem was considered: given a compact Lie group G and a family $\mathcal{F}$ of closed subgroups of G, when is there a smooth action of G on a disk D such that D^H is a disk for any $H \in \mathcal{F}$ and empty for $H \notin \mathcal{F}$. An obvious necessary condition on $\mathcal{F}$ is that for any pair $H \triangleleft K \subseteq G$ of subgroups, where K/H has prime order, that either H and K are both in $\mathcal{F}$ or neither is in $\mathcal{F}$. It was shown that $\mathcal{F}$ must also be closed in the space of all closed subgroups of G with the Hausdorff topology, and that these two conditions are sufficient for an action of the above type to occur. In particular, the family of all subgroups H such that H_0 is abelian and H/H_0 solvable meets these conditions, and so if G is not of this form it has a fixed point free action on a disk.

Possible applications of these constructions to the problem of orbit spaces of actions on $\mathbb{R}^n$ were then discussed. In particular, if D is a ~~acts~~ disk with G-action, such that all isotropy subgroups have abelian identity component, then D/G is a well defined homotopy type, independent of choice of D, and dependent only on G. The orbit space of any action of G on a finite dimensional contractible space is contractible if and only if the homotopy type X_H corresponding to any subgroup $H \subseteq G$ is contractible, and if this is not the case then the X_H can in simple cases be used to describe what homotopy type one does get in the orbit space.

Robert Oliver
Århus University

$\Omega_*^{\mathbb{Z}/p}$

Let p be a prime number. During the first part of the talk ~~a set of~~ an independent set of multiplicative generators for $\Omega_*^{\mathbb{Z}/p}$ over Ω_* was given. Details of these may be found in a forthcoming paper "Generators of the $\mathbb{Z}/p$ bordism ring."

Many applications of this result are possible and some were mentioned in the talk. For example:

Suppose M is a unitary $\mathbb{Z}/p$ manifold (or oriented if p is an odd prime) for which the following conditions hold

(i) M has no isolated fixed points,

(ii) The normal bundle of $M^{\mathbb{Z}/p}$ in M is trivial,

(iii) No component of M has a trivial $\mathbb{Z}/p$ action,

then M is decomposable mod p.

Details of the other applications will appear soon.

Czes Kosniowski, Newcastle upon Tyne.

A spectral sequence in the continuous cohomology of topological groups.

Let $H^*(G;M)$ be the continuous cohomology of a locally compact group G with coefficients in a topological RG-module M (roughly speaking the continuous cohomology groups are the Eilenberg-MacLane groups based on continuous cochains). If G operates without fixed points on a R-paracompact space X such that there is a slice at each point and X/G is R-paracompact, then there exists a spectral sequence

$$E_2^{p,q} \cong H^p(G; H^q(K;M)) \Longrightarrow H^{p+q}(X,G;M)$$

converging to the equivariant sheaf cohomology of X. The sheaf cohomology $H^q(X; M)$ of X is suitably topologized such that the term $E_2^{p,q}$ gives a sense. A generalization of this spectral sequence to actions with fixed points lead to the following applications:

1. Computation of $H^*(X, G; M)$.
2. A method for the computation of $H^*(G; M)$ in case one has a locally compact group G operating properly on a cohomologically trivial space X.
3. A simple proof of the Smith fixed point theorems.

Andreas Stieglitz (Bochum)

Homotopy type of compact 3-manifolds.

We considered a problem of C B Thomas and G A Swarup, solved in the case of closed 3-manifolds. Let M be a connected compact 3-manifold (oriented for simplicity) with a CW structure containing a ball B, $B \subset \operatorname{Int} M$. I define $o_M \in \pi_2^*(M-B) = \pi_2(M-B)$ mod $\pi_1 M$-action to be the class of the attaching map of B to $M-B$. By obstruction theory we obtain

Result 1. Let $f: (M-B, \partial M) \to (N-C, \partial N)$ be a map inducing an isomorphism $\pi_1 M \to \pi_1 N$. There exists $g: (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ coinciding with f on the relative 1-skeleton $(M, \partial M)^1$ and of degree d if and only if $f_* o_M = d \cdot o_N$.

Result 2. Let K be an Eilenberg-Maclane space obtained from M by attaching cells of dimension ≥ 3. Then o_M corresponds to Swarup's class – defined for closed manifolds M and being the image of the fundamental class of M in $H_3(\pi_1 M; Z)$ – by the homomorphisms

$$H_3(\pi_1 M; Z) \cong H_3 K \subset H_3(K, M-B) \underset{\text{Hurewicz}}{\xleftarrow{\cong}} \pi_3^*(K, M-B) \xrightarrow{\cong} \pi_2^*(M-B).$$

Harrie Hendriks (Nijmegen, Holland)

General homotopy groups and equivalences

$\pi_k(X;E;\alpha) = \{[g] \mid g: S^k \times X \to E,\ g|* \times X = \alpha\}$ and, if $A \subset X$ is a subspace, $\alpha: V \to E$ and $\mathfrak{V}(A)$ is the set of neighborhoods $\mathcal{U} \subset V$ of A, $\pi_k((X,A);E;\alpha) = \varinjlim \{\pi_k(\mathcal{U};E;\alpha|\mathcal{U})\}_{\mathfrak{V}(A)}$ are called the general homotopy groups of E with respect to X, α resp. $(X,A), \alpha$.
Let $\mathfrak{A}$ be a covering of X, $0 < n_A \leq \infty$ for $A \in \mathfrak{A}$ and $N(\mathfrak{A}) = \{n_A \mid A \in \mathfrak{A}\}$; then $f: E \to E'$ is said to be a $N(\mathfrak{A})$-equivalence with respect to $X, \mathfrak{A}, \alpha': X \to E'$ if for every $A \in \mathfrak{A}$ there exists exactly one $[\alpha_A] \in \pi_0((X,A),E)$ such that $f_0[\alpha_A] = [\alpha'] \in \pi_0((X,A);E')$ and $f_k: \pi_k((X,A);E;\alpha_A) \to \pi_k((X,A);E';f\alpha_A)$ is bijective for $k < n_A$ and surjective for $k = n_A$. We prove: $f: E \to E'$ is a m-equivalence with respect to X (and all $\alpha': X \to E'$) for some m if for every $\alpha': X \to E'$ there exists a covering $\mathfrak{A}_{\alpha'}$ of X such that f is [locally] a $N(\mathfrak{A}_{\alpha'})$-equivalence with respect to $X, \mathfrak{A}_{\alpha'}, \alpha'$ and X satisfies a certain dimension-condition with respect to $\mathfrak{A}_{\alpha'}$.
Applications are given to situations where all the coverings of X are numerable (f.i. if f is locally a homotopy equivalence) or where all the covering sets contain only one point and f is a n-equivalence in the usual sense.

Götz Brunner (Dortmund)

Higher-dimensional knots are not determined by their complement.

The exterior of a locally flat PL knot (S^{n+2}, K) of S^n in S^{n+2} is the complement of an open regular neighbourhood of K. Two knots (S^{n+2}, K_1), (S^{n+2}, K_2) are equivalent if they are homeomorphic as pairs. It is known that there exist at most two inequivalent knots with a given exterior; we show that for $n = 3, 4$ such inequivalent pairs do exist. (For $n = 2$, we only get knots of S^2 in homotopy 4-spheres.) The method is to construct knots whose exteriors fibre over S^1 with fibre a (punctured) $(n+1)$-torus. The result would also hold for $n \geq 5$ if the existence of suitable $(n+1) \times (n+1)$ integral matrices could be demonstrated. [This result has also been proved independently by Cappell-Shaneson.].

Cameron Gordon
(Cambridge, England)

Free actions by finite groups on S^3.

Let $f : \Gamma \to \mathrm{Diff}^+ S^3$ define a free action by a finite subgroup Γ of $\mathrm{Spin}(3)$ on the 3-sphere. If the inclusion homomorphism $i : SO(4) \longrightarrow \mathrm{Diff}^+ S^3$ is a homotopy equivalence (Smale Conjecture), S^3/Γ is homotopy equivalent to $S^3/\Gamma_{\mathrm{lin}}$, one of the classical spaces of constant positive curvature. The main step in the argument is to show that an $SU(2)$-bundle over $B\Gamma$ has at least the second Chern class of a representation. (This is much weaker than flatness.) The existence of homotopically exotic actions in higher dimensions reflects the non-triviality of $\pi_*(\mathrm{Diff}^+ S^n/SO(n+1))$; in dimension 3 the best one can manage is a degree 1 map from $\Sigma^3/\Gamma \to Y^3$, ($\Gamma \cong \mathfrak{a}_4^*$) where Y^3 is exotic and Σ^3 a <u>homology</u> 3-sphere. If the Smale Conjecture is true, this implies that either there is a finite Poincaré 3-complex, which is not homotopically equivalent to a ~~ma~~ closed manifold, or that the Poincaré conjecture is false.

Charles Thomas (University College London).

Higher Whitehead torsion.

For a compact PL manifold M, let $\mathcal{H}(M)$ be the space (= simplicial set) in which a k-simplex is a k-parameter family of PL h-cobordisms on M. One knows that $\pi_0\mathcal{H}(M) \cong Wh_1(\pi_1 M)$ if $\dim M \geq 5$ (this is a reformulation of the s-cobordism theorem) and that $\pi_1\mathcal{H}(M) \cong Wh_2(\pi_1 M) \oplus Wh_1(\pi_1 M; Z_2 + \pi_2 M)$ if $\dim M \geq 7$ (this is the computation of pseudo-isotopy of Hatcher-Wagoner, and earlier of Cerf in the simply-connected case). Let $\mathcal{H}_s(M) = \varinjlim_n \mathcal{H}(M \times I^n)$ where I is the unit interval. It is easy to see that $\mathcal{H}_s$ extends to a functor on the homotopy category. Thanks to work of Hatcher, one has a non-manifold description of $\mathcal{H}_s$, that is, $\mathcal{H}_s(X)$ is homotopy equivalent to the nerve of the category whose objects are compact PL spaces containing X as a deformation retract and whose morphisms have contractible point-inverses. Starting from this result one can give a relation between the space $\mathcal{H}_s(X)$ and the algebraic K-theory of the integral group algebra $Z\pi_1 X$.

The main point is the construction and analysis of a certain functor from spaces to infinite loop spaces, $X \mapsto A(X)$. Denoting $Y \mapsto H(Y, A(X))$ the homology theory associated to $A(X)$ (this functor is characterised by the fact that it sends cofibrations to fibrations, up to homotopy, and satisfies $H(pt., A(X)) \simeq A(X)$) one finds there is a natural transformation $H(X, A(pt.)) \to A(X)$, and shows there is a commutative diagram whose rows are fibrations up to homotopy,

$$\begin{array}{ccccc} Wh_1(X) & \longrightarrow & H(X, A(pt.)) & \longrightarrow & A(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Wh(\pi_1 X) & \longrightarrow & H(B\pi_1 X, K(\mathbb{Z})) & \longrightarrow & K(\mathbb{Z}\pi_1 X) \end{array}$$

here K is algebraic K-theory, $H(?, K(\mathbb{Z}))$ the homology theory associated to $K(\mathbb{Z})$, and $B\pi_1 X$ denotes the classifying space of $\pi_1 X$.

A result about algebraic K-theory that is of interest in this connection is that $Wh(G)$ is a contractible space in certain cases, notably if G is free, or free abelian, or a torsion free one-relator group, or the fundamental group of any submanifold of the 3-sphere.

In addition to K-theory, one needs knowledge about the homotopy theoretic fibre F of $A(X) \to K(\mathbb{Z}\pi_1 X)$. Supposing that X is an Eilenberg McLane space, $X \simeq B\pi_1 X$, one can show that, for any given n, $\pi_n(F) = 0$ rationally and for almost all primes. In general, the functor $A(X)$ depends certainly not just on the fundamental group (as $K(\mathbb{Z}\pi_1 X)$ does); apparently the best one can say is that the n-type of $A(X)$ depends only on the $(n+1)$-type of X. The computation of the first non-vanishing homotopy group of F is comparatively easy. One can recover this way the Hatcher - Wagoner computation of pseudo-isotopy.

Friedhelm Waldhausen (Bielefeld)

HOMOTOPIETHEORIE

7.9 – 13.9. 1975

Some properties of the groups $J(\mathbb{C}P^n)$

The order of the group $J(\mathbb{C}P^n)$, as well as the order of the Hopf bundle in it, have been determined in 1965 (Frank Adams and Grant Walker). A similar computation for $\mathbb{H}P^n$ could be done in 1973, after the proof of the Adams conjecture. But the actual structure of $J(\mathbb{C}P^n)$ and $J(\mathbb{H}P^n)$ remains mysterious. A recent paper of Ueli Suter has thrown some light into this problem. Suter's results can be extended to give the following picture of the group $J(\mathbb{C}P^{2n})$ (The cases $J(\mathbb{C}P^{2n+1})$ and $J(\mathbb{H}P^n)$ require only minor adjustments):

A. $J(\mathbb{C}P^{2n})$ is of order $J(2n) = m(2)\cdot m(4)\cdot m(6)\cdot\cdots m(2n)$, where $m(2s)$ is the order of $J(S^{4s})$. (Adams and Walker)

B. The order $b(2n)$ of the Hopf bundle (b_{2n+1} in classical notation) is also the exponent of the group; this shows that the Hopf bundle generates a direct factor in the group. (Suter)

C. $b(2n)$ is rather close to $J(2n)$: more precisely one has
$\log b(2n) = \log (2n)! + o(n)$ and $\log J(2n) = \log b(2n) + K\cdot 2n + o(n)$.
K is a positive constant, equal to $\sum\limits_{\text{primes}} \log p\cdot(p-1)^{-2}$.

D. The group $J(\mathbb{C}P^{2n})$ has rather few cyclic factors: the p-component is the sum of at most $\left[\frac{\log n}{\log p}\right]+1$ cyclic p-groups. This bound is not always sharp, one knows an example with $p=3$. (Suter.)

E. For $p=2$, the above bound is sharp, and consequently the group $J(\mathbb{C}P^{2n})$ has <u>exactly</u> $\left[\frac{\log 2n}{\log 2}\right]$ non-trivial elementary divisors.

An interesting consequence of C) is that the number-theoretic function $m(2s)$, which has a rather wild behaviour (Bernoulli numbers!) has <u>in mean</u> a very gentle behaviour, namely $\sqrt[n]{m(2)\cdots m(2n)} \sim \text{const.}\, n^2$ (observe that $\sqrt[n]{(2n)!} \sim \text{const}\cdot n^2$ by Stirling's formula.

François Sigrist (Neuchâtel)

Immersions up to cobordism

An algebraic filtration ${}^{alg}F_k$ on $\pi_*(MO)$ (motivated by the work of R.L.W. Brown BAMS 1970, CJM 1971 } on immersing manifolds into Euclidean space up to cobordism) - ${}^{alg}F_k$ consists of those cobordism classes which under the Hurewicz homomorphism land in the image of $H_*(MO(k); Z_2)$ $[{}^{geo}F_k = \mathrm{im}\ \pi^{st}_{*+k}(MO(k))$ and ${}^{geo}F = {}^{alg}F$ in dims $\leq 10+\varepsilon$, but $[RP^{2^r-2}] \in {}^{alg}F_1$, $\notin {}^{geo}F_1$ all $r \geq 4]$. It was conjectured by the speaker in 1972 that $[RP^{2n}]$ has minimal filtration among all the indecomposables in dimension $2n$. A proof of the conjecture due to Stong [July 1975] was presented. A technique for computing filtration in terms of the generators m_n was also presented (the scheme of "houses with chimneys").

Arunas Liulevicius (Chicago)

A 2-dimensional van Kampen Theorem which computes 2nd relative homotopy groups.

(Report on work of Brown-Spencer and Brown-Higgins.)
If (X, Y) is a pointed pair, then $\pi_2(X, Y)$, with the action of $\pi_1(Y)$, and the boundary $\partial : \pi_2(X, Y) \to \pi_1(Y)$, is a "crossed module" $\mu(X, Y)$, say. (Thus $\partial(a^b) = b^{-1}(\partial a) b$, $a^{-1}a_1 a = a_1^{\partial a}$.)

Suppose given a commutative diagram of pointed pairs

$$\begin{array}{ccc} (X_0, Y_0) & \xrightarrow{f} & (X_1, Y_1) \\ i \downarrow & & \downarrow \bar{i} \\ (X_2, Y_2) & \xrightarrow[\bar{f}]{} & (X, Y) \end{array}$$

in which $X = \mathrm{Int}\,X_1 \cup \mathrm{Int}\,X_2$, $X_0 = X_1 \cap X_2$, $Y_\lambda = Y \cap X_\lambda$ and i, f are inclusions. Suppose also the X_λ, Y_λ are path-connected and $\pi_1 Y_\lambda \to \pi_1 X_\lambda$ is surjective for $\lambda = 0, 1, 2$. THEN

$$\begin{array}{ccc} \mu(X_0, Y_0) & \to & \mu(X_2, Y_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mu(X_1, Y_1) & \to & \mu(X, Y) \end{array}$$

is a pushout of crossed modules.

This reduces to the usual van Kampen theorem when $X_\lambda = Y_\lambda$ ($\lambda = 0, 1, 2, -$), and to a strong form of homotopy excision in dimension 2 when $Y_0 = Y_1 = X_0$, $Y_2 = X_2 = Y$.

The proof introduces a new category of double groupoids closely related to crossed modules, and a double groupoid $\rho(X, Y, Z)$ defined for triples with $\pi_1(Z, \xi) \to \pi_1(Y, \xi)$ trivial for all ξ, with $\rho_2(X, Y, Z)$ the homotopy classes of maps $(I^2, \dot{I}^2, \ddot{I}^2) \to (X, Y, Z)$. The fact that ρ has (i) good subdivision properties (ii) cancellation (iii) a version of the homotopy addition lemma, enables the usual proof of the van Kampen theorem to be generalised to dimension 2.

Ronnie Brown (Bangor)

Framing Lie Groups.

We introduce "intermediate" bordism groups $\Pi_{n+k}^{k,r}$ of manifolds embedded in codimension r, framed in codimension k. So for example $\Pi_{n+k}^{k,k} = \Pi_{n+k} S^k$, $\Pi_{n+k}^{k,0} = \Pi_n SO(k)$. The sequence

$$\Pi_{n+k}^{k,0} \to \Pi_{n+k}^{k,1} \to \cdots \to \Pi_{n+k}^{k,k-1} \to \Pi_{n+k}^{k,k}$$

gives rise to a filtration of $\pi_{n+k} S^k$ which starts with the "image of J".

We now define a homomorphism

$$H : \pi_{n+k+1}^{2k+1,k} \longrightarrow \pi_{n+k} S^{2k}$$

in a geometric manner which turns out to be the "Hopf invariant". This is applied to embeddings of Lie groups in the same codimension as the dimension of their smallest faithful representations to produce elements in $\pi_{n+k} S^k$ with non-zero Hopf invariants. For example $G_2 \subset \mathbb{R}^{21}$ with framing coming from the basic representation $G_2 \subset O(7)$ can be shown to represent "σ" in π_{14}^S.

R. Wood (Manchester)

Toda brackets in the homotopy of complex Stiefel manifolds

The obstruction order of the complex Stiefel manifold $W_{n,k}$ of unitary k-frames in $\mathbb{C}^n$ is the least positive integer $d = |\partial c(n,k)|$ for which there exists a map $S^{2n-1} \xrightarrow{f} W_{n,k}$ with $\deg(p \circ f) = d$, where $p : W_{n,k} \longrightarrow S^{2n-1}$ is projection on the last vector. Atiyah and Todd obtained a lower bound on $|\partial c(n,k)|$ by cohomology methods. This bound is exact at an odd prime p in a portion of the stable range where the homotopy groups of spheres are known, namely for $k \leq (p-1)(p^2-p+1)$, $n \geq 2k-1+2(p-1)^2$. (Computations of F. Sigrist show that the Atiyah-Todd bound is not always exact at $p=2$ when $k=3$.) The method of proof is to study the kernel of the e-invariant of Adams in the homotopy exact couple of the fibre bundles $U(n-k) \longrightarrow U(n) \longrightarrow W_{n,k}$. For this purpose, it is necessary to extend the work of Toda and Mimura describing the behaviour of Toda brackets in such exact sequences. The key argument shows the existence of differentials $\alpha_1 \longrightarrow \beta_1 = \underbrace{\langle \alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1 \rangle}_{p}$ in the spectral sequence corresponding to the exact couple.

Grant Walker (Manchester)

On the Lusternik - Schnirelmann Category

Define the Lusternik - Schnirelmann category cat X of a topological space X to be the smallest number n such that X can be covered by n open sets each of which is contractible in X. If X is a closed smooth manifold, then cat X is a lower bound for the number of critical points of any smooth function $X \to \mathbb{R}$. Therefore it is important to compute the category of familiar manifolds. The following results are demonstrated:

Thm. 1. $\operatorname{cat} SU(n) = n$; $\operatorname{cat} U(n) = n$.

Thm. 2. If G is a compact connected Lie group and T a maximal torus of G, then $\operatorname{cat} G/T = \frac{1}{2}(\dim G - \operatorname{rk} G) + 1$.

Thm. 3. With the notations of Thm. 2, we have $\operatorname{cat}_G T = \varphi(\pi_1 G) + 1$.

Here, for a finitely generated abelian group π, we define $\varphi(\pi)$ to be the smallest number n such that π is a direct sum of n cyclic groups; and for a subspace A of a top space X, $\operatorname{cat}_X A$ is the smallest number n such that A can be covered by n open subsets of X each of which is contractible in X

From Thm. 2 and Thm. 3 we deduce: If $\pi_1 G$ is a cyclic group, then $\operatorname{cat} G \leq \dim G - \operatorname{rk} G + 2$. In particular, $\operatorname{cat} SO(n) \leq \frac{1}{2} n(n-1) - [n/2] + 2$

Wilhelm Singhof (Köln)

Homotopy commutative diagrams

For a diagram $\mathcal{D}$ of topological spaces A_i and maps homotopy commutativity has to be defined so that, whenever there are several possible compositions of morphisms in $\mathcal{D}$ yielding maps from A_i to A_j, then not only are these homotopic, but also the connecting homotopies are homotopic themselves. Considering, for any such pair A_i, A_j, the simplex Δ_{ij} spanned by all such compositions from A_i to A_j of maps in $\mathcal{D}$, one defines $\mathcal{D}$ to be a homotopy commutative diagram (h.c.d.) if for any pair A_i, A_j there is given a map $\Phi_{ij} : A_i \times \Delta_{ij} \to A_j$ so that for each vertex p of Δ_{ij} we have $\Phi_{ij}(a,p) = p(a)$ for all $a \in A_i$, and that certain compatibility conditions are satisfied. We further define an HPB for an h.c.d. $\mathcal{D}$ as an h.c.d. $E \to \mathcal{D}$ s.t. for any h.c.d. $X \to \mathcal{D}$ there is an extended h.c.d.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & E \arrow[d] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$, and if $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & E \arrow[d] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$ is another such extension,

then it can be further extended to a h.c.d. $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr] & E \arrow[d] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

(dually, in analogy to pushouts, one defines the notion of HPO).

Contrary to usual pullbacks and pushouts, HPB's and HPO's always exist and they are unique in the obvious sense. If $\mathcal{D}$ is the special diagram

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$, the HPB-space E is

$$E = \{(a, \gamma, b) \mid a \in A, b \in B, \gamma : I \to C \text{ with } \gamma(0) = f(a), \gamma(1) = g(b)\}$$

with the subspace topology of $A \times C^I \times B$. If in this example $B = *$, we call this HPB "fibre" of $f : A \to C$. ("Cofibre" is defined dually). Assuming all spaces to be of the homotopy type of CW complexes, it is clear from Milnor's theorem that if A, B, C are such spaces then so is E.

There are various applications of these techniques to questions of homotopy theory, yielding, for instance, generalized theorems of the Blakers-Massey type by diagram-chasing.

Siegfried Thomeier
(St. John's and Konstanz (p.t.))

Families of subgroups and completion

The family $\mathcal{F}$ of closed subgroups of a compact Lie group G determines the $\mathcal{F}$-topology in the representation ring $R(G)$ given by the ideals:
$I(\mathcal{F}) = \{ I(H_1) \cdots I(H_n) \mid I(H) = \ker\{R(G) \to R(H)\};\ H \in \mathcal{F} \}$.
For every equivariant cohomology theory tom Dieck defined the theory $K_G^*[\mathcal{F}](\cdot) := K_G^*(E\mathcal{F} \times \cdot)$, where $E\mathcal{F}$ denotes classifying space for the family $\mathcal{F}$.
We show that this theory is "functorially" characterized by following properties:
(a) the natural transformation $K_G^*(\cdot) \to K_G^*[\mathcal{F}](\cdot)$ is an isomorphism on compact $\mathcal{F}$-free spaces.
(b) If G-equivariant map $f: X \to Y$ is an H-homotopy equivalence for $H \in \mathcal{F}$ then induced homomorphism $f^*: K_G^*[\mathcal{F}](Y) \to K_G^*[\mathcal{F}](X)$ is an isomorphism.
We consider special cases of the following conjecture:
For every compact G-space the derived functor $\lim\limits_{\substack{Y \subset E\mathcal{F} \\ \text{comp}}}{}^1 \{K_G^*(Y \times X)\}$ vanishes and the projection $E\mathcal{F} \times X \to X$ defines the natural equivalence:

$$\widehat{K_G^*(X)} \simeq K_G^*[\mathcal{F}](X)$$

where $\wedge$ denotes the completion in $\mathcal{F}$-topology.
In case $\mathcal{F} = \{e\}$ this is well-known Atiyah-Segal Completion theorem.

This conjecture is true for finite groups whose Sylow subgroups are abelian, quaternion group $\{1,-1,i,j,k\}$ etc. - and for some special families of other groups s - e.g. family of all cyclic subgroups.

Next we discuss the question, when $K_G^*(X)$ is complete in $\mathcal{F}$-topology. $K_G^*(X)$ is complete and Hausdorff iff every cyclic subgroup $C \subset G$ such that $X^C \neq \emptyset$ belongs to $\mathcal{F}$.

I am very grateful to Agnieszka Bojanowska for collaboration.

Stefan Jackowski
Warsaw University
Warszawa; Poland.

An approximation theorem for maps into Kan fibrations

Theorem. Let
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow[h]{} & B \end{array}$$
be a commutative square in the category of semisimplicial sets with i an inclusion and p a Kan fibration. Further let $\bar{g} : |Y| \longrightarrow |E|$ be a continuous map with $|p| \circ \bar{g} = |h|$ and $\bar{g} \circ |i| = |f|$. Then there is a homotopy $\bar{g} \simeq g'$ under $|X|$ and over $|B|$ so that $g' = |g|$ for some semisimplicial map g.

Corollary. A Kan set is strong deformation retract of the singular set of its geometric realization.

Rudolf Fritsch, Konstanz.

Sugawara type fibrations for h-spaces

For any h-wellpointed homotopy loop X (eg any CW h-space) there is the fibre sequence

$$\cdots \to \Omega(X * X) \to \Omega S X \xrightarrow{1\,\delta_m} X \xrightarrow{*} X * X \xrightarrow{\hat{q}} SX$$

where $\hat{q}$ is the Hopf construction on the left fraction q. This sequence has certain advantages over the Sugawara fibre sequence which is induced by the Hopf construction on the multiplication m: for example the connecting map δ_m is a retraction for the inclusion $\eta : X \to \Omega S X$. The fibre sequence is valid moreover for homotopy quasigroups and therefore the Sugawara sequence is also a special case. As applications there are homotopy equivalences $\Omega S X \to X \times \Omega(X * X)$, and there are relations between multiplications on X, retractions $\Omega S X \to X$ and algebras on X. In the dual situation there is a cofibre sequence

$$X \xrightarrow{\mathcal{L}} S\Omega X \longrightarrow X * \Omega X \xrightarrow{*} \cdots$$

and the corresponding homotopy equivalence $X \times \Omega X / \Omega X \to S \Omega X$ gives rise to an elementary proof that with certain restrictions $H_*(\Omega X, \Lambda)$ is the tensor algebra of the homology $H_{*-1}(X, \Lambda)$.

John Rutter, Liverpool, England.

Shape theory and homology

For $\underline{K} = \underline{Top}$ or $\underline{Top}_h$ and distinguished subcategory $\underline{P}$ (e.g. CW-spaces or finite CW-spaces) one can define a shape category $\bar{\underline{K}}$ which is equipped with the notion of a homotopy. The homotopy category $\bar{\underline{K}}_h$ is different from the Borsuk-Mardešić-category. We have the following theorems.

Th. 1: Let $i: A \subset B$ be an inclusion of compact metric spaces, then $\bar{i}$ is a cofibration. –

Let $\bar{S}(X)$ be the singular (shape-theoretical) complex where a simplex $\bar{\sigma}^n: \Delta^n \to X$ is now a morphism in $\bar{\underline{K}}$, then we have:

Th. 2: There exists a ~~morphism~~ functor $\bar{S}: \bar{\underline{K}} \to \mathcal{S}_{\bar{K}}$ (= Kan-sets) and a nat. transformation $\bar{\omega}_X: |\bar{S}(X)| \to X$ s.th. $\bar{\omega}_X$ becomes a hom. equivalence in $\bar{\underline{K}}$ for $X \in \underline{P}$.

One can define shape homology + homotopy by

$$\bar{\pi}_n(X) = \pi_n|\bar{S}(X)|, \quad \bar{H}_n(X) = H_n(\bar{S}(X))$$

It turns out that:

Th. 3: There exists a Hurewicz-homomorphism $\eta: \bar{\pi}_* \to \bar{H}_*$ such that a Hurewicz-theorem holds.

As a corollary one gets the Hurewicz-theorems of the Kuperberg, Porter type for $\check{\pi}_*$ and $\check{H}_*$. –

Th. 4: There is on $\underline{K}$ an isomorphism $\bar{H}_* \approx H^s_*$ = Sitnikov homology (for compact metric spaces).

Th. 4: For movable spaces (compact metric) one has isomorphisms $\bar{\pi}_* \approx \check{\pi}_*$, $\bar{H}_* \approx \check{H}_*$.

Th. 5: Let X = comp. metric, movable, finite-dimensional and shape simply connected. Then $\bar{\omega}_X: |\bar{S}(X)| \to X$ is a homotopy equivalence in $\bar{\underline{K}}_h$ if P is chosen to be the category of finite CW-spaces.

As a corollary one has a Whitehead-theorem for shapes.

F.W. Bauer, Frankfurt-M.

Equivalence of components in a mapping space

In the space of based maps from the m-sphere S^m to the n-sphere S^n all the (path-)components have the same homotopy type. This is not the case in the space of free maps. Thus for $m=n$ it turns out that the two components containing the maps of degree k, respectively degree l, have the same homotopy type if and only if (1) n even and $k=\pm l$; (2) n odd, $\neq 1,3,7$ and $k\equiv l$ mod 2; (3) $n=1,3,7$ and k and l arbitrary. Similar phenomena can be observed in many spaces of maps between compact, connected polyhedra X and Y. We [redacted] discussed the problem of dividing the set of components in the space of free maps of X into Y into homotopy types and presented the solution to this problem for a number of choices of the spaces X and Y, including the cases $X=Y=S^n$ mentioned above.

Vagn Lundsgaard Hansen, Köbenhavn, Danmark.

Rational homotopy types

We say a map $f: X \to Y$ is unstable, if $Sf \simeq 0$, a CW-complex K is unstable, if all attaching maps of K are unstable

Theorem: Let X be a one connected space of the homotopy type of a CW-complex. Then there exists an unstable CW-complex K_X and a mapping $h: K_X \to X$, which is a rational homotopy equivalence

The theorem is a desuspension of the well known fact that the suspension SX of a X is rational equivalent to a wedge of spheres. Since K_X is unstable we have that the Betty number $b_n = \dim_{\mathbb{Q}} H_n(X, \mathbb{Q})$ equals the number of n cells of K_X. Thus comparing with the number of n-cells K_X is a minimal CW-model for the rational homotopy type of X. More over the Adams Hilton construction on K_X yields a minimal chain algebra freely generated by $s^{-1}\tilde{H}_*(X, \mathbb{Q})$. This chain algebra has the dual properties of the minimal model (cochain algebra) of Sullivan, which represents the rational homotopy type of X as well.

Hans Joachim Baues (Bonn)

Prof M. ZISMAN

Simplicial monoids

let G and $\bar{W}$ be Kan's well known adjoint functors; in fact $\bar{W}(\Gamma)$ is also defined if Γ is a simplicial monoid and not only a simplicial group. In case where Γ is a monoid, considered as a category, its nerve $B(\Gamma)$ is a simplicial set. Dealing with a simplicial monoid Γ, we define in the same way its nerve $B(\Gamma)$, a bisimplicial set whose diagonal is denoted by $B(\Gamma)$.

theorem 1: there is a natural homotopy equivalence $B(\Gamma) \to \bar{W}(\Gamma)$

theorem 2: there is a natural simplicial map $\Gamma \to G\bar{W}\Gamma$ compatible with products up to homotopy. this is a homotopy equivalence iff $\pi_0 \Gamma$ is a group

theorem 3 is a "delooped" form of a theorem of Graeme Segal on Δ-spaces

Localization, Completion and Phantom Maps.

For an infinite CW complex W and a nilpotent space X of finite type whose rationalization is an H space, we investigate the maps $e_* : [W, X] \to [W, \prod X_{(p)}]$ and $\hat{e}_* : [W, X] \to [W, \hat{X}]$. Thereby the maps e^P_* and $\hat{e}_*$ are induced by localization and completion. As an application we obtain an important variant of Milnor's short exact sequence concerning phantom maps:

$$* \to \varprojlim{}' [\Sigma W_\alpha, X] \to [W, X] \to \varprojlim_\alpha [W_\alpha, X] \to *$$

where $\{W_\alpha\}$ is a directed system of finite subcomplexes whose union is W. In a second part, by using results of Anderson and Hodgkin the phantom maps are calculated for many examples.

W. Meier ETH (Zürich)

H. SCHEERER

Lokalisierung nilpotenter Gruppen und Räume durch Teleskope

Die folgende Ergebnisse werden in gemeinsamer Arbeit mit Peter Kahn erzielt. Resultate von Mimura, O'Neill und Toda über P-Äquivalenzen werden verallgemeinert.

Wir betrachten nur Räume, welche vom Homotopietyp nilpotenter CW-Komplexe von endlichem Typ sind. Eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe G wird mit dem Raum $K(G,1)$ identifiziert.

Definition: Ein Raum K heisst P-lokalisierbar durch ein Teleskop, kurz PLT, wenn eine Folge von P-Äquivalenzen $\{g_n : K \to K\}$ existiert, so dass die Abbildung von K in das Abbildungsteleskop $\varinjlim \{K, g_n\}$ eine P-Lokalisierung ist.

Wir zeigen, dass die Eigenschaft PLT äquivalent zu der Eigenschaft "P-universell" von Mimura et. al. ist. In der Kategorie der coendlichen Räume ist K genau dann PLT, wenn zu jeder P-Äquivalenz $K \to L$ oder $L \to K$ eine in umgekehrter Richtung existiert. Die Eigenschaft PLT hängt für coendliche oder endliche Räume nur vom rationalen Homotopietyp und der Menge P ab.

Simplicial De Rham theory and applications.

Let $X = \{X_p\}$ be a semi-simplicial set. An n-form φ on X is a collection $\{\varphi_\sigma\}$, $\sigma \in \coprod_p X_p$ of C^∞ n-forms, where φ_σ for $\sigma \in X_p$ is defined on the standard p-simplex Δ^p such that $\{\varphi_\sigma\}$ satisfies a certain compatibility condition. This defines a D.G.A over $\mathbb{R}$ denoted $A^*(X)$. Integration over Δ^n yields a map $\mathcal{I} : A^*(X) \to C^*(X)$, where $C^*(X)$ are the realvalued cochains on X.

Theorem 1. $\mathcal{J}: A^*(X) \to C^*(X)$ is a chain equivalence.

A similar construction over the rationals is used to give a proof of the Sullivan-Quillen theorem that rational homotopy types are in one-to-one correspondence with D.G.A.'s over $\mathbb{Q}$.

Theorem 1 is generalized to X a simplicial manifold (i.e. each X_p is a manifold). For example a Lie group G gives rise to the simplicial manifold NG with $NG(p) = G \times G \times \cdots \times G$ (p times) and it is well-known that the geometric realization of this is the classifying space BG. This is applied to the following situation.

Let G be a non-compact connected semi-simple Lie group with finite center, and let $f: \Gamma \to G$ be a homomorphism where Γ is a discrete group. For $x \in H^*(BG, \mathbb{R})$ we construct an explicit cochain in the Eilenberg-MacLane group cohomology $H^*(\Gamma, \mathbb{R}) \cong H^*(B\Gamma, \mathbb{R})$ representing the characteristic class $(Bf)^* x$.

For this choose a maximal compact subgroup $K \subseteq G$ and let $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{k}$ be the corresponding Lie algebras. The inclusion $K \subseteq G$ induces an isomorphism $H^*(BG) \cong H^*(BK)$ which in turn is isomorphic to $I^*(K)$, the ring of K-invariant polynomials on $\mathfrak{k}$, via the Chern-Weil homomorphism $w: I^\ell(K) \xrightarrow{\cong} H^{2\ell}(BK)$. For $P \in I^\ell(K)$ we construct a cochain as follows:

First let $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ be a Cartan decomposition and let Ω be the $\mathfrak{k}$-valued 2-form on $\mathfrak{p}$ defined by $\Omega(A,B) = -\frac{1}{2}[A,B]$, $A,B \in \mathfrak{p}$. Then $P(\Omega^l)$ is a K-invariant $2l$-form on $\mathfrak{p}$ which by left-translation defines a closed C^∞ $2l$-form $P(\Omega^l)^\sim$ on the coset space G/K. Secondly choose a left invariant Riemannian metric on G/K so that Γ acts via f as a group of isometries. For each q-tuple $(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ of elements from Γ we define a q-dimensional "geodesic simplex" $\Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_q) \subseteq G/K$ inductively as follows. $\Delta(\gamma_1)$ is the geodesic arc from $o = \{K\} \in G/K$ to $\gamma_1 o$ and $\Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ is the geodesic cone on $\gamma_1 \Delta(\gamma_2, \dots, \gamma_q)$ with toppoint o.

Theorem 2. For $P \in I^l(K)$ the characteristic class $(Bf)^*(w(P)) \in H^{2l}(B\Gamma)$ is given by the Eilenberg-MacLane cochain defined by

$$\langle (Bf)^*(w(P)), (\gamma_1, \dots, \gamma_{2l}) \rangle = \int_{\Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_{2l})} P(\Omega^l)^\sim$$

Johan Dupont, Aarhus, Denmark.

Homotopygroups of the form $[S^{d(1)} \times \dots \times S^{d(n)}, A]^0$

I) Let ω be a finite set. Homomorphisms $r_\alpha : G \to G$, $\alpha \subset \omega$ of a group G are called ω-projections, if they satisfy $r_\alpha r_\beta = r_{\alpha \cap \beta}$, $\alpha, \beta \subset \omega$, $r_\omega = id_G$, $r_\emptyset$ = trivial.

II) Main Theorem: Let G be a group with ω-projections r_α, such that ~~$r_{\alpha-\{i\}}$~~ Kern $r_{\alpha-\{i\}}$, $i \in \omega$ are abelian. Then there exist natural numbers $d(i) \geq 1$, $i \in \omega$ and a group like space A, such that $G \cong [\prod_{i \in \omega} S^{d(i)}, A]^0$. The r_α corresponds to p_α^*, where p_α is the projection $p_\alpha : \prod_{i \in \omega} S^{d(i)} \longrightarrow \prod_{i \in \alpha} S^{d(i)} \subset \prod S^{d(i)}$.

III. For the proof one needs a description of homotopygroups $G = [X, A]^0$ in terms of the $G_\alpha = [\bigwedge_{i \in \alpha} X_i, A]^0$ and the Samelson products $\kappa_{\alpha,\beta} : G_\alpha \times G_\beta \to G_{\alpha \cup \beta}$

<u>Theorem</u>: If $F = \underset{\alpha \in \omega}{*} G_\alpha$ is the free product of the G_α and R is the smallest invariant subgroup of F generated by the relations

$$[a,b] \equiv K_{\alpha,\beta}(a,b) \qquad a \in G_\alpha \subset F \ , \quad b \in G_\beta \subset F$$

then $G \cong F/R$

Werner End

Algebraic Cohomology Operations (by A. Zachariou)

Let A be the mod 2 Steenrod algebra and $H^{**}(A) = Ext_A^{**}(Z_2, Z_2)$ its cohomology. The ultimate aim in studying $H^{**}(A)$ is the long-standing problem of computing the stable homotopy groups of spheres via the Adams spectral sequence. $H^{s,t}(A)$ has been computed up to certain values of $t-s$ by Adams, Ivanovskiĭ, Linlevicius, May, Tangora. It is of interest to know any systematic phenomena in $H^{**}(A)$. In this direction the Adams periodicity and vanishing theorems are classical. On the other hand a polynomial "wedge" subalgebra of $H^{**}(A)$ has been obtained by Mahowald and Tangora. Also: Margolis, Priddy and Tangora proved that the Mahowald-Tangora wedge subalgebra is repeated every 45 stems under the action of a specific "periodicity" operation. The present writer has been able to prove the following

Theorem. $H^{**}(A)$ contains a polynomial subalgebra generated by the elements d_0, e_0, g of dimensions $(4,18), (4,21), (4,24)$ respectively, subject to the single relation $e_0^2 = d_0 g$. That is the elements $e_0^i d_0^j g^k$ with $i=0,1$, $j \geq 0$, $k \geq 0$ are linearly independent.

The basic technique used to study $H^{**}(A)$ by studying $H^{**}(B)$ for a suitable subalgebra B of A. This technique is due to Adams. It has also been used by Margolis, Priddy and Tangora. Moreover G. Whitehead showed, using the Adams technique, one can obtain

many polynomial subalgebras of $H^{**}(A)$. The Adams technique becomes really effective once Steenrod operations are known in $H^{**}(A)$. Such operations were at first obtained by A. Linlevicius. For such operations one does need to know explicit formulae ~~on~~ ~~the~~ for the corresponding cup-i-products. Such formulae were obtained for the first time by the present writer (see A. Zachariou, On cup-i-products in $F(A^*)$, M.Sc. Manchester thesis). The role of explicit formullae is crucial in describing generators of $H^{**}(A)$.
A family of such generators is the family $e_i = \langle h_{i+3}^2, h_i^2, h_{i+1}, h_i \rangle$. Other families are
$d_i = \langle h_{i+2}^2, h_i, h_{i+2}^2, h_i \rangle$ and $g_i = \langle h_{i+3}^2, h_i, h_{i+1}, h_{i+2} \rangle$
The operations Sq^i in $H^{**}(A)$ share ~~some~~ many of the properties of their topological analogues but there are some marked differences which actually lead to various problems whose investigation and solution should lead to important information about $H^{**}(A)$ and ultimately about π_*^S.

12, September, 1975

Andreas Zachariou

Zachariou

Address: Mathematical Institute
University of Athens
57 Solonos Street
Athens 143, GREECE

Random Vibrations and their Stability
18. 9. 75 – 20. 9. 75

The stability of higher order moments of stochastic systems

This lecture deals with the analysis of the stability behaviour of the moments of the statevariables of the Itô system

$$dx(t) = Ax(t)dt + \sum_i \sigma_i B_i x(t)\, dW_i \qquad (1)$$

($x \in R^n$, W_i independent zeromean Wiener processes) an of the colored noise system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_i \sigma_i B_i f_i(t) \qquad (2)$$

($x \in R^n$, f_i independent Gaussian random processes). In particular it is investigated how the maximum allowed noise intensity σ_i for exponential stability of the moments of order p depends on p. The following results are discussed

1°) If B_i has at least one eigenvalue with non-zero real part, then the moments of order p are unstable for sufficiently large p, if $\sigma_i \neq 0$. (for system (1))

2°) If all eigenvalues of all B_i are imaginary, and if all matrices B_i can be transformed to a skew symmetric matrix by a single similarity transformation PB_iP^{-1}, then the moments of all orders of (1) are exponentially stable if

$$PAP^{-1} + (PAP^{-1})^T - \frac{1}{2}\sum \sigma_i^2 \, (PB_iP^{-1})^2$$

is a Hurwitz matrix.

3°) If the Lie algebra generated by $A, B_1, .., B_m$ is solvable (that is if the smallest matrix Lie algebra containing $A, B_1, \dots, B_m$ is solvable), then explicit necessary and sufficient conditions for the stability of the moments of order p (for all p) for system (1) and for system (2) are derived. For (2) this condition only depends on the spectral density of the random processes at zero frequency, but not on the noise bandwidth.

Jacques L. Willems
University of Gent
Gent, Belgien.

Infinite Dimensional Estimation Theory Applied to a Water Pollution Problem

Ruth Curtain
Control Theory Centre
University of Warwick, U.K.

There is now a fairly complete theory for filtering, prediction and smoothing for linear infinite dimensional systems, when the stochastic disturbance in the state and observation process is of Gaussian white noise type. Recently in the finite dimensional literature there has been interest in problems where the stochastic disturbance in the state process is a jump process, and this theory has been used by H. Kwakernaak to solve a river pollution problem. He considers the problem of estimating the amount of pollution at all points along a river based on a finite number of 'noisy' measurements of the pollution concentration at fixed points along the river, ~~for~~ when he supposes that the evolution of the pollution concentration is given by a diffusion equation with a Poisson-type forcing term representing the random dumping of pollutant. In order to apply the known estimation theory for linear systems disturbed by jump processes, Kwakernaak works with a finite dimensional approximation of this model. Here the same problem is solved by modelling the state by a semigroup and the Poisson-type white noise as an infinite dimensional stochastic integral with respect to a compound Poisson process; that is, a stochastic evolution equation with a white ~~noise~~ Poisson noise forcing term. The observation is taken to be averaged measurements of the state at finitely-many points corrupted by Gaussian white noise. Using my recent theory of existence and uniqueness of solutions of stochastic evolution equations and the estimation theory for such linear stochastic evolution systems, the river pollution problem is solved, yielding explicit equations for the optimal filter, smoother and predictor. As these are the best linear estimates, the resulting equations are similar to Kalman-Bucy equations except there are infinitely many.

On the stability of the linear stochastic differential equations

Consider the linear system $\dot{x}_t = A_t x_t$, where A_t is a "real noise" matrix (stationary, ergodic). We are interested in the stability of $x \equiv 0$ (i.e. $x_t \to 0$ $(t \to \infty)$ w.p. 1).

Put $w_t = x_t / |x_t|$, $Q_t = w_t' (A_t + A_t') w_t$. Then

$$|x_t| = |x_0| \, e^{\frac{1}{2} t R_t}, \qquad R_t = \frac{1}{t} \int_0^t Q_s \, ds,$$

$$\dot{w}_t = (A_t - \tfrac{1}{2} Q_t I) w_t. \quad \text{Question: } R_t \to R \ ?$$

$R = ?$ (constant or r.v.)

Results: 1. There exists a solution w_t^0 so that (A_t, w_t^0) is stationary. For this we have

$$R_t \to R = E(Q_t^0 \mid \mathfrak{I})$$

$\mathfrak{I}$ σ-field of invariant sets

2. Take the undamped oscillator $\ddot{y} + f_t y = 0$, f_t station., ergodic, Markov. Here $Q_t = (1 - f_t) \sin 2\varphi_t$,

$$\dot{\varphi}_t = - f_t \cos^2 \varphi_t - \sin^2 \varphi_t, \quad w_t = \begin{pmatrix} \cos \varphi_t \\ \sin \varphi_t \end{pmatrix}.$$

We can prove: If $f_t \in I$, where the interval I is compact and either contained in the positive or in the negative half line, then

$$R_t \to R = \text{const}.$$

Ludwig Arnold
Studienbereich Mathematik
Universität Bremen
28 Bremen 33
Achterstr.

Asymptotic Stability of the Linear Itô Equation in Infinite Dimensions with Multiplicative Noise

Ulrich Haussmann
Mathematics Dept
Univ. of British Columbia

We consider the integral equation

$$(1) \qquad X_t = U_t X_0 + \int_0^t U_{t-s} B(X_s) dw_s$$

which is a weak form of

$$X_t = X_0 - \int_0^t A X_s ds + \int_0^t B(X_s) dw_s$$

where $\{U_t\}$ is a strongly continuous semigroup on the separable Hilbert space K with generator $-A$, w_t is a Wiener process on the Hilbert space H, and where $B(x)$ is linear in x and assumes values which are continuous linear operators from H into K. Assuming that solutions to (1) exists, we give sufficient conditions for global exponential asymptotic stability of the second moment of X_t. Further conditions are then given for the sample paths to be asymptotic to zero.

Average Value Criteria for the Stability of Passive and Symmetric Systems

We consider the stability of the systems $\dot{x} = F(t)x$ with $F(t)$ stochastic (stationary and ergodic). This equation is written as $\Sigma: \dot{x} = Ax - BK(t)Cx$ with $K(t)$ stochastic. The following results are obtained.

I. Σ is stable if (i) $G(s) = G^T(s)$ $\quad G(s) \triangleq C(Is - A)^{-1}B$

(ii) $K(t) = K^T(t)$

(iii) $\mathcal{E}\{\lambda\} < 0$ with $\lambda \triangleq \max[\lambda_+, \lambda_-]$

$$\lambda_+ \triangleq \lambda_{max}(\tilde{A}_{++} - \tilde{B}_+ K(t) \tilde{B}_+^T)$$

$$\lambda_- \triangleq \lambda_{max}(\tilde{A}_{--} + \tilde{B}_- K(t) \tilde{B}_-^T)$$

where $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ ~~where~~ is a symmetric representation of $G(s)$.

II. Σ is stable if (i) $G(s) = G^T(s)$ is positive real

(ii) $K(t) = K^T(t)$

(iii) $\mathcal{E}\{\lambda\} < 0$ with $\lambda \triangleq \max[\lambda_+, \lambda_-]$

$$\lambda_+ \triangleq \lambda_{max}(\tilde{A}_{++} - \tilde{B}_+ K(t) \tilde{B}_+^T) \;;\; \lambda_- \triangleq \lambda_{max}(\tilde{A}_{--})$$

where $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ is a symmetric and passive representation of $G(s)$.

The definitions, proofs, examples and discussion may be found in [1]

Jan C. Willems
Mathematical Institute
Un. of Groningen, Netherlands

[1] J.C. Willems and R.W. Brockett, Ricerche di Automatica, Vol. 4, 2-3, 1973, pp. 87 - 108.

Sample Stability of Coupled Linear Stochastic Systems.

The sample stability of two-degree of freedom, non-gyroscopic, linear systems subjected to stationary, parametric, random excitation of small intensity is considered. By approximating the amplitudes of the response by a two-dimensional Markov diffusion process governed by a pair of Itô equations, and using a procedure due to Khas'minskii, a necessary and sufficient condition is derived for stability with probability one. The result is compared with the condition for 2^{nd} moment stability. As an application, the flexural-torsional stability of a thin elastic beam subjected to stochastically varying end moments is discussed.

S. T. Ariaratnam
D. Tam
Solid Mechanics Division
University of Waterloo, Waterloo, Ontario
CANADA N2L 3G1.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF STOCHASTIC EQS. AND APPLICATIONS.

Consider the process $\{x^\varepsilon(t), t \geq 0\}$, with $\varepsilon > 0$ a small parameter, defined as the solution of

$$\frac{dx^\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} F(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)) + G(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)) \quad , x^\varepsilon(0) = x ,$$

Here $x^\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^n$ and $\{y^\varepsilon(t), t \geq 0\}$ is a given process with values in $\mathbb{R}^m$ and F and G are vector functions which are sufficiently regular. We assume that $y^\varepsilon(t) \equiv y(t/\varepsilon^2)$ where $\{y(t), t \geq 0\}$ is a stationary process with some other (mixing) properties and for all $x \in \mathbb{R}^n$

$$E\{F(x,y(t))\} = 0 .$$

The problem is to show that $x^\varepsilon(t)$ converges weakly (as a measure on $C([0,T], \mathbb{R}^n)$, $T<\infty$) as $\varepsilon \to 0$ to a diffusion Markov process and to characterize the latter. Results in this direction were given originally by Stratonovich and Khasminskii and improvements were given by W. Kohler and the author. Recently, sharp conditions for the validity of the result and simple proofs have been found. The improved results and techniques extend the range of applications and shed light into connections with other problems such as coupling of systems to heat baths, coupling of atoms to radiation fields etc.

George C. Papanicolaou, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.

Stability of Undamped Oscillators with Random Parameters.

In this lecture we present results of analytical and simulation studies of the undamped oscillator $\ddot{x}(t) + (\omega^2 + g(t))\,x(t) = 0$, where $g(t)$ is a physical noise process, assumed to be gaussian stationary and ergodic. Simulation studies for determining the regions of stability of stochastic differential equations have always been difficult due to the problem of determining whether, or not, a given generated sample is stable when the parameters are near the boundary of the stability region.

The studies presented in this lecture make use of a certain statistic associated with the phase process that appears to be helpful in locating the stability boundary.

Polytechnic Institute of New York
USA.

Zur Abschließung der Momentengleichungen linearer Systeme mit farbig verrauschten Parametern

Betrachtet werden lineare Systeme

$$\dot{x} = (A + B\xi)\, x \quad , \quad x = x_t \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \xi = \xi_t \in \mathbb{R}^1 \quad , \tag{1}$$

wobei A und B konstante Matrizen und ξ_t ein stationärer Gaußscher farbiger Rauschprozeß mit beschränkten Realisierungen und mit Mittelwert $E\xi_t \equiv 0$ sind. Die Anfangsbedingung x_0 sei nicht korreliert mit ξ_t, $t \geq 0$. Es sei $\eta_t = \int_0^t \xi_\tau \, d\tau$ und $\sigma_\eta^2(t) = E\eta_t^2$. Dann wird gezeigt:

1.) Die Lösung des Systems kann mit Hilfe einer wohlbestimmten Matrizenfunktion F geschrieben werden als

$$x_t = e^{B\eta_t}\, e^{At} \left\{ I + F(t, \eta, A, B, AB-BA) \right\} x_0 \quad . \tag{2}$$

Insbesondere ist $F(t, \eta, A, B, 0) \equiv 0$.

2.) Führt man eine Reihenentwicklung $e^{At} F(t, \eta, A, B, AB-BA) = \sum_{l=1}^{\infty} G_l(t, \eta, A, B, AB-BA)$ nach Termen gleicher Ordnung l in B aus, gelingt eine sukzessive Auswertung von (2) über das rekursive System

$$\dot{G}_l = A\, G_l + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{(l-k)!}\, \eta_t^{\,l-k} \left\{ AB^{l-k} G_k - B^{l-k} \dot{G}_k \right\} \quad , \quad G_l(0, \ldots) = 0 \quad , \quad l = 1, 2, \ldots \quad , \tag{3}$$

wobei $G_0 = e^{At}$ gesetzt ist.

3.) Das erste Moment $m_x(t) = Ex_t$ von x genügt der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{m}_x(t) = \left\{ A + \frac{1}{2} \frac{d\sigma_\eta^2(t)}{dt} B^2 \right\} m_x(t) \; + \; B\, H(t, \xi, \eta, A, B, AB-BA)\, m_x(0) \tag{4}$$

mit einer wohlbestimmten Matrizenfunktion H. Insbesondere gilt $H(t,\xi,\eta,A,B,0) \equiv 0$. Außerdem gilt im Grenzfall von weißem Rauschen $H \equiv 0$, und (4) reduziert sich auf die bekannte Gleichung $\dot{m}_x = \{A + \frac{1}{2}B^2\} m_x$.

Arnold Kistner
Institut A für Mechanik
Universität Stuttgart

Parametrically excited random vibrations

The differential equations of vibrations with a random parametric excitation of white noise type, linear and nonlinear damping terms and quadratic and cubic restoring terms is investigated. Such an equation describes for instance parametrically excited vibrations of curved bars and shells.
Applying the Ito calculus and the Fokker-Planck-Kolmogorov equation, a variant of an iterative method of Stratonovitch is used which is based, as the method of integro-differential equations in deterministic and narrow-band random vibrations, on several independent small parameters. In the stationary as well as in the unstationary case, probability densities of the amplitude are found by means of the function of the parabolic cylinder and the Whittaker functions. The results are compared with corresponding ones in the case of narrow-band random excitation.

Günter Schmidt
Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik
der Akademie der Wiss. d. DDR
Berlin

Random Vibrations of Periodically Time-Varying Systems with Jumping States

Linear dynamical systems with periodically time-varying coefficients and periodically jumping states are treated:

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + V(t)\,z(t) + W(t)\,r(t),$$
$$z(t) = z(t+T), \quad r \sim (0, Q(t)),$$
$$A(t),\ V(t),\ W(t),\ Q(t),\ T\text{-periodic},$$
$$x_{\nu+} = J x_{\nu-}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad J \text{ constant},$$
$$\text{where } x_{\nu\pm} = x(t = \nu T \pm 0).$$

The stability and the steady-state responses are investigated using FLOQUET's theory and LJAPUNOV's reducibility. In particular random vibrations are considered. The covariance matrix can be found either by numerical integration of the LJAPUNOV matrix differential equation or by solution of the algebraic STEIN matrix equation. As an example, random vibrations of a magnetically levitated vehicle on a flexible guideway are computed and some results are shown.

Werner Schiehlen
Lehrstuhl B für Mechanik
Technische Universität München

Numerical Calculations for Stability, etc.

Consider the diffusion process $dx = f(x)dt + \sigma(x)dw$, with (possibly degenerate) generator $\mathcal{L}$, and which has a unique (in distribution) measure. The system is of common interest in stochastic stability calculations. When the 'stability' question cannot be answered by analytic techniques, numerical calculations must be resorted to. The values (1)-(3) (for example) all yield insight into the stability properties of a system - for suitably selected sets A, B.

(1) $P_x\{x(t)$ reaches A before $B\}$

(2) $P_x\{$time in set A in interval $[0,T]$ is $\geq \alpha\}$

(3) invariant measure (or Cesaro sum of transition probabilities)

All the quantities (1)-(3) are related to (usually weak sense) solutions of elliptic or parabolic equations. We develop a computational technique of the following type. By carefully selecting finite difference approximations to the equations $\mathcal{L}V = 0$ or to $(\partial/\partial t + \mathcal{L})V(x) = 0$, we find that the coefficients in the finite difference equations are the transition probabilities of a Markov chain, say $\{\xi_n^h\}$, where h is a finite difference interval. The finite difference solutions of various types of such elliptic or parabolic equations (with additive terms and boundary conditions) can be represented as functionals of the Markov chain - which are readily computed. By defining a continuous time process $\xi^h(\cdot)$, which is a suitable continuous parameter interpolation of $\{\xi_n^h\}$, we have that $\xi^h(\cdot) \to x(\cdot)$ in the sense of weak convergence of measures, under very broad conditions, and the relevant finite difference solutions converge to the weak sense solutions of the differential equations. These solutions are the desired functionals of the diffusion.

The probabilistic approach allows much insight to be used in formulating + solving the numerical problem. Owing to the properties of weak sense approximations, the average values of many types of path functionals can be approximated.

Harold Kushner
Brown University
Providence, RI, USA

Periodic Linear Differential Stochastic Process

Periodic linear differential processes are defined as the solution of the stochastic differential equation (vector)

$$dX_t = AX_t\,dt + dW_t, \quad 0 \le t \le T,$$

with the periodicity condition

$$X_0 = X_T .$$

The properties of these processes are discussed. Estimation problems involving such processes are solved by establishing an innovation representation following Kailath and Geesey's approach.

Huibert Kwakernaak
Dept. of Appl. Math.
Twente Univ. of Technology
Enschede, Netherlands

Sprungphänomene in stochastisch erregten nichtlinearen Regelkreisen.

Für nichtlineare Regelkreise mit stationärer stochastische Erregung ergeben sich unter bestimmten Voraussetzungen mehrdeutige Teilbereiche bei den mit der Methode der statistischen Linearisierung ermittelten Eingangs/Ausgangs-Streuungskennlinien. Es kann an einem Folgeregelkreis nachgewiesen werden, daß es in solchen Fällen nicht – wie teilweise behauptet – zu sprunghafter Erhöhung bzw. Verminderung der Varianz des Ausgangssignals kommt. Stattdessen können die von

BOOTON festgestellten Amplitudenaufblähungen bestätigt werden. Sie treten aber auch bei eindeutigen Kennlinien auf, so daß die Mehrdeutigkeit nicht als notwendiges Kriterium verwendet werden kann. Die Untersuchung der Stabilität des Fehlersignals des erregten nichtlinearen Regelkreises führt auf die Frage nach der Stabilität einer homogenen stochastisch parametererregten Differentialgleichung. Ist die Nichtlinearität ein Begrenzer wie hier dargestellt, so alterniert ein Parameter zu zufälligen Zeiten zwischen zwei Werten.

Es wird einerseits ein Kriterium für fast sichere Stabilität bei unabhängigen Zeitintervallen angegeben. Zum anderen wird ein Stabilitätskriterium für den Fall hergeleitet, daß die Zeitintervalle durch einen schmalbandigen Prozess definiert werden. Dafür ist es gelungen, eine Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Amplitudenaufblähungen anzugeben.

Lutz Lambert
Institut für Elektrotechnik
Universität Erlangen

Earthquake Response Prediction Via Random Vibration Theory

This presentation reviews some recent advances in random vibration methodology to predict system response and performance during transient excitations such as earthquakes. The starting point is a "first-order" description of the frequency content of a stationary random process in terms of several spectral parameters which depend on the first few ~~months~~ moments of the spectral density function. One of these parameters is a dimensionless measure of spectral bandwidth. Most important performance measures of a random motion (such as maximum values) are shown to

depend almost solely on these spectral parameters. Examples of systems considered are linear, viscously-damped multi-degree-of-freedom structures and structure-equipment systems. A major advantage of the proposed methodology is that it can easily be extended to nonstationary random processes whose frequency content can be described by evolutionary spectra for which time-dependent spectral parameters may be computed. The results of some practical applications of the proposed analysis to earthquake response prediction are also presented.

Erik H. Vanmarcke
Dept. of Civil Engineering
M.I.T, Cambridge, Mass. 02139 USA

Seismic Response of Structures and their Reliability

The problem under consideration will be a structural model (e.g. shear beam, lumped parameter system) under a nonstationary earthquake loading, modelled as a random Gaussian process with zero mean. The reliability of the structural response process $X(t)$ is given by $1-H(t,\lambda)$, where $H(t,\lambda)$ is the probability that the process crosses the admissible barrier levels at least once within $(0,t)$. As no exact solution of the first-passage prob. is known, a known method of SHINOZUKA, leading to upper and lower bounds, will be improved. Hence, a nonstationary envelope process A is introduced first and the mean clumpsize of barriercrossings is taken into account. This approach yields an overall improvement of the lower bound (with respect to the barrier level) and gives better results for the upper bound for barrier levels of approximately $3-4\,\sigma^*$ / max rms of $X(t)$). Taking further into account, whether the process $X(t)$ remains within the safe region one cycle earlier than t, yields lower upper bounds for lower barrier levels.

Numerical examples are given for one and multi-degree-of-freedom systems, showing e.g. evolutionary power spectral density, spectral bandwidth versus time, and a comparison of different crossing rates. Finally it is shown, that a significant improvement of the bounds can be obtained by the use of the named approaches and combining them with some methods, as they were proposed from Vanmarcke for stationary processes. Structural design could be based on these methods and results.

Rudolf Grossmayer
II. Institut f. Mechanik
Technische Hochschule, Wien
Austria

Random vibrations of multi-wheeled vehicles and continuous systems - Some applications of Itô's integral

The investigation of randomly excited systems by means of stochastic Itô differential equations is based on the assumptions of independent initial state vectors and nonanticipating properties of dynamical systems. The entitled problems are examples, in which both assumptions are not satisfied.
To overcome this difficulty we make use of Itô's integral equations defined on the Wiener process respectively on the Wiener field, in order to investigate random vibrations of multi-wheeled vehicles respectively internal forces and deflections of statically loaded continuous systems.
Finally, a Wiener field process as a base model of stationary and homogeneous loading is introduced. In this dynamical case, the application of Itô's integral definition leads to integral equations which allow to determine covariance functions without any knowledge of the eigenfunctions of the continuous systems.

W. Wedig, Karlsruhe

Grundlagen der nicht-linearen Geometrie 28.9. – 4.10.75

Kennzeichnung angeordneter affiner und projektiver Geometrie durch Relationen-Algebra

Wir sprechen von einer „Punktalgebra mit Involution" $(\mathfrak{R}, +, \bar{\ }, \mathfrak{o})$, wenn uns gegeben sind

1. eine Menge $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots\}$, deren Elemente „Richtungen" heißen,
2. eine Abbildung
$$\begin{cases} \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathfrak{R}) = \text{Potenzmenge von } \mathfrak{R} \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \longmapsto \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \subset \mathfrak{R} \end{cases},$$
3. eine Involution
$$\begin{Bmatrix} \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R} \\ \mathfrak{a} \longmapsto \bar{\mathfrak{a}} \end{Bmatrix} \quad \text{mit}$$
4. $\mathfrak{o} \in \mathfrak{R}$ als einzigem Fixelement,

und wenn die folgenden Axiome gelten

(1) $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \{\mathfrak{a}\}$,

(2) $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}, \mathfrak{o}\}$,

(3) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$,

(4) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$,

(5) $\mathfrak{a} \in \mathfrak{b} + \mathfrak{c} > \mathfrak{b} \in \bar{\mathfrak{a}} + \mathfrak{c}$.

Satz Jede Punktalgebra mit Inv. definiert eine angeordnete projektive Geometrie mit

$$\mathfrak{P} := \{ \mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{a}} \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \setminus \{\mathfrak{o}\} \}$$ als

Menge der Punkte und den folgenden Punktmengen als Verbindungsgeraden zweier Punkte $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b} + \overline{\mathfrak{b}}$:

$$\{ \mathfrak{c} + \overline{\mathfrak{c}} \mid \mathfrak{c} \in \mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b} + \overline{\mathfrak{b}} \},$$

sowie der folgenden Trennbeziehung:
Sind A, B, C, D paarw. verschiedene Elemente aus $\mathfrak{P}$, so setze man

$$\{A, B\} \; T \; \{C, D\}$$

genau dann, wenn es $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \in \mathfrak{R} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ gibt mit $A = \mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{a}}$, $B = \mathfrak{b} + \overline{\mathfrak{b}}$, $C = \mathfrak{c} + \overline{\mathfrak{c}}$, $D = \mathfrak{d} + \overline{\mathfrak{d}}$, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{b}}$.

Es gilt auch die Umkehrung: Jede (nicht notwendig desarguessche) angeordnete projektive Geometrie läßt sich in der angegebenen Art und Weise durch eine geeignete Punktalgebra mit Involution darstellen.

Der so auch für nicht Desargues-Geometrien gewonnene Kalkül bietet Rechenvorteile, die denen vergleichbar sind, die in bekannter Form beim vektoriellen Kalkül im desarguesschen Fall auftreten.

Hans J. Arnold

Finite Incidence Structures with Homomorphisms.

I. We consider epimorphisms $\varphi: \mathcal{J} \to \mathcal{J}'$ of finite incidence structures (DEMBOWSKI, Finite Geometries) such that any incident pair of $\mathcal{J}'$ has at least one incident preimage. Such an epimorphism φ is called a <u>KLINGENBERG epimorphism</u> if the following property holds [points: small letters, lines: capital letters]:

$\forall p,q \in \mathcal{J} \;\; \forall L' \in \mathcal{J}' \quad p^\varphi \neq q^\varphi \wedge p^\varphi, q^\varphi \, I \, L' \Rightarrow \exists_1 L \in \mathcal{J}$ such that $p,q \, I \, L \wedge L^\varphi = L'$.

The projective Hjelmslev planes and the projective planes with homomorphism (Klingenberg ca. 1955) fulfill this condition. In these cases $\mathcal{J}'$ is a projective plane, and

(K) any two non-neighbor points have a unique joining line — and dually.

Then $\mathcal{J}$ is called a Klingenberg plane.

If furthermore

(H) any 2 neighbor points have at least two joining lines — and dually,

then $\mathcal{J}$ is called a (projective) Hjelmslev plane.

In matrix language the preimage of any element $a_{ik} \in \{0,1\}$ of the incidence matrix of $\mathcal{J}'$ is a partial matrix A_{ik}, and

$$A_{ik} \neq 0 \iff a_{ik} = 1.$$

If φ is a Klingenberg homomorphism, then

$$A_{ij} \cdot A_{kj}^T = J \qquad \text{if } A_{ij}, A_{kj} \neq 0$$

where J is a matrix with 1 in every place, and

$$A_{ij}^T A_{ik} = J.$$

The axiom H means ($\geq$ elementwise)

$$\sum_{j=1}^{b} A_{ij} A_{ij}^T \geq 2J \qquad \text{for every } i,$$

$$\sum_{i=1}^{v} A_{ij}^{+} A_{ij} \geq J \quad \text{for every } j.$$

II. These equations may be used for the construction of Klingenberg- and Hjelmslev-planes. By theorems of KLEINFELD any neighbor class of points contains t^2 points, t on every line, and dually. If J' is a projective plane of order r then J contains a $(r+1, t)$-net, hence there are $r-1$ orthogonal latin squares of length t. These results of KLEINFELD were generalized by D. JUNGNICKEL, Berlin, to the following general case: J' is connected (that is any two points or lines are equivalent by the equivalence relation which is generated by incidence), any point of J' is on at least 3 lines, and dually [to appear].

III. The construction of Klingenberg- and Hjelmslev-planes will appear in a joint paper with D. A. DRAKE in the 70^{th} birthday volume for E. Sperner in the Hamburger Abhandlungen. CRAIG's construction of uniform Hjelmslev-planes is generalized.

CRAIG's construction for $r = t = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 1&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ \hline 1&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{array}\right), \quad C = \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} A&B&O&C&O&O&O\\ O&A&B&O&C&O&O\\ O&O&A&B&O&C&O\\ O&O&O&A&B&O&C\\ C&O&O&O&A&B&O\\ O&C&O&O&O&A&B\\ B&O&C&O&O&O&A \end{pmatrix}$$

(incidence matrix of a Hjelmslev plane).

By generalisation of this construction more Hjelmslev planes are obtained (where t is not a power of r), e.g.

r	2	3	3	3	5	2	7
t	$2 \cdot 5^k$	$3 \cdot 7^k$	$3 \cdot 8^k$	$3 \cdot 11^k$	$5 \cdot 11^k$	$2 \cdot 5 \cdot 11^k$	$7 \cdot 17^k$

$(k \in \mathbb{N})$

Hanfried Lenz, 29.9.75

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Synthetische Behandlung von Cremona-Transformationen

Sei V_n^r eine Veronese-Mannigfaltigkeit und P_n ein pappuscher projektiver Raum unendlicher Ordnung der Dimension n,
sei $V^r : P_n \to V_n^r$ eine Parametrisierung von V_n^r und
sei $pr_Z : V_n^r \to P_n$ eine Projektion mit dem Zentrum Z,
die fast-bijektiv ist, d.h. pr ist auf $V_n^r \setminus M$ injektiv:
$\dim(M) < n$.

Dann gilt:

1) $C = pr_Z \circ V^r$ ist eine Cremona-Transformation und jede Cremona-Transformation läßt sich so darstellen.

2) $\dim Z = \binom{n+r}{n} - n - 2$

3) Das zu C gehörige homaloide Netz besteht genau aus allen Hyperflächen $V^{-r}(V_n^r \cap H)$: H ist Hyperebene $\langle V_n^r \rangle \supset H \supset Z$.

4) C hat den Grad $r \iff \dim(V_n^r \cap Z) \leq n-2$;
$\dim(V_n^r \cap Z) = n-1 \implies \mathrm{grad}(C) < r$

5) Seien C_1:
$$\begin{tikzcd} & V_n^r \arrow[dr, "pr_{Z_1}"] & \\ P_n \arrow[ur, "V^r"] \arrow[rr, "C_1"'] & & P_n \end{tikzcd}$$
und C_2:
$$\begin{tikzcd} V_n^t \arrow[dr, "pr_{Z_2}"] & \\ P_n \arrow[u, "V^t"] \arrow[r, "C_2"'] & P_n \end{tikzcd}$$
zwei Cremona-Transformationen, so erhält man $C_2 \circ C_1$ wie folgt:
$$\begin{tikzcd} V_n^{r\cdot t} \arrow[r, "pr_{Z_1^{(t)}}"] & V_n^t \arrow[r, "pr_{Z_2}"] & P_n \\ P_n \arrow[u, "V^{r\cdot t}"] \arrow[urr, "C_2 \circ C_1"'] & & \end{tikzcd}$$
wobei $Z_1^{(t)}$ die t-Verlagerung des Zentrum Z_1 ist.
Das Gesamtzentrum ist dann $(pr_{Z_1^{(t)}})^{-1}(Z_2)$

6) Ist C eine Cremona-Transformation vom Grade r, dann ist das homaloide Netz der Umkehrtransformation C^{-1}

genau die Menge aller Hyperflächen $C(P_{n-1}) : P_{n-1} \subset P_n$.
Ihre Ordnung ist $x \leq r^{n-1}$.
Es gilt : $C^{-1} = pr_{Z'} \circ V_n^x$

mit $Z' = \bigcap_{P_{n-1} \subset P_n} V^x \circ C(P_{n-1})$.

Jörn Lenze

Remarks on BARBILIAN domains.

Leissner proved that an arbitrarily given affine Barbilian plane must be isomorphic to a plane affine geometry over a Z-ring R and moreover did he establish the converse theorem. One of the fundamental notions in his approach of ring geometry is that of a Barbilian domain. The aim of our talk is to present sufficient conditions in case of commutative rings R which guarantee that R admits exactly one Barbilian domain. Such conditions are
Theorem: If R is euclidean, then R admits exactly one Barbilian domain.
Theorem: If $M \subseteq R$ is difference regular (i.e. $m_1 - m_2$ is unit for all distinct $m_1, m_2 \in M$) and $\# M > \#$ of maximal ideals of R, then R admits exactly one Barbilian domain.

W. Benz, 30.9.1975

Optimale Codes und Laguerre-Geometrie

Es sei K ein "Alphabet" aus $q \geq 2$ Symbolen, $V = \times_{i=1}^{n} K$ und $C \subset V$. C heißt (n,k)-Code, wenn es k Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_k$ gibt, so daß für alle $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in K$ genau ein $c \in C$ mit $\mathrm{proj}_{i_j}(c) = x_{i_j}$ gilt. Ist $K = GF(q)$ und C ein k-dim. Untervektorraum von V so, ist C ein (n,k)-Code. JOSHI zeigte, daß der Minimalabstand d bzgl. der Hamming-Metrik den Wert $n-k+1$ nicht übertreffen kann. (n,k)-Codes mit $d = n-k+1$ heißen optimal. Die optimalen Codes lassen sich durch ein geometrisches Axiomensystem umkehrbar eindeutig beschreiben. Die zugehörigen Geometrien enthalten als Spezialfälle die affinen Ebenen, Laguerre-Ebenen und Laguerre-m-Strukturen. Es wird darauf hingewiesen, daß eine Laguerreebene einer Ordnung $q \equiv 0 \mod 2$, $q \geq 8$, die eine ~~Ableitung~~ pappussche Ableitung besitzt, in der die Spuren der Kreise Kegelschnitte sind, welche die Ferngerade in einem festen Punkt berühren, nicht miquelsch zu sein braucht. Die Singleton-Schranke $d \leq n-k+1$ oder $k \leq 2$ für opt. Codes wird verbessert.

Werner Heise (TU München)

Liesche Hjelmslevgruppen.

Es wurden die von F. Bachmann definierten Hjelmslevgruppen vom Lieschen Standpunkt betrachtet.

Karl Strambach (Erlangen)

Vollständige metrische Ebenen

Die Gesamtheit der euklidischen, der minkowskischen, der elliptischen und der hyperbolisch-metrischen Ebenen beliebiger Charakteristik (auch Char 2) kann man als S-Gruppenebenen kennzeichnen (1962). Eine "inhaltliche" Charakterisierung ohne Verwendung des gruppentheoretischen Ansatzes erhält man wie folgt: Sei $(L, \varkappa)$ eine Inzidenzstruktur mit der Geradenmenge L und der Kopunktalitätsrelation $\varkappa$, in der jeder Punkt dreiseitverbindbar ist, und für die es mindestens vier Geraden gibt, von denen keine drei kopunktal sind. Sei ferner φ eine Abb. von L in die Menge der axialen Kollineationen von $(L, \varkappa)$, für die $a\varphi$ die Achse a hat für alle $a \in L$, und für die gilt: $(a,b,c) \in \varkappa \Longleftrightarrow (a\varphi)(b\varphi)(c\varphi) \in \text{Bild}\,\varphi$ [Satz von den drei Spiegelungen und seine Umkehrung]. Dann gibt es einen metrischen Vektorraum (V, Q) mit $\dim V = 3$ und $\dim V^{\perp} \leq 1$ (und Grundkörper $\neq GF(2)$ für $\text{Ind}(V,Q) = 1$], so daß $(L, \varkappa, \varphi)$ isomorph zu der metrischen Ebene über (V, Q) ist. Die metrischen Ebenen über metrischen Vektorräumen (V,Q) sind die euklidischen, die minkowskischen, die elliptischen und hyperbolisch-metrischen Ebenen bel. Char. Umgekehrt genügen diese Ebenen den genannten Forderungen.

30.5.75 Rolf Lingenberg (Karlsruhe)

Spezielle Cremonatransformationen

Eine Cremonatransformation läßt sich als spezielle Projektion aus einem Zentrum Z einer Veronesemannigfaltigkeit erklären. In diesem Rahmen werden Jonquière Transformation im P_n erklärt, die den klassischen Fall umfassen und zwar durch $V_n^r T^{r-2}(V_{n-2}^r) \subset Z \cap V_n^r$. Ihre Zentren sowie die Veroneseverlagerungen dieser Zentren werden bestimmt. Es läßt sich zeigen, daß die Inverse einer Jonquièretransformation wieder eine solche Abbildung ist und ferner daß jede Jonquièretransformation beliebigen Grades sich in ein Produkt quadratischer Jonquièretransformation zerlegen läßt. Die quadratischen Jonquière=transformation mit Ausartungen lassen sich wieder als Produkt der allgemeinen quadratischen Jonquièretransformation schreiben. Abschließend wird der Satz von M. Noether im P_2 als Anwendung bewiesen

H. Timmermann (Hamburg)

Bi-reflectionality in Classical Groups

There is a number of bi-reflectional (zweispiegeliger) groups. Bi-reflectional groups are of prime importance in any theory of groups that are generated by involutions. A brief look into Bachmann's "Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff" gives convincing evidence. We obtain the following results:
Theorem 1. Let V be a finite-dimensional regular symplectic vector space over a field K with char K ≠ 2. If τ is a symplectic transvection, then τ is not a product of two symplectic involutions.
Theorem 2. Let (V, f) [(V, Q)] be a regular metric vector space. Assume the index of V is zero. Then every isometry of V is a hyperrotation and every isometry of V is a product of two quasi-involutions. Theorem 2 contains especially, that every regular orthogonal group of index zero is bi-reflectional.

E. W. Ellers (Toronto, Canada)

Affine Räume als Gruppenräume orthogonaler Gruppen

Eine Gruppe G mit einem aus Involutionen bestehenden Erzeugendensystem S nennen wir eine T-Gruppe, wenn S invariant in G ist und wenn für S der Transitivitätssatz erfüllt ist. Einer T-Gruppe (G, S) ordnen wir einen Gruppenraum $\mathfrak{A}(G,S)$ zu: Die Elemente von S seien die Punkte, die Mengen $G(a,b) = \{x \in S : abx \in S\}$ für $a \neq b$ seien die Geraden des Gruppenraumes.
Es wird gezeigt: Ist $\mathfrak{A}$ ein pappusscher affiner Raum ($\dim \mathfrak{A} \geq 2$), so gibt es eine T-Gruppe (Γ, Σ) orthogonaler Abbildungen eines regulären metrischen Vektorraums (V, Q), so daß $\mathfrak{A}$ isomorph zu $\mathfrak{A}(\Gamma, \Sigma)$ ist. Σ ist dabei ein Teilsystem der Menge der einfachen Isometrien von (V, Q).
Γ ist abelsch genau dann, wenn Charakteristik $\mathfrak{A}$ $= 2$ ist.

Wolfgang Nolte (Darmstadt)

Neuere Ergebnisse über Verbindungsräume

Ein Verbindungsraum (joinspace) ist eine Struktur $\mathcal{V} = (X, \sqcup)$ mit $X \neq \emptyset$, $\sqcup : X^2 \setminus \Delta_X \to \mathfrak{P}X$, $(x \underset{\neq}{,} y) \mapsto x \sqcup y$, so daß
(L1) $x, y \in x \sqcup y$
gilt. Die Elemente von X heißen Punkte, die Teilmengen $x \sqcup y$ Linien (lines), die Operation $\sqcup$ Verbindung (join). Ein Verbindungsraum $(X, \sqcup, \parallel)$ heißt quasiaffin, wenn außerdem gilt.
(L2) $z \in (x \sqcup y) \setminus \{x\} \iff x \sqcup y = x \sqcup z$
(L3) $x \sqcup y = y \sqcup x = x \sqcup z \implies x \sqcup z = z \sqcup x$

(Linien dieser Art heißen Geraden oder straight lines),
$\parallel$ ist eine Äquivalenzrelation (Parallelität) zwischen den Linien mit

(P1) Zu $x \in X$, L Linie gibt es genau ein $L' = x \sqcup y$ mit $L \parallel L'$ (Euklid-Bed),

(P2) L Gerade, $L' \parallel L \Rightarrow L'$ Gerade,

(P3) $x \sqcup y \parallel x' \sqcup y' \Rightarrow y \sqcup x \parallel y' \sqcup x'$.

(T) $x, y, z \in X$ paarweise verschieden, $x \sqcup y \parallel x' \sqcup y' \Rightarrow$ es gibt $z' \in X$ mit $x \sqcup z \parallel x' \sqcup z'$, $y \sqcup z \parallel y' \sqcup z'$.

Wichtige Beispiele sind die Gruppenräume $V(\Gamma)$ zu normal-transitiven Permutationsgruppen Γ (transitiv und $N(\Gamma_x) = \Gamma_x$); in ihnen ist $x \sqcup y := \{x\} \cup \Gamma_x(y)$ und $L \parallel L' :\Leftrightarrow \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \gamma(L) = L'$.
Genau dann ist Γ stark primitiv (d.h. zwischen Γ_x und Γ gibt es keine echte Halbgruppe), wenn es zu $x, y \in X$ und jeder Linie L Pkte $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ mit $x_i \sqcup x_{i+1} \parallel L$ gibt. Allgemein ist über Beziehungen zwischen Γ und $V(\Gamma)$ noch wenig bekannt. Um zu schönen Sätzen zu kommen, erweist es sich als zweckmäßig, fastaffine Räume zu betrachten: Ein quasiaffiner Raum heißt fastaffin, wenn: (P3') $x \sqcup y \parallel y \sqcup x$,

(G1) G Gerade, L Linie $\neq G \Rightarrow |L \cap G| \leq 1$

(G2) Zu $x, y \in X$ gibt es $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, so daß alle $x_i \sqcup x_{i+1}$ Geraden sind. Beispiel: $X = F^n$, F Fastkörper (mit $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$), $\Gamma := \{x \mapsto \alpha x + v \mid x, v \in X, \alpha \in F \setminus \{0\}\}$.
Über endliche fastaffine Räume ist bereits einiges bekannt (ANDRÉ: On finite non-commutative spaces, Math Centre tracts 55, 1974, 60–107):
(1) Alle Linien haben gleich viele Pkte, die Ordnung n des Raumes, (2) $|X| = n^d$, d heißt Dimension, (3) Flats und Unterräume stimmen überein, (4) ist $x \sqcup y$ keine Gerade, so gehen durch x, y genau n Linien. – Ist ein endlicher Gruppenraum $V(\Gamma)$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

fastaffin, so ist Γ eine Frobeniusgruppe mit elementar abelschem Frobeniuskern, und Γ ist durch $v(\Gamma)$ eindeutig bestimmt.

1.10.75 Johannes Andrè (Saarbrücken)

ZUR GEOMETRIE INVOLUTORISCH ERZEUGTER GRUPPEN

Sei G eine endliche Gruppe, welche von einem invarianten System S involutorischer Elemente erzeugt wird. Sind a, b, x, y, z Elemente aus dem Erzeugendensystem, für welche die Produkte ab, abx, aby, abz Involutionen sind, so sei das Produkt xyz (stets) ein Element aus dem Erzeugendensystem. Gibt es zu S Elemente a, b, c mit $abc = 1$, so ist die Gruppe G eine Hjelmslev-Gruppe bezüglich eines Erzeugendensystems $S^* \subseteq S$, oder die Gruppe $G/O(G)$ ist zu einer der folgenden Gruppen isomorph:

$PGL(2,n)$, $n \equiv 1 \pmod 2$, $n \geq 3$

$PSL(2,n)$, $n \equiv 1 \pmod 2$, $n \geq 4$

$PSU(3,16)$.

H. Ott (Giessen)

Charakterisierung von reellen kubischen Kurven

Kurven in der reellen projektiven Ebene vom Punktordnungswert 3 (nach Haupt und Künneth), die dem Satz von Pappus genügen, sind genau die reellen algebraischen Kurven 3. Grades oder geeignete Abschnitte von solchen.

Ludwig Bieseber (Münster)

Über unendliche Steinersysteme mit Faserung

<u>Def.:</u> Ein (t,k,v)-Steinersystem heißt <u>gefasert</u> $:\Longleftrightarrow$

1.) $\bigvee_{\sigma=(a_1,\dots,a_v)\in\mathcal{S}_v} \quad \bigvee_{G^*\subseteq G} \quad \dot{\bigcup}_{i=1}^{v} \sigma^i(G^*) = G$ (G = Geradenmenge)

2.) $G = \dot{\bigcup}_{i\in I} G_i \quad (|I|>1)$

3.) $\bigwedge_{i\in I} \dot{\bigcup}_{g\in G_i} g = V$ (V = Punktmenge)

4.) $\bigwedge_{i,j\in I} |G_i| = |G_j|$

<u>Satz:</u> Für alle $1<t<k\in\mathbb{N}$ existiert ein gefasertes $(t,k,\aleph_0)$-Steinersystem

Egmont Köhler, Hamburg

30.9.75

About a transformation of a Desarguesian plane of characteristic 2.

$K = GF(q^2)$, $F = GF(q)$ $\quad q = 2^h$. $\quad K = S\cup D$ s.r. $S\cap D = \emptyset$

($d\in D \Longleftrightarrow x^2+x+d=0$ is solvable in K)

$\mathcal{A}$ = the affine plane over K. We can divide lines of $\mathcal{A}$ into 4 types. Colouring the points belonging to two of the four types of the lines we can define an incidence structure Π having the same points of $\mathcal{A}$ and as lines 1) the two types of lines of $\mathcal{A}$ we broken colouring them 2) the other two types as the ones of $\mathcal{A}$. Π is an affine plane of order 2. The ternary ring of Π is the field $K \Longrightarrow \Pi \cong \mathcal{A}$.

The isomorphism $\alpha:\Pi\to\mathcal{A}$ can be expressed (in terms of homog. coordinates) as follows: $\alpha[(x,y,z)] = (x,y,z) \Longleftrightarrow z=0$ or $xz^{-1}\in D$

$$\alpha[(x,y,z)] = (x^q, y^q, z^q) \Longleftrightarrow xz^{-1}\in S$$

Best results perhaps starting from $GF(2^{2h+1})$.

Rita Vincenti

Eine inzidenzgeometrische Kennzeichnung der geschlitzten kinematischen Räume

Ein Quadrupel $(P, \mathfrak{G}, \|_\ell, \|_r)$, bestehend aus einem geschlitzten Raum $(P, \mathfrak{G})$ und zwei Parallelrelationen $\|_\ell$ und $\|_r$ heißt geschlitzter Doppelraum, wenn für je zwei sich schneidende Geraden A und B und für je zwei Punkte $a \in A$, $b \in B$ sich auch die l-Parallele zu B durch a und die r-Parallele zu A durch b schneiden. Wenn $(P, \mathfrak{G}, \cdot)$ ein geschlitzter kinematischer Raum ist, so ist $(P, \mathfrak{G}, \|_\ell, \|_r)$ mit $\|_\ell := \{(A,B) \in \mathfrak{G} \times \mathfrak{G};\ \exists\, c \in P \text{ mit } A = cB\}$ und $\|_r := \{(A,B) \in \mathfrak{G} \times \mathfrak{G};\ \exists\, c \in P \text{ mit } A = Bc\}$ ein geschlitzter Doppelraum. Umgekehrt läßt sich jeder geschlitzte Doppelraum $(P, \mathfrak{G}, \|_\ell, \|_r)$ mit $\dim P \geq 3$ und $\operatorname{ord}(P, \mathfrak{G}) \geq 4$ auf diese Weise aus einem geschlitzten kinematischen Raum gewinnen.

Hans-Joachim Kroll (TU München)

l-Kurven und Codes.

Eine Punktmenge $\mathcal{L}$ eines projektiven Raumes $PG(r,q)$ heißt vom Typ d, wenn in $\mathcal{L}$ je $d-1$ Punkte linear unabhängig sind, jedoch d linear abhängige Punkte in $\mathcal{L}$ existieren. Von l-Kurven (das sind l-elementige Punktmengen in $PG(r,q)$ vom Typ $r+2$) ausgehend, wurden Punktmengen vom Typ $d=4$ konstruiert, die die Schranke von Varšamov-Gilbert wie auch die Mächtigkeit vergleichbarer BCH-Mengen weit übertreffen. Mit diesen Mengen lassen sich lineare (n,k)-Codes mit hoher Informationsrate gewinnen, die 1-korrigierbar und 2-prüfbar sind.

Heinz-Richard Halder (TU München)

Parallel-translations in Minkowski and Laguerre planes

Let Π be a Minkowski or Laguerre plane, respectively.

Minkowski	Laguerre
Parallelisms are $\parallel_+$ and $\parallel_-$	Parallelism $\parallel$
The equivalence classes of $\parallel_+$ [$\parallel_-$] are called + [−] generators.	The equivalence classes of $\parallel$ are called generators

The derived affine plane Π_A consists of all circles through A, the points on them (other than A) and the generators through these points.

Minkowski	Laguerre
	Let g be a fixed generator
A (−)parallel translation α is a bijection $\Pi \to \Pi$ s.t. (1) $P \parallel_- P\alpha$, (2) $P \parallel_+ Q \Rightarrow P\alpha \parallel_+ Q\alpha$, (3) $(PQR)\alpha = P\alpha Q\alpha R\alpha$, $\forall\, P, Q, R \in \Pi$.	A parallel translation α_g is a bijection $\Pi \to \Pi$ s.t. (1) $P \parallel P\alpha_g$, (2) $(PQR)\alpha_g = P\alpha_g Q\alpha_g R\alpha_g$, (3) $P \parallel Q$ & $P = P\alpha_g \Rightarrow Q = Q\alpha_g$, $\forall\, P, Q, R$.

Here PQR is the circle through P, Q, R.

<u>Axiom</u> In a <u>parallel-translation plane</u>, for every 2 circles K, K', $\exists_1\, \alpha$ [α_g] s.t. $K\alpha = K'$ [$K\alpha_g = K'$].

Minkowski	Laguerre
For some $\underline{X} \in \Pi$ introduce Hall coordinates in $\Pi_{\underline{X}}$.	For some $\underline{X} \in g$ introduce Hall coordinates in $\Pi_{\underline{X}}$.
Then $\Pi_{\underline{X}}$ is a nearfield plane.	Then $\Pi_{\underline{X}}$ is a dual translation plane.

Let circles not through $\underline{X}$ satisfy $y = [x, a, b, c]$ ($[\,]$ a function).

Minkowski	Laguerre
Then $[x, a, b, c] = [x-a, 0, 0, 1]c + b$	Then $[x, a, b, c] = [x, a, 0, c] + b$

If Π is miquelian, then

Minkowski	Laguerre
$y = [x, a, b, c] \Rightarrow (x-a)(y-b) = c$	$y = [x, a, b, c] \Longrightarrow y - b = c(x-a)^2$.

Rafael Artzy, Philadelphia – Haifa

Point homogeneous flat affine planes

All flat projective planes $(P, \mathcal{L})$ whose automorphism group contains a 2-dimensional, connected closed subgroup Δ fixing at most one line l, are classified, except the following 2 classes: (1) $\Delta \cong L_2$, and Δ not transitive on $P \setminus l$, and (2) $\Delta \cong S_1 \times R$.

H. Groh, Kassel

Übersicht über die historische Entwicklung und die klassischen Ergebnisse in der Theorie der Cremona-Transformationen.

Dieser Vortrag sollte eine hist. Einleit. zu den hinterher gebrachten Referaten von Zenge und Timmermann sein und gleichzeitig ein heute etwas vergessenes Gebiet der Geometrie wieder in Erinnerung bringen. Es wird unter gleichzeitiger Angabe von viel älterer Literatur geschildert, wie zwar die Inversion als Beispiel einer Cr-Tr. schon lange bekannt ~~w~~ ist, die allg. quadr. Transf. sich aber erst bei Magnus (1831) findet. Nach ~~Vorarbeit~~ Vorarbeiten von J. Jonquière, von ~~ein~~ dem der nach ihm benannte Transf.-typ stammt, entwickelte L. Cremona (1830-1903) seine Theorie in den Jahren 1863-65. Dann wird auf verschiedene gelöste und ungelöste Probleme hingewiesen z. B.: Angabe eines Basissystems für alle Cr.-Transf., was man nur in der Ebene hat. Die ebenen homaloidalen Systeme bis zur Ordnung 5 werden aufgezählt, sowie die räumlichen quadr. Systeme angegeben, die zu Cremona-Transformationen der Ordnungen (2,2), (2,3), (2,4) führen. Auch L. Godeaux (1887–1975) hat sich bei seiner gewaltigen Produktion viel mit Cr-Transf. befasst und Bücher darüber veröffentlicht. Es wird im Vortrage dieses Mannes, der auch gern in OW geweilt hat, noch besonders gedacht.

W. Burau (Hamburg)

Eine Charakterisierung der Geometrie der quadratischen Polynome

Die Geometrie $(K^2, \{\{(x,f(x)) \mid x \in K\} \mid f \in K[x] \text{ vom Grad} \leq 2\}, \in)$ über einem kommutativen Körper von Charakteristik $\neq 2$ wurde durch elementare Inzidenz- u. Symmetrieeigenschaften gekennzeichnet.

H. Mäurer, Darmstadt

Generalized Coxeter diagrams for incidence structures

This is a generalization of fundamental ideas due to Tits. To every incidence structure S of rank $n \geq 3$ consisting of n "kinds" of subspaces is attached a "diagram" Δ each of whose nodes corresponds to one kind of subspaces, an "edge" joining two nodes i, j being a class of incidence structures of rank 2 including all residual structures of type (i, j) in S. It is shown that several classes of geometries like affine spaces, inversive spaces, Möbius spaces, planar spaces etc. are characterized by their diagram. Moreover several – if not all – sporadic simple groups arise as automorphism groups of geometries whose diagram is an extension of a diagram of Lie type by edges of type $\circ\overset{c}{—}\circ$ the latter standing for the class of linear spaces all of whose lines have 2 points.

F. Buekenhout (Brüssel)

A linear characterization of the non-linear geometries associated to semi-quadratic sets.

A semi-quadratic set appears as a subspace of a projective space generalizing the notion of quadric. To each semi-quadratic set, we associate the geometry of all its non empty sections by the subspaces of the projective space. We obtain so a generalization of classical Möbius, Laguerre and Minkowski geometries, since the latters can be defined as the geometries of the plane sections of a quadric and since a quadric is a particular semi-quadratic set.

We give an axiomatic characterization of the geometry of all semi-quadratic sets which have a projective dimension greater or equal to four (possibly infinite) and which radical (or subspace of the double points) has codimension at least three.

M. Percsy (Mons).

Einige Orthogonalitätsbeziehungen in Hyperbelstrukturen

Es sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}, \mathcal{G}_+, \mathcal{G}_-)$ eine Hyperbelstruktur mit Rechtecksaxiom. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}, \mathcal{G}_+, \mathcal{G}_-)$ ist eine ovoidale Minkowski-Ebene.

b) Es gibt einen Kreis $l \in \mathfrak{K}$, der auf allen Kreisen $k \in \mathfrak{K}(p,q)$ senkrecht steht. $\mathfrak{K}(p,q)$ bezeichnet hierbei das durch die

Punkte p, q mit $p \nparallel q$ gehende Kreisbüschel.

c) Es gilt der Dreispiegelungssatz:

Für $k_1, k_2, k_3 \in \mathfrak{K}(p,q)$, $p \nparallel q$ gilt: Es gibt ein $k_4 \in \mathfrak{K}(p,q)$ mit $\tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 = \tilde{k}_4$.

[$\tilde{k}_i$ bezeichnet die Spiegelung am Kreis k_i.]

Weiterhin wird eine Kennzeichnung einer Klasse von Hyperbelstrukturen angegeben, die sich mit Hilfe bestimmter scharf 3-fach transitiver Gruppen beschreiben lassen, die nicht isomorph zu einer PGL(2,K) sind.

Heinrich Wefelscheid

Über Schließungssätze, die zum Satz von Miquel äquivalent sind.

Es werden Abhängigkeiten zwischen Ausartungen bzw. Spezialisierungen des Satzes von Miquel und des Büschelsatzes in Möbiusebenen erörtert (Lit.: v.d. Waerden-Smid 35, Hesselbach 33, Dembowski 63, Freudenthal/Strambach 75, Schaeffer 74)

H. Schaeffer 2.10.75

Geometrische Bewertungen

Betrachtet man die Theorien der Ordnungs-, Inhalts- und Orientierungsfunktionen, so findet man jedesmal einen Satz der folgenden Art: Ist A ein desarguesscher affiner Raum über einem Körper K, so gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Ordnungs- (Inhalts- bzw. Orientierungsfunktionen) von A, die bei affinen Abbildungen erhalten bleiben, und der Menge der Epimorphismen von K^* auf eine (kommutative) Gruppe. Es wird eine einheitliche Beschreibung der Klassen dieser Funktionen angegeben.

Herbert Hotje

Eine Kennzeichnung der regulären euklidischen Räume

Die Frage, durch welche zusätzlichen strukturellen Gegebenheiten ein affiner Raum zu einem regulären euklidischen Raum wird, läßt sich durch eine Kennzeichnung derjenigen Systeme von Affinspiegelungen beantworten, die vollst. Systeme euklidischer Spiegelungen sind. Es zeigt sich, daß solche Systeme durch ein einziges – anschaulich einleuchtendes – Symmetrieaxiom gekennzeichnet werden können. Die Kennzeichnung umfaßt alle fanoschen und alle regulären nichtfanoschen euklidischen Räume beliebiger (auch unendlicher) Dimension ≥ 2.

Eberhard Schröder

Euklidische und pseudoeuklidische Ebenen

Obengenannte Ebenen werden beschrieben allein durch ihre Inzidenzstruktur und eine Kongruenzrelation auf der Menge der Punktpaare.

K. Sörensen

Some Classifications of Affine BARBILIAN-Planes.

Let R a Z-Ring, i.e. a ring with identity 1 and the property $a\cdot b=1$ iff $ba=1$ and $\mathcal{L}$ a BARBILIAN-domain, i.e. $\mathcal{L} \subset R\times R$ satisfies

(B_1) $(1,0)\in\mathcal{L}$

(B_2) Each $(u,v)\in\mathcal{L}$ can be completed to $\begin{pmatrix} u & v \\ s & t\end{pmatrix}\in GL_2(R)$ with $(s,t)\in\mathcal{L}$

(B_3) $\begin{pmatrix} u & v \\ s & t\end{pmatrix}\in GL_2(R)$ and $(u,v)\in\mathcal{L}$ implies $(s,t)\in\mathcal{L}$.

Every ring with identity has at least one BARBILIAN-domain, namely

$$\mathcal{L}_{max} := \{(u,v)\in R\times R \mid \begin{pmatrix} u & v \\ x & y\end{pmatrix}\in GL_2(R) \text{ is solvable in } \{x,y\}\}$$

Problem: Do there exist Z-Rings ~~with~~ which have a Barbilian domain $\mathcal{L}\neq\mathcal{L}_{max}$?

We define: 1. $\mathfrak{P} := R \times R$ (the set of the points)

2. $\mathfrak{G} := \{ G_{(a,b)}^{(u,v)} := (a,b) + R(u,v) \mid (a,b) \in \mathfrak{P}, (u,v) \in \mathfrak{L} \}$ (the set of the LINES)

3. $(a,b) \not\sim (c,d)$ iff $(a-c, b-d) \in \mathfrak{L}$ ((a,b) is NON-NEIGHBOURED to (c,d))

4. $G_{(a,b)}^{(u,v)} \parallel G_{(c,d)}^{(s,t)}$ iff $R(u,v) = R(s,t)$ (PARALLELISM)

Thm. (α) The class of the (axiomatic defined) AFFINE BARBILIAN-PLANES coinzides with the class of the above defined ring geometries $[R, \mathfrak{L}] \equiv (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \not\sim, \parallel)$

(β) $\mathrm{Aut}(R, \mathfrak{L}) < SL_2(R)$

$\mathrm{Aut}(R, \mathfrak{L}) = SL_2(R)$ iff $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{max}$

For an affine Barbilian Plane $[R, \mathfrak{L}] \equiv (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \not\sim, \parallel)$ are equivalent

Thm 1: (i) $(a,b) \not\sim (c,d)$ iff $(a,b) \neq (c,d)$

(ii) R a field ((ii) $\Rightarrow \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{max}$)

Thm 2: (i) NEIGHBOURED (Negation of $\not\sim$) is an equivalence relation

(ii) R a local ring (not necess. comm.) ((ii) $\Rightarrow \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{max}$)

Thm 3: (i) $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ is linear CONNECTED, i.e. there is <u>at least</u> one line passing through two arbitrary given points.

(ii) $R \cdot \mathfrak{L} = R \times R$ ((ii) $\Rightarrow \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{max}$)

Thm 4: (i) $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ is LINEAR UNIQUE, i.e. there is <u>at most</u> one line passing through two arbitrary given points.

(ii) R has no zero-divisors different from zero.

Thm 5: (i) $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ is an inzidence structure

(ii) R is a right Bezout-ring.

W. LEISSNER, BOCHUM

Doyen, Brüssel

Some recent results of Steiner Systems

ADMISSIBLE PARAMETERS OF "SMALL" STEINER SYSTEMS

v	S(t,k,v)		
7	S(2,3,7)	∃	1
8	S(3,4,8)	∃	1
9	S(2,3,9)	∃	1
10	S(3,4,10)	∃	1
11	S(4,5,11)	∃	1
12	S(5,6,12)	∃	1
13	S(2,3,13)	∃	2
	S(2,4,13)	∃	1
14	S(3,4,14)	∃	4
15	S(2,3,15)	∃	80
	S(4,5,15)	∄	
16	S(2,4,16)	∃	1
	S(2,6,16)	∄	
	S(3,4,16)	∃	≥ 31000
	S(5,6,16)	∄	
17	S(3,5,17)	∃	1
	S(4,5,17)	?	
	S(6,7,17)	∄	
18	S(4,6,18)	∄	
	S(5,6,18)	?	
	S(7,8,18)	∄	
19	S(2,3,19)	∃	≥ 280000
	S(6,7,19)	?	
	S(8,9,19)	∄	
20	S(3,4,20)	∃	$\geq 10^{17}$
	S(7,8,20)	?	
	S(9,10,20)	∄	
21	S(2,3,21)	∃	$\geq 2 \cdot 10^{6}$
	S(2,5,21)	∃	1
	S(2,6,21)	∄	
	S(4,5,21)	?	
	S(8,9,21)	?	
22	S(3,4,22)	∃	
	S(3,6,22)	∃	1
	S(3,7,22)	∄	
	S(5,6,22)	?	
	S(9,10,22)	?	
23	S(4,5,23)	∃	
	S(4,7,23)	∃	1
	S(6,7,23)	?	
	S(10,11,23)	?	
24	S(5,6,24)	∃	≥ 2
	S(5,8,24)	∃	1
	S(7,8,24)	?	
	S(11,12,24)	?	
25	S(2,3,25)	∃	$\geq 10^{14}$
	S(2,4,25)	∃	
	S(2,5,25)	∃	1
	S(6,7,25)	?	
	S(8,9,25)	?	
26	S(3,4,26)	∃	
	S(3,5,26)	∃	
	S(3,6,26)	∃	1
	S(7,8,26)	?	
	S(9,10,26)	?	
27	S(2,3,27)	∃	
	S(4,5,27)	?	
	S(4,6,27)	∃	
	S(8,9,27)	?	
	S(10,11,27)	?	
28	S(2,4,28)	∃	
	S(3,4,28)	∃	
	S(5,6,28)	?	
	S(5,7,28)	∃	
	S(9,10,28)	?	
	S(11,12,28)	?	

Funktionalanalysis
6.–10. Oktober 1975

Summierbare Folgen und assoziierte ORLICZ-PETTIS-Topologien.

Eine Folge $(x_n; n\in\mathbb{N})$ in einer separierten kommutativen topologischen Gruppe $(E,\mathfrak{R})$ heißt summierbar, wenn das Netz $(\sum_{n\in\sigma} x_n;\ \sigma\in\mathcal{F}(\mathbb{N}))$ konvergent ist. Dabei ist $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ die (per Inklusion gerichtete) Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. $(x_n; n\in\mathbb{N})$ heißt TF-summierbar, wenn $(x_n; n\in J)$ für alle $J\subset\mathbb{N}$ summierbar ist. (TF-summierbar steht für Teilfamilien-summierbar.)

Satz: Zu jeder kommutativen separierten topologischen Gruppe $(E,\mathfrak{R})$ gibt es eine feinste Gruppentopologie $OP(\mathfrak{R})$, die die gleichen TF-summierbaren Folgen wie $\mathfrak{R}$ besitzt. Die Zuordnung $\mathfrak{R}\mapsto OP(\mathfrak{R})$ ist funktoriell.

Ein entsprechender Satz gilt für separierte topologische lineare Räume und für separierte lokalkonvexe Räume.

Gegenstand des Vortrags sind Eigenschaften und Charakterisierungen dieser "assoziierten ORLICZ-PETTIS-Topologie". Es wird gezeigt, daß diese OP-Topologie eine Darstellung als verallgemeinerter induktiver Limes im Sinne von GARLING (Proc. London Math. Soc. 14, 1964, pp. 1-28) besitzt. Dies liefert Aussagen über die Vertauschbarkeit von OP mit Summen und Produkten und erlaubt den Vergleich von OP mit anderen assoziierten Topologien. Mit der assoziierten Folgentopologie $\mathcal{F}$ und der assoziierten ultrabornologischen Topologie UB gilt z.B. stets $\mathfrak{R}\subset\mathcal{F}(\mathfrak{R})\subset OP(\mathfrak{R})\subset UB(\mathfrak{R})$.
Für $m_0 := \{x:\mathbb{N}\to\mathbb{K};\ x(\mathbb{N}) \text{ endlich}\}$ erhält man als Nebenresultat: $\mathfrak{R} = \|\cdot\|_\infty$-Top. $\Rightarrow OP(\mathfrak{R}) = \tau(m_0, m_0^*)$ = feinste lokalkonvexe Topologie. (Dies folgt aus Ergebnissen einer gemeinsamen Arbeit mit J. BATT und J. VOIGT, München.)
$(m_0, \|\cdot\|_\infty)$ ist daher ein Beispiel eines normierten tonnelierten

Raumes, für den die ass. ultrabornologische Topologie mit der feinsten lokalkonvexen Topologie zusammenfällt.

Peter Dierolf, München.

Bemerkungen zur Separabilität der (FM)-Räume

Es wird die folgende Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Dieudonné über die Separabilität der (FM)-Räume bewiesen:

Sei (E,t) ein metrisierbarer top. lin. Raum, s eine weitere lineare Top. auf E, so daß jede t-beschränkte Menge s-präkompakt ist. Dann ist (E,s) von abzählbarem Typ.

(Dabei heißt ein top. lin. R. E von abzählbarem Typ, wenn es zu jeder Nullumgebung U eine abzählbare Menge $A \subset E$ gibt, so daß $E = A + U$)

Durch Dualisierung erhält man für lokalkonvexe Räume hieraus den folgenden Satz:

In jedem (DF)-Raum ist jede präkompakte Menge schwach metrisierbar.

Als eine Folgerung hieraus erhält man:

Ist E ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum, so genügt $(E', \beta(E',E))$ genau dann der Mackey-Konvergenzbedingung, wenn jede lineare Abbildung von E in einen Banach-Raum, die beschränkte Mengen in präkompakte Mengen überführt, kompakt ist.

H. Pfister, München

Disjoint sequences in Banach lattices.

Thm For a Banach lattice E the following are equiv:

(a) E is lattice isomorphic to an AM-space.

(b) Every normalized disjoint sequence in E_+ is ~~majorized in E''~~ equivalent to the usual basis in c_0.

(c) Every disjoint null sequence in E_+ is majorized in E''.

Tzafriri (1971) & Meyer-Nieberg (1975) have ~~shown~~ proved a corresponding fact for $L^p(\mu)$ spaces ($E \approx L^p(\mu) \Leftrightarrow$ every norm. disj ~~dis~~ seq in E_+ is equiv. to usual basis in l^p, $1 \le p < \infty$)

Our methods differ from those of the L^p-case because the space need not have an order continuous norm.

Thm A Banach lattice E is lattice isomorphic to an AM-space iff every disjoint p-summable sequence in E_+ is majorized in E''. (any $\infty > p > 1$ fixed)

Taking $p = 2$ we can easily prove:

Cor: If E is a B. lattice and every $T : l^2 \to E$ is hypermajorizing ("intégral à gauche") then E is lattice-isomorphic to an AM-space

The above work was proved jointly with H.P. Lotz

Donald Cartwright (Tübingen)

L^p-Struktur in Banachräumen (6.10.75, 10^{15}–11^{00})

Sei V ein reeller Banachraum, $1 \le p \le \infty$. Wir schreiben $V = X \oplus_p X^\perp$, falls $X, X^\perp$ Unterräume von V sind mit $V = X \oplus X^\perp$, $\|x + x^\perp\|^p = \|x\|^p + \|x^\perp\|^p$ (bzw. für $p = \infty$: $\|x + x^\perp\| = \max\{\|x\|, \|x^\perp\|\}$) für $x \in X$, $x^\perp \in X^\perp$.

Räume, für die man derartige Situationen explizit berechnen kann ($X, X^\perp$ heißen dann L^p-Summanden, die zugehörigen Projektionen L^p-Projektionen), führte motivierend zu dem folgenden

Satz: V $\mathbb{R}$-BR

(i) Für $p \neq 2$ kommutieren je zwei L^p-Projektionen

(ii) V kann nur für höchstens ein p nichttriviale (d.h. von 0, V verschiedene) L^p-Summanden haben

⚠ Einzige Ausnahme: $(\mathbb{R}^2, \|\,\|_\infty)$ $(\cong (\mathbb{R}^2, \|\,\|_1))$

Insbesondere kommutieren für $(p,q) \neq (2,2)$ und

$V \neq (\mathbb{R}^2, \|\,\|_1)$ je eine L^p-Projektion und eine L^q-Projektion (wenn auch für $p \neq q$ in einem trivialen Sinn).

Der Satz hat zur Folge, daß $\mathbb{P}_p := \{e \mid e\ L^p\text{-Proj.}$ auf $V\}$ für $p < \infty$, $p \neq 2$, eine vollständige Boolesche Algebra bildet. Die $\mathbb{R}$-Banachalgebra $C^p(V) := (\mathcal{L}(\mathbb{P}_p))^- \ (\subset L[V,V])$ läßt sich isometrisch isomorph darstellen als $C\,\Omega_p$, wo Ω_p kompakt hyperstonesch ist. Mit Hilfe maßtheoretischer Konstruktionen ist es dann möglich, V so in ein Banachraum-feld über Ω_p einzubetten, daß die L^p-Struktur von V durch charakteristische Projektionen beschrieben wird (p-Integralmodul).

Vorgetragen wurden Ergebnisse, die in den Studia Math. 55 erscheinen werden, sowie Resultate aus den Dissertationen von Herrn Evans (1974) und Herrn Dandrewit (1975).

Ehrhard Behrends (FU Berlin)

THE BOUNDED APPROXIMATION PROPERTY AND THE MULTIPLIER.

In the paper "The a.p. does not imply the bounded a.p." of T. FIGIEL and W.B. JOHNSON a banach space X with norms ν is considered, where the dual norm ν is given by

$$\nu'(f) = \|f\| + \beta \inf_{h \in H} \|f-h\|, \beta > 0, H \in F(X'); \quad (*)$$

$F(X')$ denotes the finite dimensional subspaces $H \neq \{0\}$ in X'. Let $N_\beta := \{\nu;\ \nu \text{ a norm on } X, \text{ where } \nu' \text{ is given by } (*), H \in F(X')\}$ and $N := \bigcup_{\beta > 0} N_\beta$.

The authors proved among other things, that if (X,ν) has the λ.a.p. for each $\nu \in N$, then X' has the $m\lambda$.a.p., where the multiplier $m = 2(1+4\lambda)$.
Because this result does not give the best answer for $\lambda = 1$ and because of some other reasons, this proposition will be improved by the following result.

Theorem.

If (X,ν) has the λ.a.p. for each $\nu \in N_{\beta_1}$, $\beta_1 > 2\lambda - 2$, then X' has the $m_{\lambda,\beta_1}\lambda$.a.p., where

$$m_{\lambda,\beta_1} = (\beta - 2\lambda + 2)^{-1}(\beta^2 + \beta) \qquad (**)$$

The use of this theorem will be shown by several corollaries and there will be explained, how this result is connected with other theorems in this field.

Wim Oostenbrink

W. Oostenbrink
R.U. Groningen
The Netherlands.

über eine Fortsetzungsmethode der Dualitätstheorie
lokalkonvexer Räume

Bei geeigneter Interpretation und Verallgemeinerung lassen sich aus dem Schwach-Stark-Satz von Grothendieck (Mem. Am. Math. Soc. 16 (1955), II, § 3.3) Fortsetzungssätze für Vektorfunktionen und Funktionalkalküle ableiten. Definition: Sei $\langle E_1, E_2 \rangle$ bzw. $\langle F_1, F_2 \rangle$ ein Dualsystem und Δ eine beliebige, nichtleere Teilmenge von E_1. Eine Abbildung $\varphi : \Delta \longrightarrow F_1$ hat die schwache Fortsetzungseigenschaft bzgl. obiger Dualsysteme, wenn für jedes $y_2 \in F_2$ ein $x_2 \in E_2$ existiert, so daß für alle $\delta \in \Delta$

$$\langle \delta, x_2 \rangle_{E_1, E_2} = \langle \varphi(\delta), y_2 \rangle_{F_1, F_2}$$

erfüllt ist.
Der Untervektorraum von F_1^{Δ} dieser Abbildungen $\varphi : \Delta \longrightarrow F_1$ sei $\Phi(\Delta, E_1, E_2; F_1, F_2)$. Für geeignete Topologien auf E_j, F_j, $j = 1,2$, wird die "Fortsetzungsisomorphie"

$$\Phi \cong \mathcal{L}(E_1, F_1)/\mathcal{L}_0,$$

$\mathcal{L}_0 = \{ u \in \mathcal{L}(E_1, F_1) : u(\Delta) = 0 \}$ untersucht.
Für spezielle Räume skalarer (und vektorwertiger) Funktionen ergeben sich Fortsetzungskerne. Im Falle der Lösungsräume hypoelliptischer Operatoren wendet man ein konstruktives Fortsetzungsverfahren mittels lokaler Orthogonalisierung an.

Bernhard Gramsch

Integraldarstellungen vektorwertiger linearer Abbildungen

Sei X eine Menge und F ein konvexer Kegel von Funktionen $f: X \to [-\infty, +\infty[$ mit $\sup_X(f) < \infty$, der die konstanten Funktionen enthält. Es wurde die Beweisidee des folgenden Satzes skizziert:

SATZ 1: Es ist äquivalent:

(i) Für jedes lineare $\mu: F \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mit $f \geq g \Rightarrow \mu(f) \geq \mu(g)$ $\forall f, g \in F$ gibt es ein positives Maß m_μ auf der von F erzeugten σ-Algebra in X, so daß $\mu(f) \leq \int_X f \, dm_\mu$ $\forall f \in F$.

(ii) Für jede fallende Folge (f_n) in F gilt: $\sup_X \inf_n f_n = \inf_n \sup_X f_n$. ($F$ heißt dann Dini-Kegel.)

In Zusammenarbeit mit J. D. Maitland Wright konnte dieser Satz auf den vektorwertigen Fall ausgedehnt werden.

SATZ 2: Sei V ein vollständiger Vektorverband. Dann ist äquivalent:

(i) Jeder lineare Operator $T: F \to V \cup \{-\infty\}$ mit $f \geq g \Rightarrow T(f) \geq T(g)$ $\forall f, g \in F$ hat ein V-wertiges Darstellungsmaß m_T, d.h. $T(f) \leq \int_X f \, dm_T$ $\forall f \in F$.

(ii) F ist ein Dini-Kegel.

Benno Fuchssteiner (Paderborn)

FACTORIZATION OF ABSOLUTELY CONVERGENT SERIES WITH APPLICATIONS TO FINE STRUCTURE OF BANACH SPACES.

IF (a_n) IS ANY ABSOLUTELY CONVERGENT SERIES AND S IS ANY NORMAL BK-SPACE CONTAINING φ THERE ARE SEQUENCES (b_n) IN S AND (c_n) IN S^α (KÖTHE-TOEPLITZ DUAL OF S) SUCH THAT $a_n = b_n c_n$ FOR EACH n. (JOINT WORK WITH R. L. JAMISON). THIS FACTORIZATION THEOREM CAN BE APPLIED TO PROVE

1. IF X IS A BANACH SPACE CONTAINING A COMPLEMENTED SUBSPACE ISOMORPHIC TO ~~SUBSPACE~~ $S[X]$ WHERE S IS A NORMAL BK-SPACE, THEN THE SET $\langle X \rangle$ OF CONTINUOUS LINEAR MAPPINGS WHICH FACTOR THROUGH X FORMS A BANACH OPERATOR IDEAL.

2. IF X IS A BANACH SPACE CONTAINING A SUBSPACE ISOMORPHIC TO $S[X]$ WHERE S IS A NORMAL BK-SPACE THEN THE FOLLOWING ARE EQUIVALENT FOR E ANY BANACH SPACE:

(a) $L(E,X)$ DISTINGUISHES THE ABSOLUTELY CONVERGENT SERIES IN E (I.E. IF $\sum_n \|x_n\| = \infty$ WITH EACH $x_n \in E$ THEN THERE IS T IN $L(E,X)$ WITH $\sum_n \|Tx_n\| = \infty$)

(b) THE FINITE DIMENSIONAL SUBSPACES OF E ARE UNIFORMLY ISOMORPHIC TO SUBSPACES OF X WITH ISOMORPHISMS WHICH EXTEND TO ALL OF E.

William H. Ruckle (CLEMSON / FRANKFURT)

Some Remarks on Nuclearity

The completion $\tilde{E}$ of a strongly nuclear space E has a representation as the projective limit of spaces which are either finite-dimensional or isomorphic to (s). Here (s) can be replaced by any infinite-dimensional Banach space with Schauder basis [See the talk of M. Valdivia for an improvement of the latter statement].

Let $(e) = \Lambda_\infty(n)$ be the space of all exponentially decreasing sequences. Using (e), one can introduce so-called exponential and strongly exponential spaces in the same manner as one obtains nuclear spaces and strongly nuclear spaces from (s). The completion $\tilde{E}$ of a strongly exponential space E has a representation as the projective limit of spaces which are either finite-dimensional or isomorphic to (e). Here (e) can be replaced by any infinite-dimensional separable Banach space.

The results can be ~~at~~ applied to yield special representations of ultrabornological spaces. Extensions to other nuclear sequence spaces are also possible.

H. Jarchow, University of Zürich

Nuclearity of some spaces of holomorphic functions.

Let U be an open set in a locally convex space. Let $\mathcal{B}$ be a nuclear completant bounded structure on E and $\mathcal{B}_U$ the set of elements of $\mathcal{B}$ which are relatively compact in U. A proof of the fact that uniform convergence on the elements of $\mathcal{B}_U$ is a nuclear topology on $\mathcal{O}(U)$ was sketched.

The result was proved independently by myself and P. Boland, after we discussed the matter in Cracow in 1974.

It follows that the compact open topology is nuclear on $\mathcal{O}(U)$ when U is open in a nuclear Fréchet space or in a nuclear Silva space

L. Waelbroeck

Free University of Brussels.

A property of K-Suslin spaces

We prove the following result: Let $(E,\cdot)$ be a topological group. Let A be a subset E such that it is a K-Suslin space ~~other~~ with the topology induced by the topology of E and let B be a closed subset of E. If $A\cdot B$ has the property of being of second category then $A\cdot B$ has the Baire property. As Corollary it is possible to obtain an extension of the open mapping theorem in the form given by Martineau: Let E be a topological group which is a K-Suslin space, let F a topological group which is of second category and let $f: E \longrightarrow F$ be a continuous algebraic homomorphism. Then, f is open. [It came later to my attention that this last result has been obtained by M. Nakamura in the more general context of topological spaces]

P. Pérez Carreras
University of Valencia

Structure theorems for nuclear F-spaces.

We consider the nuclear power series spaces $\Lambda_\infty(\alpha)$ and $\Lambda_1(\beta)$. Since $\Lambda_\infty(\alpha)$ belongs to Dragilev class (D_1) and $\Lambda_1(\beta)$ belongs to Dragilev class (D_2) it is known that all the operators from $\Lambda_1(\beta)$ to $\Lambda_\infty(\alpha)$ are compact. It is then left to characterize those couples (α,β) for which all the operators from $\Lambda_\infty(\alpha)$ to $\Lambda_1(\beta)$ are compact. This problem can be solved completely. The conditions obtained depend highly on the rate of growth of the sequences α and β. It also turns out that all the operators are compact iff all the generalized diagonal operators are compact. These results were obtained in collaboration with W.B. Robinson (Potsdam, N.Y.) and will be the subject of a forthcoming paper.

Nicole De Grande-De Kimpe
Vrije Universiteit Brussel,

Locally convex spaces of continuous functions on topological product spaces, (*)

We have considered the following problem: "Let $\{X_i : i \in I\}$ be a family of completely regular Hausdorff spaces. Let X be the topological product space of $\{X_i : i \in I\}$. We consider the ring of all the real-valued continuous functions on X, $C_c(X)$, provided with the compact-open topology. Let (α) be a class of locally convex spaces. We test the truth of following property for some classes (α): P_α : If $C_c(X_i) \in (\alpha)$ $\forall i \in I$, then, $C_c(X) \in (\alpha)$." We have obtained the following results: 1) If (α) is the class of all the complete (resp. sequentially complete, locally complete) locally convex spaces, then P_α is true. 2) $K_R X = \prod\{K_R X_i : i \in I\}$ (for definition of $K_R X$, see N. Noble: The continuity of functions on cartesian products. TAMS '70). 3) When (α) is either the class of all the B-complete spaces or B_r-complete spaces or Suslin spaces.

(*) The results presented here are contained in a wider paper I write together with J.L. Blasco).

Antonio Marquina
University of Valencia

Some questions of density in countable projective limits

Let X be a topological space. A "prétamis" is a binary relation between non empty subsets of X, denoted "$e \sqsubset e'$", such that (1) $e \subset e' \sqsubset e'' \subset e''' \Rightarrow e \sqsubset e'''$, (2) $e \sqsubset e' \Rightarrow e \subset e'$, (3) $e_{n+1} \sqsubset e_n, \forall n \Rightarrow \bigcap e_n \neq \phi$. It is called strict if (3) is replaced by (4) $e_{n+1} \sqsubset e_n, \forall n \Rightarrow \bar{e}_{n+1} \subset e_n$ and, for all $x_n \in e_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ is relatively compact.

Let X and Y have prétamis $\underset{(1)}{\sqsubset}$ and $\underset{(2)}{\sqsubset}$. A map f of X into Y is $\sqsubset$-stable if $e \underset{(1)}{\sqsubset} e' \Rightarrow fe \underset{(2)}{\sqsubset} fe'$. It is $\sqsubset$-continuous if, for every open subset $\omega \neq \phi$ in $f(X)$, there is some open subset $\omega' \neq \phi$ in X such that $f\omega' \sqsubset \omega$.

Examples of prétamis and of $\sqsubset$-continuous and $\sqsubset$-stable maps can easily be given in topological and metric spaces.

Theorem. Let X be the projective limit of X_n $(n \in \mathbb{N})$; denote by k_n and k_n' the canonical maps of X_{n+1} into X_n and of X into X_n. Assume that X_n has a prétamis $\underset{(n)}{\sqsubset}$, for which the k_n's are $\sqsubset$-continuous and $\sqsubset$-stable and that, moreover, the k_n's are injective or the $\underset{(n)}{\sqsubset}$ strict. Then, if $k_n X_{n+1}$ is dense in X_n for each n, $k_n' X$ is dense in X_n for each n.

Various examples of projective limits where the assumptions are satisfied can be given. Baire property for complete metric spaces, compact spaces, ... is a corollary of the theorem. (Actually, the concept of prétamis is an extension of Choquet's tamis used to prove Baire property for such spaces (C.R.A.S., 1958, 246, pp 218-220)).

By a duality argument, a general condition for countable inductive limits to be Hausdorff can be deduced.

M. De Wilde (Liège)

Über die eindeutige Fortsetzbarkeit von Verbandshomomorphismen mit Anwendungen auf die Approximationstheorie

Eine Teilmenge M eines lokalkonvexen Vektorverbandes E heißt optimales Konvergenzsystem, wenn gilt (*): Jedes punktweise auf M gegen die Identität $\underline{I}$ konvergente Netz stetiger positiver linearer Abbildungen T_α von E in sich konvergiert punktweise auf ganz E gegen $\underline{I}$. M heißt $\underline{I}$-Korovkin system, wenn (*) nur für gleichgradig stetige Netze erfüllt sein muß. Satz 1: Sei E ordnungsvollständig und folgenvollständig. E besitzt ein endliches optimales Konvergenzsystem $\Leftrightarrow E \cong \mathcal{C}(X)$,

X kompakt, enthalten in $\mathbb{R}^n$ für geeignetes n. Satz 2: Sei E ein Diniverband mit o-stetiger Topologie, M eine konvergenzadaptierte Menge und H_M der Raum der M-harmonischen Elemente (s. M. Wolff, Math. Annal. 213, 97–108 (1975)) Dann gibt es zu jedem $x \notin H_M$ eine positive, lineare stetige Abbildung T von E in sich mit $T/_M = I/_M$, also $T/_{H_M} = I/_{H_M}$ (loc. cit.), aber $Tx \neq x$. Korollar 1: Jedes I-Korovkinsystem ist auch ein universelles (d. h. $H_M = E$) Korollar 2 (gilt sogar für alle Dini-Verbände) E ist endlich erzeugt $\Longleftrightarrow$ E besitzt endliches I-Korovkinsystem. Ersetzt man I durch einen festgewählten stetigen Verbandshomomorphismus, so ergeben sich analoge Resultate.

Manfred Wolff, Universität Dortmund

Über eine Konvergenzeigenschaft in H^1-Räumen.

Wir behandeln hier $H^1(dm)$ Räume über Dirichlet-Algebren, definiert mit multiplikativen endlichen Maßen m auf einer gegebenen kompakten Gruppe. Im Falle, daß die Gruppe der Torus oder die Bohr-kompaktifizierung des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^k$ ist, geben wir hinreichende Bedingungen dafür daß der Raum $H^1(dm)$ folgende Konvergenzeigenschaft besitzt: Jede Folge $\{f_n\}$ die auf kompakten Teilmengen gleimäßig gegen f konvergiert mit $\|f_n\| \to \|f\|$, konvergiert in der Normtopologie. Diese Bedingungen ist mit bochnerschen Verallgemeinerungen der Satzes von F. und M. Riesz eng verwandt.

S. Swaminathan
Universität Dalhousie
Halifax, N.S. Kanada.

Nukleare (F)-Räume, die isomorph sind zu einem Unterraum von s.

Es wurde die folgende Charakterisierung der Unterräume von s, des Raumes der schnell fallenden Folgen, angegeben, E sei hierbei ein nuklearer (F)-Raum mit Halbnormensystem $\| \ \|_1 \le \| \ \|_2 \le \dots$:

<u>Satz</u>: E ist isomorph einem abg. Unterraum von s $\Leftrightarrow$ E hat Eigenschaft (DN).

Hierbei bedeutet

(DN): Es existiert eine stetige Norm $\| \ \|$ auf E, sodaß zu jedem k ein p existiert mit

$$\| \ \|_k \le r \| \ \| + \frac{C}{r} \| \ \|_{k+p} \quad \text{für alle } r > 0.$$

Spezialisierung von (DN) auf Köthesche Folgenräume (= nukleare (F)-Räume mit Basis) ergibt Bedingungen, die in ähnlicher Form unabhängig und etwa zu gleicher Zeit auch von Dubinsky gefunden wurden. Weitere Untersuchungen in diesem Zusammenhang führten zu einem Beispiel von M. J. Wagner für einen nuklearen (F)-Raum, der nicht Quotient von s ist. (Widerlegung einer Vermutung von Martineau). Die zu Klasse (DN) duale Klasse (Ω) läßt sich charakterisieren als Klasse derjenigen (DF)-Räume E, die gewisse exakte Sequenzen nuklearer (F)-Räume beim Übergang zum vollständigen projektiven Tensorprodukt mit E exakt lassen. Dies spielt eine wichtige Rolle bei Untersuchungen, über die an gleicher Stelle 1973 berichtet wurde.

D. Vogt (Wuppertal)

Lokalisierung der Approximationseigenschaft für gewisse Funktionenräume

Durch Verwendung eines schärferen vektorwertigen verallgemeinerten Stone-Weierstraß-Satzes, der von G. Kleinstück (1975) bewiesen wurde, gelingt es, die Voraussetzungen des Lokalisierungssatzes für die Approximationseigenschaft (A.E.) gewisser Funktionenräume abzuschwächen, über den der Autor bei der Tagung über Störungstheorie und Operatorfunktionen (Januar 75) hier berichtet hat: Die Funktionen brauchen nur auf vollständig regulären k-Räumen definiert zu sein, und oberhalb stetige Gewichtsfunktionen sind zugelassen. Dadurch ergeben sich neue Anwendungen im Zusammenhang mit holomorphen Funktionen auf unendlichdimensionalen Räumen. Insbesondere erhält man unter Benutzung von Ergebnissen von Boland-Waelbroeck (1975) bzw. Aron-Schottenloher (1974) den folgenden Satz:

Sei Ω lokalkompakt, X quasivollständiger lokalkonvexer k-Raum über $\mathbb{C}$ und Λ offene Teilmenge von $\Omega \times X$. Bezeichne π_1 die Projektion $\Omega \times X \to \Omega$ und für $t \in \pi_1(\Lambda)$ Λ_t die Menge $\{x \in X;\ (t,x) \in \Lambda\}$. Dann hat der Raum

$C\mathcal{H}(\Lambda) := \{f : \Lambda \to \mathbb{C}$ stetig; für jedes $t \in \pi_1(\Lambda)$ ist $f(t,.)$ holomorph auf $\Lambda_t\}$,

versehen mit der kompakt-offenen Topologie co,

die A.E. von Grothendieck in jedem der folgenden Fälle: (1) X_b' nuklear, oder

(2) X hat die A.E., und für jedes $t \in \pi_1(\Lambda)$ ist Λ_t endlich-Runge in X

(d.h. für jeden endlichdimensionalen Unterraum X_0 von X liegen bei $\Lambda_t^0 := \Lambda_t \cap X_0$ die Polynome bzgl. der co-Topologie dicht im Raum der holomorphen Funktionen auf Λ_t^0).

-Andere Anwendungen betreffen z.B. Garben von Null-Lösungen hypoelliptischer Differentialoperatoren und gewisse Garben der abstrakten Potentialtheorie.

(gemeinsam mit B. Gramsch und R. Meise:) K. Bierstedt (Paderborn)

Zum Radon-Nikodym-Satz für Gewichte auf von Neumann-Algebren

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, $\mathcal{A}$ eine von Neumann-Algebra auf $\mathcal{H}$, φ ein normales, halbendliches, treues Gewicht auf $\mathcal{A}$ mit modularer Automorphismengruppe Σ_φ und $\mathcal{A}^{\Sigma_\varphi}$ die von Neumann-Algebra der Σ_φ-invarianten Elemente von $\mathcal{A}$. Sei E ein Spektralmaß auf $\mathbb{R}^+$ mit Werten in $\mathcal{A}^{\Sigma_\varphi}$. Dann gilt: Durch $\varphi_E(A) := \int_{\mathbb{R}^+} \lambda \, d\varphi(E_\lambda A)$ wird ein normales Σ_φ-invariantes (i.a. nicht halbendliches) Gewicht auf $\mathcal{A}$ definiert.

Dieser Dichtebegriff erlaubt die folgende Verallgemeinerung des Radon-Nikodym-Satzes für Gewichte auf von Neumann-Algebren von PEDERSEN und TAKESAKI auf nicht notwendig halbendliche Gewichte:

Die Zuordnung $E \to \varphi_E$ ist eine Bijektion der Menge der Spektralmaße auf $\mathbb{R}^+$ mit Werten in $\mathcal{A}^{\Sigma_\varphi}$ auf die Menge der normalen, Σ_φ-invarianten Gewichte auf $\mathcal{A}$.

Eine σ-additive Abb. m vom Verband der Projektoren $P(\mathcal{H})$ von $\mathcal{H}$ in $\overline{\mathbb{R}^+}$ heiße G-Maß, falls die Menge $\mathcal{H}_m$ der Vektoren aus $\mathcal{H}$ mit $m(P_x) < \infty$ (P_x der Projektor auf den von x aufgespannten Raum) einen linearen Teilraum mit $\dim \mathcal{H}_m \geq 3$ bildet. Ist m ein G-Maß, so existiert eine eindeutig bestimmte, symmetrische, positive Sesquilinearform t_m mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(t_m) = \mathcal{H}_m$ und $m(P_x) = t_m(x,x)$ für alle normierten $x \in \mathcal{H}_m$. Die Spur ist ein normales, halbendliches, treues Gewicht auf $L(\mathcal{H})$, der Algebra aller stetigen linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$. Damit erhält man mit den obigen Resultaten die folgende Verallgemeinerung des Satzes von GLEASON über endliche Maße auf $P(\mathcal{H})$.

Ist m ein G-Maß auf $P(\mathcal{H})$ und t_m abgeschlossen, so existiert genau ein Spektralmaß E auf $\overline{\mathbb{R}^+}$ mit Werten in $L(\mathcal{H})$, sodaß für alle P aus $P(\mathcal{H})$ gilt: $m(P) = Sp_E(P)$ $(= \int_{\overline{\mathbb{R}^+}} \lambda \, d\, Sp(E_\lambda P))$.

J. Tischer (Erlangen)

Semi-embeddings of C(X), X compact.

(Joint result with N.T. Peck and H. Porta)

Definition. A bounded linear operator T from a Banach space E in a Banach space F is called a semi-embedding if T maps the closed unit ball of E onto a closed set of F and if T is one-to-one.

Theorem 1. Let $T: C(X) \to E$, X compact, be a weakly compact semi-embedding. Then X is hyper-stonian and satisfies the countable chain condition.

Theorem 2. Let X be a compact space. Then the following assertions are equivalent:

a) X is scattered (i.e. there is no continuous surjection from X onto $[0,1]$).
b) If E is a Banach space and $T: C(X) \to E$ is one-to-one but not a topological isomorphism into E then there is a complemented subspace G of $C(X)$ isomorphic to c_0 such that $T|G$ is compact.
c) Every semi embedding of $C(X)$ into a Banach space E is a topological isomorphism from $C(X)$ into E.

Theorem 3. Let X be an uncountable compact metric space and let T be a semi-embedding of $C(X)$ in a Banach space E. Then $C(X)$ contains a complemented subspace G isomorphic to $C(X)$ such that $T|_G$ is a topological isomorphism.

Heinrich P. Lotz (Urbana, Ill.)

On the multiplicative extention property in Banach algebras.

Let B be a commutative Banach algebra with identity. A closed subspace M of B is said to have the multiplicative extention property (m.e.p) in B if every continuous linear functional of norm ≤ 1 can be extended to a multiplicative linear functional (m.l.f) on B.
Hewitt and Kakutani constructed the first example of a subspace with the m.e.p in the algebra $M(G)$ of measures on a locally compact non discrete abelian group G and Phelps caracterized the m.e.p subspaces in $C(X)$, X compact Hausdorff.
We prove that a subspace M of B has the m.e.p iff every finite-dimensional subspace of M has the m.e.p and that a linear functional λ on M can be extended to a m.l.f on the

closed subalgebra generated by M if and only if $\forall \{x_1 .. x_n\} \subset M$ and every polynomial p in n variables we have that $\|[p[d(x_1) \dots d(x_n)]\| \leq \|p(x_1 \dots x_n)\|_\infty$, where $\|p\|_\infty$ is the spectral radius of $p(x_1 .. x_n)$. It then follows that every linearly independent subset of M is also algebraically independent.

In the special case that B is a function algebra on a compact uncountable metric space Δ, with Δ the maximal ideal space of B, we construct an isometry $T: B \to B$ such that TB has the m. e. p in B, or equivalently such that $\forall M$ closed subspace of B, TM has the m. e p in B.

S. Levi (PISA)

Cauchy problem with continuous boundary values.

Let Ω be a locally compact Hausdorff space (connected, non compact), on which is given a "local operator", satisfying abstract conditions of the kind satisfied by second order elliptic partial differential operators. For such an operator, we treat the Cauchy problem (evolution equation) in a $C(\bar{V})$ context (V a generic open rel. compact set $\subset \Omega$) with prescribed (continuous) boundary values independent of time. We use semigroup methods. In particular we can determine exactly for which V the given Cauchy problem has a solution. Among the V for which there is a solution the "regular" ones are characterized by $\underset{t \to +\infty}{s\text{-}\lim}\, P_t \in B(C(\bar{V})) = \{$bd. everywhere defined lin. operators on $C(\bar{V})\}$, $\{P_t\}$ being the solution semigroup. $\{P_t\}$ is a Feller s.g.; and for V regular one can reconstruct the "harmonic measures" μ_x on ∂V, corresponding to $x \in V$, by $\mu_x = \underset{t \to \infty}{w^*\text{-}\lim}\, P(t, x, \cdot)$, where $P(t, x, E)$ is the associated submarkovian transition function (in the usual sense) if Ω has countable base.

G. Lumer (Mons)

Vervollständigungen von Limesvektorräumen

Es ist das Ziel, für die Kategorie der Limesvektorräume Konstruktionsverfahren anzugeben, die für jeden Limesvektorraum E eine Vervollständigung $\hat{E}$ liefern, d.h. einen vollständigen Limesvektorraum $\hat{E}$, der einen zu E isomorphen Unterraum enthält, die üblichen kategoriellen Eigenschaften besitzt, und ein topologischer Vektorraum ist, falls E topologisch ist. Da es Limesvektorräume E mit unbeschränkten Cauchy-Filtern gibt (ein Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ heißt beschränkt, falls $\mathcal{V}\mathcal{F}$ in E gegen 0 konvergiert, wobei $\mathcal{V}$ der 0-Umgebungsfilter in $\mathbb{R}$ ist), kann man i.a. nur zeigen, daß jeder Limesvektorraum E eine β-Vervollständigung $\hat{E}$ besitzt, d.h. einen Limesvektorraum $\hat{E}$, in dem jeder beschränkte Cauchy-Filter konvergiert. Um die Eindeutigkeit der Vervollständigung zu erreichen, muß man sich auf die Kategorie der T_3-Limesvektorräume beschränken. Es stellt sich heraus, daß ein T_3-Limesvektorraum E genau dann eine T_3-Vervollständigung besitzt, falls jeder Filter $\mathcal{F}$ in E gegen 0 konvergiert, für den gilt: Für alle vollständigen T_3-Limesvektorräume M und für alle stetigen, linearen Abbildungen T von E in M konvergiert der von $T(\mathcal{F})$ erzeugte Filter in M gegen 0.

B. Müller (Mannheim)

REMARKS ON MIXED TOPOLOGIES

The triples $(E, \|\ \|, \tau)$ where $(E, \|\ \|)$ is a normed space and τ is a suitable locally convex topology on E ~~form the~~ can be regarded as the objects of a complete category MIXTOP which contains BAN as a full subcategory. It is shown how the BUCHWALTER - WAELBROECK duality can be extended to this situation and some examples of spaces of measures and continuous functions which can be regarded, in a natural way, as objects of MIXTOP or its dual category.

J. Cooper (LINZ)

Extreme Positive Operators

Let A, B denote complex commutative Banach *-algebras and $L(A,B)$ the space of continuous linear operators from A into B. Let $P \subset L(A,B)$ be the convex set of positive operators of norm ≤ 1. If A^2 is total in A and B is semi-simple and symmetric, the multiplicative operators in P are extreme points of P. If, on the other hand, $e \in A$ and it is assumed that $\|T\| = \|Te\|$ for $T \in P$, then any extreme point of P satisfies $TeTab = TaTb$ for $a, b \in A$. If, in addition B is a B^*-algebra, the extreme points of P are multiplicative.

M. Solveig Espelie, (Washington, DC)

Über die spektrale Vielfachheitsfunktion.

Es werden Beziehungen zwischen einer in [Kolb, Rev. Colombiana Mat. 9 (1975)] behandelten Version der Vielfachheitstheorie eines normalen Operators in einem separablen Hilbertraum, die von der zyklischen Multiplikationsoperatorform ausgeht, und Ergebnissen von [Abrahamson-Kriete, Indiana Univ. Math. J. 22 (1973)], [Nadkarni, Studia Math. 47 (1973)] über die Vielfachheitstheorie eines Multiplikationsoperators M_ϕ in $L^2(X,\mu)$ (X separabler, vollständiger metrischer lokalkompakter Raum, μ endliches positives Borelmaß auf X, $\phi: X \to \mathbb{C}$ beschränkte Borelfunktion) diskutiert. Durch Kombination von Ergebnissen aus [K] und [N] wird eine neue Formel für die von Neumannsche Vielfachheitsfunktion k von M_ϕ gewonnen, die dazu ~~angegeben~~ eingesetzt wird, auf eine ~~von~~ in [A-Kr] gestellte Frage die folgende Antwort zu geben: Sei $\nu = \mu \circ \phi^{-1}$, sei $u := \{z : k(z) < \infty\}$. Dann: (1) Es existiert eine μ-Nullmenge $N \subset X$ so daß $k(z) = \#(\phi|X-N)^{-1}\{z\}$ ν-f.ü. (2) $k(z) = \#\phi^{-1}\{z\}$ ν-f.ü. gilt genau dann, wenn für jede μ-Nullmenge $N \subset X$ die Menge $\phi(N) \cap u$ in einer ν-

Nullmengeerhaltend ist. Klaus Kalb (=Klaus Kalb), Mainz

Lokale Operatoren

Sind E, F lineare Räume von Funktionen, Distributionen oder Ultradistributionen, so nennt man einen linearen Operator $T: E \to F$ lokal, falls $\operatorname{supp} T\varphi \subset \operatorname{supp} \varphi$ für alle $\varphi \in E$. In Analogie zu einem Resultat von J. PEETRE (1960) für den Fall $T: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega)$ wird unter Verwendung eines sehr allgemeinen Stetigkeitssatzes für lokale Operatoren gezeigt:

SATZ: Zu jedem lokalen Operator $T: \mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega) \to \mathcal{E}^{(K_p)'}(\Omega)$ (bzw. $T: \mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega) \to \mathcal{E}^{(K_p)'}(\Omega)$) existiert $\Lambda \subset \Omega$, Λ ohne Häufungspunkt in Ω, so daß T als Operator von $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega \setminus \Lambda)$ (bzw. $\mathcal{E}^{\{M_p\}'}(\Omega \setminus \Lambda)$) nach $\mathcal{E}^{(K_p)'}(\Omega)$ stetig ist. Ist Bild $T \subset \mathcal{C}(\Omega)$, so ist T stetig und unter geeigneten Voraussetzungen an $\{M_p\}$ auf $\mathcal{D}^{(K_p)}(\Omega)$ (mit $K_p = \sqrt{p!\,M_p}$) darstellbar als Ultradifferentialoperator mit Koeffizienten in $\mathcal{C}(\Omega)$. (Andere Zielräume sind auch möglich.)

Es wird ein Beispiel eines lokalen Operators $T: \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega)$ angegeben, so daß $T \mid \mathcal{E}'(U): \mathcal{E}'(U) \to \mathcal{E}'(\Omega)$ für keine offene Menge $U \subset \Omega$ stetig ist. Man kann jedoch noch zeigen:

SATZ: Zu jedem lokalen Operator $T: \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega)$ gibt es eine lokalendliche Familie $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \subset \mathcal{E}(\Omega)$, so daß $|\operatorname{supp}(T\varphi - \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha \varphi)| < \infty$ für alle $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

E. Albrecht (Saarbrücken)

Zur Vollständigkeit in Graphensätzen.

Bekanntlich ist ein lokalkonvexer Raum E [für topologische Vektorräume gilt ähnliches] vollständig, wenn der folgende Graphensatz gilt:

$$(+)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Jede graphenabgeschlossene fast stetige lineare Abbildung von einem} \\ \text{lokalkonvexen Raum } F \text{ nach } E \text{ ist stetig.}\end{array}\right.$$

Schwächt man die Bedingung an E ab, indem man als Definitionsbereiche nur noch alle tonnelierten (bzw. bornologischen, bzw. dual lokalvollständigen) F's betrachtet, so ergeben sich schwächere Vollständigkeitseigenschaften für E; und zwar ist der zu E assoziierte tonnelierte (bzw. bornologische, bzw. dual lokalvollständige) Raum vollständig (bzw. lokalvollständig, bzw. vollständig bzgl. τ_{c_0}). Diese zum Teil bekannten Aussagen sind Spezialfall von

Satz Sei α eine finalinvariante Klasse lokalkonvexer Räume. Erfüllt der l.k. Raum E den Graphensatz (+) für alle $F \in \alpha$, so gilt für den assoziierten α-Raum E^α: Jedes y aus der vollständigen Hülle $(E^\alpha)^\wedge$, für welches $E+[y] \subset (E^\alpha)^\wedge$ ein α-Raum ist, liegt bereits in E.

Mit diesem Ergebnis läßt sich unter anderem der Graphensatz von A.P. und W. Robertson verallgemeinern und präzisieren:

Korollar: Ist F der induktive Limes einer aufsteigenden Folge von Räumen F_n, die alle dem Graphensatz (+) mit Baireschem F genügen, dann ist dieser Graphensatz auch für F gültig.

V. Eberhardt (München)

Faktorisierbarkeit über Räumen vom Typ L^p

Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß ein linearer stetiger Operator von einem Banachverband in einen Banachraum sich durch einen Verbandshomomorphismus über einen Banachverband mit „p-superadditiver" ($1 \leq p < \infty$) Norm faktorisieren läßt. Durch einige zusätzliche Voraussetzungen erreicht man eine derartige Faktorisierung über einen L^p-Raum.

P. Meyer-Nieberg (Osnabrück)

Nuclearity and Banach spaces

a) Let E be an infinite-dimensional separable Banach space. Let F be a nuclear locally convex space. If U is an absolutely convex neighbourhood of the origin in F, such that F_U is infinite dimensional, then there is an absolutely convex neighbourhood of the origin in E, V, $V \subset U$, such that $\widehat{F_V}$ is norm-isomorphic to E.

b) If Ω is a non-void open subset of $\mathbb{R}^n$ and Ω_1 is a non-void open subset of $\mathbb{R}^p$, then the space of distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ is topologically isomorphic to $\mathcal{D}'(\Omega_1)$, provided with the strong topologies.

M. Valdivia (Valencia)

Störungstheorie in lokalkonvexen Räumen

Auf dem Raum $\mathfrak{U}(E)$ von Unterräumen eines lokalkonvexen Raumes E mit einem Basissystem Γ von Seminormen wird in natürlicher Weise mit Hilfe der Öffnungen $\hat{\delta}_p$ $(p \in \Gamma)$ eine uniforme Topologie eingeführt. Bezüglich dieser Topologie werden in $\mathfrak{U}(E)$ Störungen von Semi-Fredholmpaaren betrachtet und Störungsaussagen bewiesen, die die Halbstetigkeit der Nullität und des Defektes sowie die Invarianz des Index zum Inhalt haben.

Als Anwendung ergeben sich Stabilitätsaussagen für lineare Operatoren in lokalkonvexen Räumen X, Y mit Basissystemen Γ_X, Γ_Y. Zugelassen werden Störungen durch relativ-stetige, also insbesondere durch stetige und lokalbeschränkte Operatoren. Dabei wird die Störung gemessen bezüglich eines konfinalen Teilsystems von $\Gamma_X \times \Gamma_Y$.

R. Mennicken, Regensburg

A certain class of linear topological spaces satisfying the condition of A. Grothendieck.

We consider a family of linear topological spaces satisfying A. Grothendieck's condition. This family is defined by a simple property closely related to the original argument of Banach and contains all the usual spaces. We prove the closed graph theorem for the spaces belonging to the family.

M. Nakamura

Verbände von Ordnungsidealen in geordneten Vektorräumen.

Wir nennen einen reellen geordneten Vektorraum V mit positivem Kegel $P = P(V)$ quasiarchimedisch, wenn aus $0 \leq \mathbb{R}^+ x \leq y$ folgt, daß $x = 0$ ist. Ein Ordnungsideal $\mathfrak{a}$ heißt quasiarchimedisch, wenn $\mathfrak{a}$ positiv erzeugt ist und $V/\mathfrak{a}$ quasiarchimedisch ist. Die Mengen $\mathrm{Ord}(V)$, $\mathrm{Pos}(V)$, $\mathrm{Quarch}(V)$ von Ordnungsidealen, positiven Ordnungsidealen, quasiarchimedischen Ordnungsidealen sind durch Inklusion geordnet und bilden sogar vollständige Verbände, deren Operationen wir mit o, p, q als Superskript unterscheiden.

1. Satz. $\mathrm{Pos}(V)$ ist nach oben stetig, d.h. wenn $A \subset \mathrm{Pos}(V)$ nach oben gerichtet ist und $\mathfrak{b} \in \mathrm{Pos}(V)$, dann gilt

$$\overset{p}{\bigvee_{\mathfrak{a} \in A}} (\mathfrak{a} \overset{p}{\wedge} \mathfrak{b}) = \Big(\overset{p}{\bigvee_{\mathfrak{a} \in A}} \mathfrak{a}\Big) \overset{p}{\wedge} \mathfrak{b}.$$

Sei P erzeugend und T ein Teilraum des algebraischen Duals V^* von V ~~und~~ mit positivem Kegel $P^*(T) := P^* \cap T$ (P^* der Dualkegel). Für $\mathfrak{a} \in \mathrm{Pos}(V)$ setzen wir

$$\mathfrak{a}_* := \{\varphi \in T \mid 0 = \varphi\mathfrak{a}\} \in \mathrm{Ord}(T)$$

$$\mathfrak{a}_\perp := (\mathfrak{a}_* \cap P^*(T)) - (\mathfrak{a}_* \cap P^*(T)) \in \mathrm{Pos}(T)$$

und analog Φ_*, $\Phi_\perp$ für $\Phi \in \mathrm{Pos}(T)$.

2. Satz. a) $\mathfrak{a} \in \mathrm{Pos}(V) \Longrightarrow \mathfrak{a}_\perp \in \mathrm{Quarch}(T)$.

b) $\perp : \mathrm{Pos}(V) \longrightarrow \mathrm{Quarch}(T)$ ist antiton.

c) Für $A \subset \mathrm{Pos}(V)$ gilt $\Big(\overset{p}{\bigvee_{\mathfrak{a} \in A}} \mathfrak{a}\Big)_\perp = \overset{p}{\bigwedge_{\mathfrak{a} \in A}} \mathfrak{a}_\perp$.

d) Entsprechendes gilt, wenn V und T vertauscht werden.

<u>3. Satz.</u> a) $\perp(T) := \perp(\mathrm{Pos}(V))$ und

$\perp(V) := \perp(\mathrm{Pos}(T)) = \perp\perp(\mathrm{Pos}(V))$

sind vollständige Verbände (folgt aus 2. c)), und die Abbildungen

$\perp : \perp(V) \longrightarrow \perp(T)$ und $\perp : \perp(T) \longrightarrow \perp(V)$

sind zueinander inverse duale Verbandsisomorphismen.

b) $\perp(V)$, $\perp(T)$ sind stetige Verbände, also sind sie Z-Verbände und ihre Zentren $Z(V)$, $Z(T)$ sind dual isomorphe vollständige boolesche Verbände.

<u>Anwendungen.</u>

Sei C eine C^*-Algebra mit Einselement 1, $L(C)$ der vollständige Verband der $\|\cdot\|$-abgeschlossenen Linksideale und $(H,1)$ der geordnete Vektorraum ihrer hermitischen Elemente. $\perp(H)$ sei bezüglich des $\|\cdot\|$-Duals H' gebildet.

<u>4. Satz</u> a) $\perp(H) = \mathrm{Quarch}(H) =$

$= \{$ $\|\cdot\|$-abgeschlossene positive Ordnungsideale $\}$

b) $L(C) \longrightarrow \mathrm{Quarch}(H)$, $\ell \longmapsto \ell \cap H$

ist ein Verbandsisomorphismus. Das Urbild von $\mathfrak{a} \in \mathrm{Quarch}(H)$ ist $\tilde{\mathfrak{a}} := \{x \in C \mid x^*x \in \mathfrak{a}\} \in L(C)$.

c) $\tilde{\mathfrak{a}}$ ist genau dann ein $\|\cdot\|$-abgeschlossenes, zweiseitiges Ideal in C, wenn $\mathfrak{a} \in \mathrm{Quarch}(H)$ ein neutrales Element ist.

Ähnliche Resultate gelten, wenn V ein archimedisch geordneter Vektorraum mit Ordnungseins ist, der in der zugehörigen Norm vollständig ist. Insbesondere lassen sich die Ordnungsideale, die zu Split-Seiten des Zustandsraumes $S \subset V'$ gehören, verbandstheoretisch kennzeichnen.

G. Janssen

On the minimal continuation of a subadditive functional.

We present here a theorem about the set of minimal continuations of a subadditive functional. This theorem contains as special cases:
Three principal theorems of Banach, the Krein-Milman's theorem about extreme points, the theorem of Alaoglu about compactness of the unit ball in the conjugate Banach space, the Mazur-Orlicz theorems about systems of linear inequalities, and the theorem of monoton continuation.

Milman D. (D. Milman)

Analytische Struktur in maximalen Unteralgebren von $L^\infty(X, \Sigma, m)$, im Falle eines Szegö-Maßes.

1) Ein elementarer Beweis des folgenden Satzes von P.S. Muhly. (Proc. of the AMS, Vol 36, No 2, Dec 1972) Es liege die Szegö Situation vor, d.h. $1 \in H \subset L^\infty(m)$ sei eine σ-$*$ abgeschlossene $\mathbb{C}$-Unteralgebra, auf welcher das Integral multiplikativ ist, und ferner gelte: $\varphi(u) = \int u\,dm = \int u F\,dm \;\forall u \in H$ für $0 \leq F \in L^1(m) \Rightarrow F = 1$ m-f.ü. ($\leftarrow$ Szegö-Bedingung. (äquivalent mit σ-$*$ Dirichlet)). Dann sind äquivalent: i) H ist nullteilerfrei ii) $h \in H$ & $h = 0$ auf $E \in \Sigma$ mit $m(E) > 0 \Rightarrow h \equiv 0$ iii) H ist maximal als σ-$*$ abg. $\mathbb{C}$-Unteralg. von $L^\infty(m)$.

2) Andere mit den obigen Aussagen äquivalenten Aussagen (in derselben Situation).
iv) $\forall \Psi \subset L^\infty(m)$ σ-$*$ abg. invarianter UVR ~~[illegible]~~, der nicht der Form $\chi_F L^\infty(m)$ für ein $F \in \Sigma$ ist, gilt: $\overline{\chi_E \Psi}^{\sigma-*} = \chi_E L^\infty(m)$ $\forall E \in \Sigma$ mit $m(E) < 1$
v) $\exists \Psi \subsetneq L^\infty(m)$ σ-$*$ abg. invarianter UVR, mit $\overline{\chi_E \Psi}^{\sigma-*} = \chi_E L^\infty(m)$ $\forall E \in \Sigma$ mit $m(E) < 1$. v') $\overline{\chi_E H}^{\sigma-*} = \chi_E L^\infty(m)$ $\forall E \in \Sigma$ mit $m(E) < 1$.

3) Anwendung des obigen Satzes (1) auf den folgenden Satz: Szegö-Situation; Dann äquivalent: (1) $\Psi \subset L^\infty(m)$ σ-$*$ abg. invarianter UVR $\Rightarrow$ entweder $\Psi = QH$, $Q \in \Psi$, $|Q| = 1$ oder $\Psi = \chi_E L^\infty(m)$ $E \in \Sigma$. (2) H maximal (wie oben) & H_0 einfach inv. (3) $\exists * : H^1 \to H^1(d\lambda)$ = klassische Hardy-Space ($p = 1$) mit i) $* : H^\dagger \to H^\dagger(d\lambda)$; ii) $\|f\|_{L^1(m)} = \|f^*\|_{L^1(d\lambda)}$; iii) $\int f\,dm = \int f^*\,d\lambda$; iv) $\{P \in H : |P| = 1\} \xrightarrow{1:1} \{F \in H^\infty(d\lambda) : |F| = 1\}$ & insb. $P^* = z$ = Koordinatenfunktion $\in H_0^\infty(d\lambda)$. Luis Salinas

Ein vereinfachter Beweis zur Konstruktion modularer Algebren

Die Ergebnisse von Tomita über linke Hilbertalgebren und modulare Hilbertalgebren wurden von Takesaki erstmals ausführlich dargestellt. Ein vereinfachter Zugang zu den linken Hilbertalgebren wurde kürzlich von van Daele gegeben. Der Vortrag zeigt, wie man mit Hilfe einiger Resultate von van Daele auch einen unmittelbaren Beweis für die Eigenschaften von modularen Algebren erhalten kann.

G. W. Stoch

Tensorprodukte und Operatorideale aus funktorieller Sicht

Unter den Bifunktoren mit $G(I,I) = I$ auf Ban kann man Operatorideale und Tensorprodukte funktoriell ~~trat~~ charakterisieren; die Dualität von Funktoren im Sinne von Mitiagin-Shvarts stellt sich ~~aus~~ als der Zusammenhang von Grothendieck zwischen Tensorprodukten und Operatoridealen heraus. Konkreter wird eine 3-parametrige Schar von $\otimes$-Normen im Sinne von Grothendieck angegeben:

$$|||u|||_{(p,r,s)} = \inf \Big\{ \|(\lambda_i)\|_{\ell^p} \cdot \sup_{\|x'\|\le 1} \|(\langle x_i, x'\rangle)\|_{\ell^r} \cdot \sup_{\|y'\|\le 1} \|(\langle y_i, y'\rangle)\|_{\ell^s} : u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i \text{ in } X \otimes Y \Big\},$$

konvexiviert, definiert eine ~~Tensorprodukt,~~ $\otimes$-Norm, die dann verwendet werden kann, bekannte Ergebnisse über (p,r,s)-absolut-summierende Operatoren auf (p,r,s)-nukleare- und (p,r,s)-integrale Operatoren zu übertragen.

Peter Michor (Wien)

Arbeitstagung über die Monodromie
13. – 17. Oktober 1975

Zur Geschichte der Monodromie.

Monodromiegruppen traten in der Geschichte der Mathematik zum ersten Mal auf als Monodromiegruppen von gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen mit regulären singulären Punkten. Die Theorie entwickelte sich durch Untersuchungen über die hypergeometrische Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{p_0}{t} + \frac{p_1}{t-1}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{q_0}{t^2} + \frac{q_1}{(t-1)^2} + \frac{q_2}{t(t-1)}\right) y = 0$$

von Euler, Gauß, Kummer, Riemann, H. A. Schwarz und F. Klein. Von Euler gibt es eine Integraldarstellung von Lösungen

$$y(t) = \int_0^1 x^a (1-x)^b (1-tx)^c \, dx .$$

Dies führt zur "Deformation" des Integrationsweges und Lifting zu einem geschlossenen Weg γ_t in die Riemannsche Fläche X_t von $x^a(1-x)^b(1-tx)^c$ und zur Betrachtung von Integralen

$$y(t) = \int_{\gamma_t} \omega_t$$

wo ω_t eine meromorphe 1-Form auf t ist. Das Interesse an der Konstruktion von Moduln komplexer Strukturen mittels solcher Perioden von Differentialformen führte die Schule von Ph. A. Griffiths zu weitreichenden

Verallgemeinerungen der für die Monodromie der hypergeom. Dgl. bekannten Resultate: Sei X_t eine Familie proj. alg. Mannigfaltigkeiten, ω_t eine Familie meromorpher q-Formen auf X_t, und γ_t eine mehrdeutige Familie von q-Zyklen, die durch ~~[illegible]~~ stetige Parallelverschiebung entsteht. Dann gilt:

1. <u>Regularitätssatz</u> $y(t) = \int_{\gamma_t} \omega_t$ genügt einer regulär-singulären Differentialgleichung.

2. <u>Monodromiesatz:</u> Die Monodromie einer solchen ~~Ttt~~ bei Umlauf um eine singuläre Faser der Familie $\{X_t\}$ hat als Eigenwerte nur Einheitswurzeln.

In der Geschichte der Monodromie hat die Analyse spezieller Beispiele eine große Rolle gespielt. Besonders interessant sind die Fälle, in denen die Monodromiegruppe der hypergeometrischen Differentialgleichung endlich ist. Sie ist dann eine binäre Ikosaedergruppe, Oktaedergruppe, Tetraedergruppe ~~oder zyklic~~, Diedergruppe oder zyklische Gruppe. Das sog. Umkehrproblem für die hypergeom. Dgl. (Riemann, Schwarz, Klein) führte dazu, die homogenen Polynome in zwei Variablen zu betrachten, die unter dieser Gruppe invariant sind. ~~In~~ Sie werden erzeugt von drei solchen Polynomen x, y, z, zwischen denen noch eine Gleichung besteht. Im Fall des Ikosaeders ist dies die Gleichung

$$x^3 + y^5 + z^2 = 0.$$

Diese und die verwandte Gleichungen ~~ha~~

$$x^3+y^5+z_1^2+\dots+z_k^2=0$$

haben in der weiteren Entwicklung eine große Rolle gespielt, ~~Beispiele~~ und sie wurden auf die verschiedenste Weise immer wieder entdeckt. Diese Beispiele werden auch im weiteren Verlauf der Tagung noch näher untersucht werden.

E. Brieskorn

Einführung in die topologische Untersuchung von isolierten Hyperflächensingularitäten

Eine isolierte Hyperflächensingularität wird durch eine Polynomabbildung $f: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ mit isolierter kritischer Stelle a gegeben. Ihr wird der "gefaserte Knoten" $K = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{2n+1} \subset S_\varepsilon^{2n+1}$ zugeordnet, wobei $S_\varepsilon^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ die Sphäre um a mit dem Radius ε ist (Milnor)

~~Ihr~~ ~~Ih~~ Jedem gefaserten Knoten $K \subset S^{2n+1}$ wird eine Verschlingungsform L, das ist eine unimodulare Bilinearform, zugeordnet. Für $n \geq 3$ werden die gefaserten Knoten differentialtopologisch umkehrbar eindeutig durch die unimodularen Bilinearformen charakterisiert (Kervaire, Levine, Durfee, Kato). Insbesondere erhält man die Schnittform einer typischen Faser als $S = L + (-1)^n L^t$ und die Monodromie als $T = \pm L^{-1} L^t$ (t = transponiert) (Levine).

Die Probleme, zu gegebener Hyperflächensingularität die Form L zu berechnen sowie diejenigen L zu charakterisieren, die von Hyperflächensingularitäten herkommen, sind nur in einigen Ansätzen gelöst. Z.B. kann man mittels Auflösung der Singularitäten beweisen, daß es ein q gibt, s.d. $(T^q - id)^{n+1} = 0$ ist (Grothendieck, ...) ~~Man~~

Es wird über die Deformation der Polynomabbildung f berichtet, bei der f durch ein „benachbartes" Polynom g ersetzt wird, welches nur nicht entartete kritische Stellen hat. Die topologische Untersuchung der durch g gegebenen „Faserung", deren Ausnahmefasern gewöhnliche Doppelpunkte und sonst keine Singularitäten haben, benutzt die Methoden, die Picard (1897) und Lefschetz (1924) entwickelten, um die Topologie einer glatten algebraischen Varietät im einem projektiven Raum mittels der Schnitte mit einem Ebenenbüschel zu untersuchen: Verschwindende Zykeln, Picard-Lefschetz'sche Formel.

Man erhält so, daß man L stets durch eine Dreiecksmatrix darstellen kann sowie Methoden um L in Spezialfällen, z. B. für $n = 1$ (2 Variable) explizit zu bestimmen. Als Beispiel wird die Deformation von $f(x,y) = x^5+y^3$ durchgeführt, so daß der reelle Teil der deformierten Kurve $g=0$ die Gestalt

hat. Daraus kann man L und damit die Schnittmatrix S für alle $f(x,y,z_1,\dots z_r) = x^5+y^3+z_1^2+\dots+z_r^2$ als (8×8)-Matrizen ablesen. Für gerades r, insbesondere $r=3$, ergibt sich $\det S = \pm 1$ und $\operatorname{sign} S = \pm 8$. Ersteres bedeutet, daß $K = \partial F$ homöomorph zu 7-Sphäre ist, letzteres daß es nicht diffeomorph zur 7-Sphäre sein kann. (Methode von A'Campo und Gusein-Sade, Ergebnis erstmals mit anderen Methoden von Brieskorn und Hirzebruch bewiesen.)

K. Lamotke

Der Monodromiesatz – (nach Clemens und A'Campo)

Sei H die Hyperfläche $P(z)=0$ in $\mathbb{C}^{n+1}$ mit einer Singularität in 0, so ist die geometrische Monodromie von H in 0 ein charakteristischer Homöomorphismus $f: F_\Theta \to F_\Theta$ einer Faser $F_\Theta = \{z\in\mathbb{C}^{n+1};\ |z|=\varepsilon,\ \arg P(z)=\Theta\}$ der Milnorfaserung. In diesem Vortrag wird die Wirkung von f auf die Kohomologie $H^*(F_\Theta, \mathbb{C})$ untersucht. Löst man die

Singularität (nach Hironaka) auf, so bestimmen die Multiplizitäten und Euler-charakteristiken der Komponenten der Faser über 0 vollständig die Zetafunktion von f auf $H^*(F_\Theta, \mathbb{C})$. Im Fall einer isolierten Singularität besteht $H^*(F_\Theta, \mathbb{C})$ nur aus dem 0-ten und n-ten Term, daher bestimmen obige Invarianten der Auflösung das charakteristische Polynom von f auf $H^n(F_\Theta, \mathbb{C})$ und die Milnor-Multiplizität $\mu = \dim H^n(F_\Theta, \mathbb{C})$ der Singularität. Insbesondere folgt, daß die Eigenwerte der Monodromie auf $H^n(F_\Theta, \mathbb{C})$ Einheitswurzeln sind, und auch eine Abschätzung der Größe der Jordankästchen kann gegeben werden.

Zum Beweis werden die mit der Zetafunktion eng verknüpften Lefschetzzahlen der Iterierten f^k der Monodromie berechnet. Hierzu hat man die geometrische Monodromie f ~~genau und~~ global auf einer Milnorfaser zu konstruieren, wobei man vermöge Auflösung der Singularität annehmen kann, daß H ein Divisor mit Normalschnitten ist. Diesen hat man (reell orientiert) aufzublasen, an den Schnitten etwas (durch Einfügen entsprechend aufgeblasener Simplizes) zu modifizieren. Auf dem Rand $\tilde{N}$ der entstehenden Mannigfaltigkeit ($\approx$ tubulare Umgebungsrand von H) definiert man einen Fluß $(\tilde{\xi}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$, $\tilde{\xi}_{2\pi}$ ist die geometrische Monodromie f. Die Wirkung von f^k auf eine Milnorfaser in $\tilde{N}$ läßt sich dann explizit beschreiben, Mayer-Vietoris-Sequenzen liefern die Lefschetzzahlen.

W. D. Geyer

Zur Frage der Endlichkeit der Monodromie:

Nach einer Idee von P. Deligne wird die explizite Beschreibung der geometrischen Monodromie mit Hilfe einer Auflösung der Singularität (voriger Vortrag) benutzt, um folgende Resultate zu beweisen ((2) und (3)) bzw. deren Beweis zu skizzieren ((1)):

(1) Satz (Lê Dũng Tráng): Die Monodromie einer irreduziblen Kurvensingularität in der komplexen Ebene ist endlicher Ordnung.

(2) Monodromiesatz (für Kurven): Für die Monodromie h einer beliebigen Kurvensingularität in der komplexen Ebene gilt: Es gibt eine natürliche Zahl m mit $(h^m - id)^2 = 0$.

(3) Beispiel (A'Campo): Die Singularität $(x^2+y^3)(x^3+y^2)=0$ hat eine Monodromie unendlicher Ordnung.

Dieter Erle

Reguläre Zusammenhänge

Im ersten Teil wurden allgemein Zusammenhänge auf kohärenten Garben über einer komplexen Mannigfaltigkeit betrachtet. Die folgenden Eigenschaften wurden angegeben:
(1) Ist ein Zusammenhang auf einer kohärenten Garbe integrabel, so ist die Garbe lokal frei.
(2) Für jede kohärente Garbe mit einem Zusammenhang hat das Vektorraumbündel der horizontalen Schnitte eine kanonische flache Struktur; hat man umgekehrt ein Vektorraumbündel mit einer flachen Struktur, so kann man auf der Garbe der Keime holomorpher Schnitte einen kanonischen Zusammenhang definieren, so daß die horizontalen Schnitte gerade die konstanten Schnitte (bzgl. der flachen Struktur) sind.
Im zweiten Teil wurden nur lokal freie Garben E mit einem Zusammenhang ∇ über der gelochten Kreisscheibe $S = \{x \in \mathbb{C}^* : |x| < 1\}$ betrachtet. Ist

$e = (e_1, \dots, e_n)$, $e_i \in \Gamma(S, \mathcal{E})$ eine Basis von $\mathcal{E}$, so wurden die folgenden äquivalenten Charakterisierungen für die Regularität eines Zusammenhanges ∇ auf $(\mathcal{E}, e)$ gegeben.

(1) Bzgl. einer zu e meromorph äquivalenten Basis e' hat die ~~kanonische~~ kovariante Ableitung $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ die Form: $\nabla_{\frac{d}{dt}}(\varphi \cdot e') = \left(\frac{d}{dt}\varphi + \frac{1}{t} \cdot R\varphi\right) e$, wo $A \in GL(n, \mathbb{C})$.

(2) Ist $\nabla_{\frac{d}{dt}}(\varphi \cdot e) = \left(\frac{d}{dt}\varphi + A\varphi\right) e$, so sind die Koeffizienten von A meromorphe Funktionen; für die Differentialoperatoren $\mathcal{D} : \mathcal{F} \to t^{-r}\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \mathbb{C}\{t\}^n$, $r \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, $\mathcal{D}(\varphi) = \left(\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi\right)$), $\hat{\mathcal{D}} : \hat{\mathcal{F}} \to t^{-r}\hat{\mathcal{F}}$ ($\hat{}$ bezeichne die t-adische Komplettierung) gilt: $\ker \mathcal{D} \cong \ker \hat{\mathcal{D}}$, $\operatorname{Coker} \mathcal{D} \cong \operatorname{Coker} \hat{\mathcal{D}}$.

(3) A wie oben ist meromorph; es ex. $m \in \mathbb{N}$, so daß $\mathcal{D}^k(\mathcal{F}) \subseteq t^{-m-k}\mathcal{F}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

(4) Die Koordinatenfunktionen (bzgl. e) eines jeden horizontalen Schnittes auf einem Kreissektor wachsen nicht schneller als $C \cdot t^{-n}$ für hinreichend großes $C > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Ein Zusammenhang ist regulär singulär, wenn eine der obigen 4 äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

Hubert Flenner

Polyèdre de Newton d'une singularité.

Soit $f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{n+1}} a_\nu x^\nu$ un polynôme. Le sous-monoïde de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$M = \{ w \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists \nu \in \mathbb{N}^{n+1},\ w - \nu \in \mathbb{N}^{n+1} \text{ et } a_\nu \neq 0 \}.$$

est le monoïde de f.

Soit $\tilde{M}$ l'enveloppe convexe de M; c'est un polyèdre de dimension pure $n+1$, dont les points extrémaux sont dans $\mathbb{N}^{n+1}$. Le polyèdre de Newton Γ de f est l'union des faces compactes de dimension $\leq n$ de $\tilde{M}$. (Dans le cas $n = 1$ on retrouve le polygone de Newton classique)

Un k-simplexe σ dans $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$ est la donnée de k points $\nu_1, \dots, \nu_k$ de $\mathbb{N}^{n+1}$ linéairement indépendants. Un k-simplexe est spécial si σ est inclu dans une intersection de $n+1-k$ hyperplans de coordonnées de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Une décomposition simpliciale de Γ est une famille $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ de simplices telle que

$$\bigcup |\sigma_i| = \Gamma,$$

$$|\mathring{\sigma}_i| \cap |\mathring{\sigma}_j| = \emptyset,\ i \neq j$$

où $|\sigma|$ désigne l'enveloppe convexe de $\{0\} \cup \sigma$.

Soit σ un k-simplexe spécial. On note

$$V(\sigma) = (-1)^k \cdot k! \cdot (\text{Volume } k\text{-dimensionel de } |\sigma|)$$

<u>Théorème</u> (Kusnirenko): Soit $\Gamma = \bigcup |\sigma_i|$ une décomposition simpliciale d'un polyèdre de Newton Γ. Soit E_Γ l'espace des polynômes f tels que le polyèdre de f est Γ. Il existe dans l'espace des coefficients $\{(a_\nu)\}_{\nu \in \Gamma \cap \mathbb{N}^{n+1}}$

un ouvert de Zariski $\mathcal{U}$ tel que pour toute fonction $g \in \mathcal{U}$ ayant une singularité isolée on a que

$$\mu = (-1)^n \Big[1 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \sigma_i \text{ spécial}}} V(\sigma_i) \Big]$$

où μ est le nombre de Milnor de g.

Ce resultat de Kusnirenko suggère que l'on peut tirer d'avantage d'un polyèdre de Newton. Nous donnons ici une formule expérimentalement testé et dont la démonstration a fait de grand progrès durant ce colloque, pour la fonction Zêta de la monodromie.

Soit σ un k-simplex spécial. On appelle poids de σ une formé linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que

$$p(v) = 1, \quad v \in \sigma.$$

La multiplicité de σ est le plus petit entier $m(\sigma) = m > 0$ tel que

$$m\,p(v) \in \mathbb{N}, \quad v \in \mathbb{N}^{n+1} \cap [\sigma].$$

Ici $[\sigma]$ désigne le sous espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ engendré par σ.

<u>Formule</u>: Soient Γ et $\mathcal{U}$ comme dans le théorème. Alors pour toute fonction $g \in \mathcal{U}$ ayant une singularité isolée on a

$$Z_g(t) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \sigma_i \text{ spécial}}} \left(t^{m(\sigma_i)} - 1\right)^{V(\sigma_i)/m(\sigma_i)}.$$

Norbert A'Campo

Der Beweis des Monodromiesatzes nach Katz.

Sei $f: U \to V$ ein glatter, eigentlicher Morphismus zwischen glatten Schemata über $\mathbb{C}$. Man definiert die relative de Rham Kohomologie $H^q_{DR}(U/V, \mathcal{O})$ als die Hyperkohomologie des relativen de Rham Komplexes $\Omega^{\cdot}_{U/V}$ also

$$H^q_{DR}(U/V, \mathcal{O}) = \mathbb{R}^q f_* (\Omega^{\cdot}_{U/V})$$

Die $\mathbb{R}^q f_* (\Omega^{\cdot}_{U/V})$ bilden eine kohärente Garbe über $\mathcal{O}_V$ deren "Fasern" gerade die Kohomologiegruppen von den Fasern von f sind. Mit Hilfe einer exakten Sequenz konstruiert man einen integrablen Zusammenhang

$$\delta_q : H^q_{DR}(U/V, \mathcal{O}) \to \Omega^1_V \otimes H^q_{DR}(U/V, \mathcal{O})$$

<u>Satz</u>: Dieser lineare Zusammenhang hat nur reguläre singuläre Punkte.

Für den Falle, daß V eine glatte Kurve ist und $T \supset V$ ein projektives glattes Modell von V ist, hat man zu zeigen, daß sich $H^q_{DR}(U/V, \mathcal{O})$ auf T fortsetzen läßt, so daß die Derivation $\delta_q(\pi \frac{\partial}{\partial \pi})$ $H^q_{DR}(U/V, \mathcal{O})$ ⟲ sich für Ortsuniformisierende π der Punkte aus $T - V$ fortsetzen lassen.

Für den Beweis des Satzes benutzt man die Auflösung der Singularitäten. Man hat Kompaktifizierungen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & S \\ \downarrow f & & \downarrow \pi \\ V & \longrightarrow & T \end{array}$$

so daß S glatt, eigentlich über T ist und so daß das Komplement D von ~~$\&$~~ U in S ein Divisor mit normalen Überkreuzungen ist. Man führt die Komplexe der ~~&~~ meromorphen Differentialformen mit ~~mero~~ logarithmischen Polen ein:

$$\Omega^1_T(\log Y) \hookrightarrow \Omega^1_S(\log D) \qquad (Y = T - V).$$

Dies liefert die gewünschte Fortsetzung der de Rhamschen Kohomologie

$$\mathbb{R}^q f_*(\Omega^{\bullet}_{U|V}) \hookrightarrow \mathbb{R}^q \pi_*\left(\Omega^p_S(\log D)/\Omega^p_T(\log Y)\right)$$

und die Fortsetzung von δ_q ist leicht zu finden

G. Harder

Picard-Lefschetz Theorie

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$, und $0 \in U$ eine isolierte Singularität, $f(0) = 0$. Dann gilt für die typische reguläre Faser $F = f^{-1}(\delta)$, δ klein:

$H_0(F) = \mathbb{Z}$, $H_q(F) = 0$ für $0 \neq q \neq n$,

$H_n(F)$ ist eine endlich erzeugte frei abelsche Gruppe.

$S(x,y) = L(x,y) + (-)^n L(y,x)$

(S = Schnittform, L = Verschlingungsform auf $H_n(F)$).

$L(x, H(y)) = (-)^{n+1} L(y,x)$, also $H = (-)^{n+1} L^{-1}\,{}^tL$

(H = Monodromie)

Die Monodromie h ist Produkt von Monodromien

$$h = h_m \circ \dots \circ h_1 ,$$

$h_\mu : F \to F$, $h_\mu | \partial F = id$, zu jedem μ gehört eine „verschwindende" Homologieklasse $s_\mu \in H_n(F)$, welche durch eine in $\mathring{F}$ eingebettete Sphäre repräsentiert wird, deren Normalbündel zum Tangentialbdl. der Sphäre isomorph ist.
Zu jedem H_μ gehört eine Variation $v_\mu : H_n(F, \partial F) \to H_n(F)$ und für h_μ, s_μ, v_μ ~~gehören~~ gelten die Picard-Lefschetz-Formeln.
Die s_μ bilden eine Basis von $H_n(F)$.

$H = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1$, mit $\sigma_\mu : H_n(F) \to H_n(F)$

$$\sigma_\mu(x) = x - (-)^{n(n-1)/2} S(x, s_\mu)\, s_\mu .$$

Bezüglich der Basis der s_μ wird L durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben, mit Diagonalelementen $(-)^{n(n+1)/2}$.

Theodor Bröcker

Der singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang

Sei $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ ein holomorpher Abbildungskeim mit isolierter Singularität. Man wählt einen Milnorschen Repräsentanten $f : X \to S$, so daß $f : X - f^{-1}(0) \to S - \{0\}$ ein (zur Milnorfaserung äquivalentes) Faserbündel ist. Der (lokale) singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang ∇ ist ein spezieller gewöhnlicher Differentialoperator, der in $0 \in S$ eine polartige Singularität besitzt und dessen Monodromie sich kanonisch mit der lokalen Picard-Lefschetz-Monodromie identifiziert. ∇ wird rein algebraisch mit Hilfe holomorpher Differentialformen definiert. Man betrachtet die relative de Rham-Kohomologie $\mathcal{H}(f_* \Omega_{X/S})$, wobei $\Omega_{X/S}$ der Komplex der holomorphen relativen Differentialformen ist. Nach einem Satz von Brieskorn $\mathcal{H}^*(f_* \Omega_{X/S})$ kohärent, und die Einschränkung $\mathcal{H}^n(f_* \Omega_{X/S}) | S - \{0\}$ ist die Garbe die Keime von holomorphen Schnitten in dem komplexen Vektorraumbündel $H^n = \bigcup_{t \in S-\{0\}} H^n(X_t, \mathbb{C})$. Die Übergangsfunktionen des Faserbündels $X - f^{-1}(0) \to S - \{0\}$ induzieren konstante Übergangsfunktionen für H^n und damit einen kanonischen Zusammenhang auf H^n, dessen Monodromie natürlich genau die Picard-Lefschetz-Monodromie ist. ∇ ist eine Fortsetzung dieses auf transzendente Weise definierten Zusammenhangs auf ganz $\mathcal{H}^n(f_*\Omega^\cdot_{X/S})$.

Seine kovariante Ableitung $\nabla_{d/dt}$ wird folgendermaßen definiert:

$$\nabla_{d/dt} : \mathcal{H}^n(f_*\Omega^\cdot_{X/S}) \longrightarrow f_*\Omega^n_{X/S} / d(f_*\Omega^{n-1}_{X/S}),$$

Sei $[\omega] \in \Gamma(U, \mathcal{H}^n f_*\Omega^\cdot_{X/S})$ und $\omega \in \Gamma(f^{-1}U, \Omega^n_X)$ ein Repräsentant; dann gilt $d\omega = df \wedge \alpha$ mit $\alpha \in \Gamma(f^{-1}U, \Omega^n_X)$. Sei $\left[\frac{d\omega}{df}\right] := [\alpha]$ die Klasse von α in $\Gamma(U, f_*\Omega^n_{X/S}/d(f_*\Omega^{n-1}_{X/S}))$,

$$\boxed{\nabla_{d/dt}[\omega] := \left[\frac{d\omega}{df}\right]}$$

Mit Hilfe des Isomorphismus von Bloom-Brieskorn $H^n(\Omega^\cdot_{X/S,0})^\wedge \cong H^n(\tilde{\Omega}^\cdot_{X/S,0})$ ($\wedge$ = Komplettierung bzgl. $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{S,0}}$, $\sim$ = Komplettierung bzgl. $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,0}}$) folgt mit Hilfe eines Kriteriums von Malgrange leicht

Satz: Der lokale singuläre Gauß-Manin-Z. ist regulär singulär.

Aufgrund des Regularitätssatzes und der Beschreibung der Picard-Lefschetz-Monodromie als Monodromie von ∇ ist es möglich, einen Algorithmus zur Berechnung der Monodromie anzugeben.

Der hier definierte Gauß-Manin-Zusammenhang ist eng verwandt mit dem in der globalen, eigentlichen, algebraischen Situation definierten Gauß-Manin-Zusammenhang, wie er von Grothendieck, Katz u.a. untersucht wird.

Gert-Martin Greuel

Mixed Hodge structures

One considers the structure of $H^*(M)$ for M a projective manifold:
$$H^k(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M) \quad , \quad H^{q,p}(M) = \overline{H^{p,q}(M)}$$
where $H^{p,q}(M)$ is the space of harmonic forms of type (p,q) on M, which is isomorphic to $H^q(X,\Omega^p_X)$ by Dolbeault.
If $L\in H^2(M,\mathbb{Z})$ is the cohomology class of a hyperplane section, then $\omega \longmapsto L^{n-k}\wedge\omega$ defines $H^k(M) \xrightarrow{\sim} H^{2n-k}(M)$ $(k\leq n = \dim X)$.
The bilinear form $S_k : H^k(M)\otimes H^k(M) \to \mathbb{C}$ defined by $S_k(x,y) = \int_M L^{n-k}\wedge x\wedge y$ has the property that $S_k(x,y)=0$ if $x\in H^{p,q}$, $y\in H^{r,s}$ and $(p,q)\neq(r,s)$, and ~~$S_k(x,x)>0$ if~~ $i^{p-q}(-1)^{k(k-1)/2} S_k(x,\bar{x})>0$ for $x\in H^{p,q}$ with $L^{n-k+1}\wedge x = 0$.
Deligne constructed a functor : {(algebraic varieties / $\mathbb{C}$)} $\to$ {mixed Hodge structures} which for projective manifolds restricts to the Hodge decomposition. One calculates this by using projective varieties as "models".
Example of this : f a homogeneous polynomial with isolated singularity at 0, $V = \{z\in\mathbb{C}^{n+1} \mid f(z)=1\}$, $\bar{V}\subset\mathbb{P}^{n+1}$ its closure, $V_\infty = \bar{V}-V$. Then $\bar{V}$ and V_∞ are smooth and one uses the exact sequence
$$\ldots \to H^k(\bar{V}) \xrightarrow{\alpha} H^k(V) \xrightarrow{\beta} H^{k-1}(V_\infty) \to \ldots$$
to get $W_k\subset H^k(V)$ and a decomposition $W_k = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_k(V)$ and $W_{k+1}/W_k = \bigoplus_{p+q=k+1} H^{p,q}_k(V)$.
One considers also how to get a weight filtration W on the cohomology of the Milnor fiber F of a polynomial f with isolated singularity. For this one uses the resolution of the singularities of f and lifts cohomology classes from the strata of this divisor to F in various ways. The result is a filtration W on $H^n(F)$ such that the successive quotients W_k/W_{k-1} are subquotients of direct sums of spaces like $H^r(Y_{i_1}\cap\ldots\cap Y_{i_p},\mathbb{C})$, and hence again have a Hodge decomposition as above.

J. Steenbrink

Asymptotische Integrale und Monodromie – nach Malgrange

Ann. Sc. Ec. N. Sup. 1974

Diese Arbeit stellt eine Verfeinerung von den Resultaten von Brieskorn und Sreuel dar, und eine Anwendung deren Theorie auf das asymptotische Verhalten schnell oszillierende Integrale.

Hauptlemma: $\lim_{\substack{t \to 0 \\ \arg t = 0}} \int_{\gamma(t)} \omega = 0 \qquad \omega \in \Gamma(X, \Omega^n_X), \quad \gamma(t) \in H_n(X_t)$

Konsequenzen: (1) Regularitätssatz

(2) $\int_{\gamma(t)} \omega = \sum_{\substack{0<\alpha \\ 0 \le q \le q_0 - 1}} d_{\alpha,q}\, t^{\alpha} (\log t)^q$ wo q_0 – Index der Unipotenz der Monodromie, $e^{2\pi i \alpha}$ Eigenwert der Monodromie

(3) $H^n(\Omega_{X/S})_0 = H^n(\Omega_{X/S,0})$ ist torsionsfreier $\mathbb{C}\{t\}$ Modul (Sebastiani)

(4) $H^n(\Omega_{X/S,0})$ hat zwei Filtrierungen: $\{m^j H^n(\Omega_{X/S,0})\}_{j \ge 0}$, $\{t^j H^n(\Omega_{X/S,0})\}_{j \ge 0}$ wo m das max. Ideal von $O_{X,0}$ ist. Die entsprechende Topologien sind äquivalent.

(5) Sei $f \in C^{\omega}(\mathbb{R}^{n+1})$, $g \in C^{\infty}_c(\mathbb{R}^{n+1})$, $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\tau f} g \, dx \sim \sum_{\alpha, q} c_{\alpha,q}(g)\, \tau^{-\alpha-1} (\log \tau)^q \qquad \alpha, q \text{ wie oben}$$

für $\tau \to \infty$

J. Scherk

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Schnittform für Singularitäten ebener Kurven
(nach A'Campo, Gusein-Sade, Scott, ...)

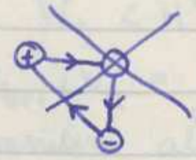
Sei $f: (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C},0)$ holomorph mit einer isolierten Singularität, alle Zweige von f seien reell-analytisch. Für eine reelle Störung g von f sind die Schnittpunkte der Zweige in einer reellen Milnorscheibe D_ε reelle kritische Punkte, weiter liegt in jeder „Region" (Komponente von $D_\varepsilon \setminus g^{-1}(0)$, die den Rand ∂D_ε nicht trifft) mindestens ein Extremum von $g|D_\varepsilon$ und somit ein kritischer Punkt.

Genau dann ist g eine reelle Morse-Störung (d.h. alle kritischen Punkte sind reell und Morsepunkte), wenn die Maximalzahl $\delta = \frac{1}{2}(\mu_f + r - 1)$ von Schnittpunkten (r: Anzahl der Zweige) (und die Maximalzahl $\mu - \delta$ von Regionen) vorliegt.

Es gilt:

Satz 1: Eine ebene isolierte Kurvensingularität mit nur reellen Zweigen hat eine reelle Morse-Entfaltung.

Die kritischen Punkte einer reellen Morse-Störung verbindet man wie folgt durch gerichtete Strecken:



Man erhält so ein „geometrisches Dynkin-Diagramm" der Morse-Störung.

Es gilt:

Satz 2: Das geometrische Dynkin-Diagramm der reellen Morse-Störung ist das Dynkin-Diagramm der Schnittform (bzgl. einer geeigneten Basis verschwindender Zykel)

Gottfried Barthel

Einfache und einfach-elliptische Singularitäten

Das Umkehrproblem der hypergeometrischen Differentialgleichung führt auf das Problem: Sei $G \subset SU(2)$ eine endliche Untergruppe. Was sind die unter G invarianten Polynome in 2 Variablen? Antwort: Der Ring dieser Polynome wird erzeugt von 3 Polynomen x, y, z, die einer quasihomogenen polynomialen Gleichung $f(x,y,z)=0$ genügen. G operiert auf $\mathbb{C}^2$ mit genau einem Fixpunkt im Ursprung, der im Orbitraum $\mathbb{C}^2/G$ eine isolierte Singularität definiert. <u>Satz:</u> Die Quotientensingularität ~~sind~~ ist isomorph zu der isolierten Singularität der Hyperfläche $f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^3$.

Es kann gezeigt werden, daß diese genau die Singularitäten A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 sind. Diese Singularitäten lassen sich auf mannigfache Art charakterisieren. Arnol'd studierte das Problem, alle einfachen Singularitäten zu klassifizieren, das sind definitionsgemäß genau die Singularitäten, für die jede lokale Deformation nur zu endlich vielen nicht isomorphen Singularitäten führt. <u>Satz:</u> Die einfachen Singularitäten sind genau die Quotientensingularitäten.

Der Beweis zerfällt im wesentlichen in 2 Schritte. Zunächst zeigt das Studium der semiuniversellen Deformation der Quotientensingularitäten, daß sie einfach sind. Der zweite Schritt besteht darin zu zeigen, daß jede isolierte Hyperflächensingularität (verschieden von den Quotientensingularitäten) in eine einfach elliptische Singularität $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ deformiert werden kann. Die exzeptionelle Kurve der minimalen Auflösung der $\tilde{E}_i$ ist eine singularitätfreie elliptische Kurve. Daher sind diese offensichtlich nicht einfach. Man erhält hieraus recht einfach das folgende stärkere <u>Resultat:</u> Die Schnittmatrix der Milnorfaser einer Hyperflächensingularität ist genau dann definit, wenn sie eine einfache Singularität ist.

Tjurina benutzte dieses Ergebnis, um einen Zusammenhang zwischen der Milnorfaser und der minimalen Auflösung herzustellen. <u>Satz:</u> Die Milnorfaser ist genau dann diffeomorph zur minimalen Auflösung einer Hyperflächensingularität, wenn sie einfach ist.

Aus obigem Resultat folgt, daß die einfachen Singularitäten die einzigen Kandidaten sind. Der Rest ist ein Korollar des folgenden Satzes.

Satz: Jede lokale Deformation einer einfachen Singularität läßt sich simultan auflösen.

Ulrich Karras

A homotopy problem in singularity theory and the period mapping.

As was shown by Tjurina, any germ of a hypersurface (X, x_0) with isolated singularity admits a semi-universal deformation $F: (X, x_0) \to (S, s_0)$. (with $F^{-1}(s_0) \simeq X_0$) For a good representative $\tilde{F}: X \to S$ of F the critical set of $\tilde{F}$ maps properly to S. Its image Δ is ~~called the d~~ then an analytic irreducible hypersurface and is usually called the discriminant.

Brieskorn has shown that for a simple singularity one has a nice description of (S, Δ) as a pair $(V_{\mathbb{C}}/W, D)$. Here W is a Weyl group ~~in~~ the complex v.sp $V_{\mathbb{C}}$, and D the branchlocus of the ~~ort~~ canonical map $V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}/W$. In the lecture I indicated a proof of this result using the period-mapping. This period mapping was also used to obtain a similar description for simple-elliptic singularities.

To state it, let W_a be an affine Weylgroup acting on an affine space V. Let $T_a \subset W_a$ denote the translation subgroup and write $W = W_a/T_a$. For any elliptic curve $E/\mathbb{C}$ consider the abelian variety ~~A~~ $E \otimes T_a$ ~~or~~ $(\simeq E^l)$ Over $E \otimes T_a$ exists a line bdl $\mathcal{L}$ which (i) admits a W action lifting the canonical action of W on $E \otimes T_a$, (ii) whose associated Hermitian form is < 0 and (iii) generates the group (infinite cyclic) of line bdls satisfying (i).

We then have that o-section$\setminus$Tot$(\mathcal{L})/W$ isomorphic is to $\mathbb{C}^{1+l}$. Denote the former space by $S^E_{W_a}$ and write $D^E_{W_a}$ for the discriminant of the canonical map Tot$(\mathcal{L}) \to S^E_{W_a}$.

Now suppose X_0 simply elliptic, i.e. obtained by collapsing the o-section of a line bundle $\underset{E}{\downarrow}\mathcal{L}$ (E elliptic curve as above) of chern class $k-9$ $(k=6,7,8)$ to a point. Then the pair (S,Δ) is isomorphic to $(S^E_{W_a}, D^E_{W_a})$ with $W_a = \hat{E}_k\, W(\hat{E}_k)$.

Eduard Looijenga

Geometrie 20.–25.10.75

Ungleichungen für polar-reziproke konvexe Körper

Für die Quermaßintegrale W_i, W_j^* zweier zueinander bezüglich der Einheitskugel polarer konvexer Körper K, K^* gilt nach Firey

$$W_i^{n-j}\, W_j^{*\,n-i} \ge \varkappa_n^{2n-i-j},$$

falls $i+j=n-1$ ist. ($\varkappa_n$ = Volumen der Einheitskugel im euklidischen Raum E^n). Mittels der Ungleichungen von Minkowski-Fenchel-Alexandrow ergibt sich die Gültigkeit für $i+j \ge n-1$. Für $i+j < n-1$ sind die ~~äußeren~~ Schranken, außer in E^2, noch unbekannt, allenfalls vermutet. Bemerkenswert ist, daß in E_3 für die Oberflächen S, S^* $(i=j=1)$ $SS^* \ge 16\pi^2 = \omega_3^2$ gilt (ω_n Oberflächeninhalt der Kugel in E^n), während für alle $n>3$ $SS^* < \omega_n^2$ sein kann. Die obigen Produkte sind nach oben unbeschränkt, doch lassen sich Schranken angeben, die In- und Umkugelradius von K enthalten. Entsprechende Abschätzungen existieren auch für zueinander inverse Körper.

Erhard Heil, Darmstadt

Strahlpartitionen in Gruppen und Geometrie.

Will man ausgehend von einem Vektorraum V den zugehörigen Affinraum erklären, so bietet sich als explizite Erklärung der einzuführenden „Punkte" folgende Konstruktion an: Man betrachtet die Permutationsgruppe Π von V bestehend aus allen Abbildungen $h(x_0, \lambda_0): x \mapsto x_0 + \lambda_0 x$ $(x \in V)$, $x_0 \in V$, $\lambda_0 \in K_0 : K \setminus \{0\}$, und deren spezielle Untergruppen $T(y^*)$ $(y^* \in V \setminus \{\vec{o}\})$ bestehend aus allen $h(\rho y^*, 1)$ mit $\rho \in K$ und $D(x^*)$ $(x^* \in V)$ bestehend aus allen $h((1-\lambda)x^*, \lambda)$, $\lambda \in K_0$.
Die Unterteilung von Π

$$(*) \qquad \Pi = D(x^*) \cup \ldots \cup T(y^*) \cup \ldots$$

besitzt die Besonderheit, daß je 2 ~~verschiedene~~ Summanden entweder gleich oder nur die identische Abbildung gemein haben („Strahlpartition" von Π mit den „Strahlen" $D(x^*), \ldots, T(y^*), \ldots$). Eine Untergruppe U von Π heißt geometrisch, wenn sie Vereinigung von Strahlen ist. SATZ: Die Gesamtheit $\mathcal{G}$ aller geometrischen U-gruppen U ~~zur~~ zur Strahlpartition $(*)$ ist ein Verband mit der Ordnung $\subset$, welcher atomar, vollständig, induktiv, nach oben semimodular und komplementär ist. (sogenannte „verallgemeinerte Inzidenzgeometrie"). Die $D(x^*), \ldots, T(y^*)$ sind die Atome, für die Verbandsoperationen gilt $\sqcap = \cap$ und z.B. (für $x_1 = x_2$) ist $D(x_1) \sqcap D(x_2) = D(x') \cup \ldots \cup T(x_1 - x_2)$, wobei x' alle baryzentrischen Linearkombinationen von x_1 und x_2 durchläuft. Ferner ist $\cup\{T(y^*) : y^* \in V \setminus \{\vec{o}\}\}$ isomorph zu V. Betrachtet man daher $\{D(x) : x \in V\} =: P$ als „Punktmenge", so macht die Strahlpartition $(*)$ den Affinen Raum (P, V, v) (mit der bijektiven Zuordnung $v : P \to V$ gemäß $D(x) \mapsto x$) sichtbar. Entsprechend legt die Strahlpartition $U' = D(x') \cup \ldots \cup T(y') \cup \ldots$ einer jeden geometrischen Untergruppe U' den zugehörigen affinen Teilraum $(P', V', v|P')$ bloß. Die Strahlpartition $(*)$ liefert zugleich die projektive Erweiterung von (P, V, v) mit den uneigentlichen" Punkten $T(y^*)$, $y^* \in V \setminus \{\vec{o}\}$.

Verallgemeinerung: "Zu jeder „Strahlpartition" $\mathcal{S}$ einer beliebigen Gruppe G d.h. Unterteilung $G = \cup_\nu S_\nu$ von G in bis auf $\mathbb{1}$ disjunkte Untergruppen S_ν (= Strahlen") ist der zugehörige Verband $\mathcal{G}$ der „geometrischen" Untergruppen atomar, vollständig und induktiv. Es gibt zahlreiche Fragen betreffend $G, \mathcal{S}, \mathcal{G}$, die noch nicht gelöst sein dürften (siehe G. Aumann, Strahlpartitionen in Gruppen und Geometrie, Sitz. Ber. Bayer. Ak. d. Wiss. 1975 (Math. nat. Kl.), 1–11)

G. Aumann

Konvexe Körper, die zu ihren Polarkörpern affin verwandt sind.

Nach J. RADON (1916) sind die Minkowski-Ebenen $\mathfrak{M}_2$ mit symmetrischer Transversalität $\dashv$ ($v_1 \dashv v_2 \Leftrightarrow \|v_1+\tau v_2\| \geqq \|v_1\|$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$) genau diejenigen Minkowski-Ebenen, bei welchen der Polarbereich $\mathfrak{E}^*: \|f\| \leqq 1$ ($f \in \mathfrak{M}_2^*$) des Eichbereichs $\mathfrak{E}: \|x\| \leqq 1$ ($x \in \mathfrak{M}_2$) durch Drehung um den Ursprung o mit $\frac{\pi}{2}$ und Streckung mit dem Zentrum o in $\mathfrak{E}$ übergeht. Als mögliche Verallgemeinerungen hiervon für den Fall $n > 2$ bieten sich die Minkowski-Räume $\mathfrak{M}_n$ mit symmetrischer Transversalität und die Minkowski-Räume $\mathfrak{M}_n$ mit $\mathfrak{E} = A(\mathfrak{E}^*)$ (A = nichtausgeartete Affinität mit $A(o)=o$), d.h. $\mathfrak{M}_n$ isometrisch zu $\mathfrak{M}_n^*$, an. Da die ersteren Räume nach BLASCHKE (1916) nur die euklidischen Räume sind, werden die konvexen Körper $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{E} = A(\mathfrak{E}^*)$ untersucht. Hierbei kann man sich auf den Fall "genormter" Körper $\mathfrak{E}^{(0)}$ und "genormter" Affinitäten $B^{(0)}$ beschränken, die durch eine Bewegungsmatrix in Kästchenform mit Drehwinkeln $\frac{l_j}{2^{\lambda_j}}\cdot\pi$ (l_j = ungerade Zahl, λ_j = natürliche Zahl) darstellbar sind.

Es läßt sich ein allgemeines Bildungsgesetz für $\mathfrak{E}^{(0)}$ angeben, bei welchem der Fundamentalbereich G der von $B^{(0)}$ auf der Einheitssphäre S_{n-1} um o erzeugten zyklischen Gruppe eine ausgezeichnete Rolle spielt. Hiernach können alle $\mathfrak{E}^{(0)}$ im Fall $n=2$ explizit bestimmt werden. Es existieren auch Beispiele von Körpern $\mathfrak{E}^{(0)}$ mit algebraischer Randkurve bzw. mit polyedrischem Rand.

K. Leichtweiß

On Fundamental Domains for Manifolds without Conjugate Points

Let (M, g) be a simply connected Riemannian manifold without conjugate points. Let Γ be a discontinuous subgroup of isometries (with fixed point in M allowed). For p_0 not a fixed point of Γ, we study properties of the Dirichlet fundamental region

$$F_0(p_0, \Gamma) = \{ q \in M;\ d(p_0, q) < d(q, \varphi(p_0))\ \forall \varphi \in \Gamma, \varphi \neq id \}$$

which are analogous to the classical results in the theory of the Dirichlet fundamental regions for discrete subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$, (compare J. Lehner, Discontinuous groups and automorphic functions, Mathematical Surveys #8, Amer. Math. Soc. 1964) This extends the Hauptsatz in a paper of E. Witt, "Über die Konstruktion von Fundamentalbereichen", Annali di Mathematica Pura et Appl. 36 (1954).

Paul Ehrlich
Mathematisches Institut der Universität
5300 Bonn
Wegelerstrasse 10
B.R.D.

Horosphären und Mgf neg. Krümmung von endlichem Volumen

Satz: Sei M zushgd, einf. zushgd., vollständig und die Krümmung K von M beschränkt durch $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, so daß $\mathrm{vol}(M/\Gamma) > c$ für alle Quotienten von M ist (d.h. für alle diskreten, torsionsfreien $\Gamma \subset I(M)$).

Ein sehr wichtiger Schritt im Beweis dieses Satzes ist das folgende Lemma:

Lemma Sei M zshgd, einfach zshgd, vollst., $-b^2 \leq k \leq -a^2 < 0$ und d eine Konstante. Dann gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(M, d) > 0$, so daß für alle $p_0 \in M$, $A, B \in I(M)$, die fixpunktfrei auf M operieren und verschiedene Fixpunkte in $M(\infty)$ haben und für die $\sup\limits_{p \in B_1(p_0)} d(Ap, p) < \varepsilon$, $d(Bp_0, p_0) < d$ gilt, die von A und B erzeugte Untergruppe nicht diskret ist.

Das entscheidende Hilfsmittel zum Beweis dieses Lemmas sind die Horosphären in M.

Ernst Heintze, Bonn

Über die Striktionslinien von einparametrigen Scharen linearer Räume.

Im n-dimensionalen Euklidischen Raum R_n werden einparametrige Scharen s-dimensionaler Ebenen A_s betrachtet. Für die so erzeugten Mannigfaltigkeiten (Axoide) $M_{s+1} = \{A_s\}$, die Verallgemeinerungen der Regelflächen ($s=1$) darstellen, wird eine Erklärung der Striktionslinie gegeben. Es werden die beiden folgenden Sätze bewiesen:

(1) Längs der Striktionslinie bilden die erzeugenden s-dimensionalen Ebenen A_s eine Parallelschar, d.h. die Multivektoren, durch die die A_s erfaßt werden können, sind längs der Striktionslinie parallel verschoben. (Verallg. eines Satzes von Darboux - Myller)

(11) Ist die Striktionslinie eine geodätische Linie auf dem Axoid M_{SH}, so ist sie auch isogonale Trajektorie der Erzeugendenschar.
(Verallgem. eines Satzes von Bonnet)

H. R. Müller / Braunschweig.

Striktionspunkte affiner Bahnstrahlflächen in der Kinematik

Bei der Übertragung des Satzes von H. Resal über die Striktionspunkte von Bahnstrahlflächen in der euklidischen Kinematik auf affine Bewegungsvorgänge spielen zwei verschiedene Definitionen des Striktionspunktes (siehe Lang u. Tölke in Arch. Math. 1974 und Jenne in M. Z. 1964) eine Rolle.
In der pseudoeuklidischen Raumkinematik wird gezeigt, daß der Satz von H. Resal für die Affinstriktionspunkte der isotropen Bahnstrahlflächen genau dann gilt, wenn die Erzeugenden ihrer asymptotischen Torsen in einer linearen Strahlkongruenz liegen. Für die nichtisotropen Bahnstrahlflächen ist der Satz wie in der euklid. Kinematik erfüllt. Die pseudoeuklidischen Schraubungen sind dadurch gekennzeichnet, daß der Satz von Resal in der reinaffinen Fassung für alle isotropen Bahnstrahlflächen gilt.
Es wird ein Ausblick auf die möglichen Verallgemeinerungen dieses Satzes für affine Bewegungsvorgänge gegeben.

Hubert Frank / Freiburg

Totally geodesic maps of riemannian manifolds.

Let M, N be C^∞–riemannian manifolds of dimension m, n respectively, with positive definite metrics g, g^*. Let $f: M \to N$ be an immersion, not necessarily isometric. Let (e_i), $i = 1, 2, \dots, m$; (e^*_α), $\alpha = 1, 2, \dots, n$ be orthonormal frames on M and N, and let (w_i), (w^*_α) be the corresponding coframes. Let

$$f^*(w^*_\alpha) = \sum_i a_{\alpha i} w_i .$$

The covariant derivative of $a_{\alpha i}$ is given by

$$Da_{\alpha i} = da_{\alpha i} + \sum_j a_{\alpha j} w_{ji} + \sum_\beta a_{\beta i} w^*_{\beta\alpha} = \sum_j a_{\alpha ij} w_j \quad \text{with } a_{\alpha ij} = a_{\alpha ji}.$$

The map f is <u>harmonic</u> if $\sum_i a_{\alpha ii} = 0$, <u>totally geodesic</u> if $a_{\alpha ij} = 0$. Evidently

<u>totally geodesic</u> $\Rightarrow$ <u>harmonic</u>. We seek <u>global</u> theorems when <u>harmonic</u> $\Rightarrow$ <u>totally geodesic</u>.

Write $h = \sum_{\alpha, i} a_{\alpha i} a_{\alpha i}$; then elementary calculations which make use of Cartan's structure equations, show that the Laplacian of h is given by

$$\tfrac{1}{2} \Delta h = \sum_{\alpha, i, j} a_{\alpha ij} a_{\alpha ij} + \sum_{\alpha, i} a_{\alpha i} \Delta a_{\alpha i}$$

where $\Delta a_{\alpha i}$ is the Laplacian of $a_{\alpha i}$. We write $Q = \sum a_{\alpha i} \Delta a_{\alpha i}$, and use E. Hopf's lemma to obtain

<u>Theorem 1</u> <u>Let M be compact and suppose $Q \geq 0$ everywhere. Then f is totally geodesic.</u>

It is easy to prove the following identity:-

$$\Delta a_{\alpha i} = \sum_k a_{\alpha kki} + \sum_j a_{\alpha j} R_{ji} - \sum_{\beta, \gamma, \delta, k} R^*_{\beta\alpha\gamma\delta}\, a_{\beta k} a_{\delta k} a_{\delta i}$$

For a harmonic map, $\sum_k a_{\alpha kki} = 0$ and hence $Q = \sum_{\alpha, i, j} a_{\alpha i} a_{\alpha j} R_{ji} - \sum a_{\alpha i} a_{\beta k} a_{\delta k} a_{\delta i} R^*_{\beta\alpha\gamma\delta}$.

Thus we have

<u>Theorem 2</u>. <u>When</u> $\sum a_{\alpha i} a_{\alpha j} R_{ji} \geq \sum a_{\alpha i} a_{\beta k} a_{\gamma k} a_{\delta i} R^*_{\beta\alpha\gamma\delta}$,

<u>the harmonic map f is totally geodesic.</u>

Tom Willmore
Durham University
England.

Ein Produktsatz für die zweite Totalkrümmung

Es werden Immersionen $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ geschlossener Mannigfaltigkeiten betrachtet. Die i-te elementarsymmetrische Funktion $K_i(e)$ der Eigenwerte der zweiten Fundamentalform in Normalenrichtung e heißt i-te Krümmung, und das (geeignet normierte) Integral von $(K_i(e))^\beta$ über das Einheitsnormalenbündel heißt i-te Totalkrümmung der Ordnung β und wird mit $T_i(f, \beta)$ bezeichnet.

In Analogie zum bekannten Produktsatz für die Lipschitz-Killing-Krümmung $K_n(e)$ wird die zweite Totalkrümmung der Ordnung 2 $T_2(f_1 \times f_2, 2)$ ausgedrückt durch verschiedene Totalkrümmungen von f_1 und f_2.

Ein Korollar: Für geschlossene Flächen $f_i: M_i^2 \to \mathbb{R}^{2+m}$ $(i=1,2)$ gilt: $T_2(f_1 \times f_2, 2) \geqq 2 \cancel{4} + \frac{2(m+2)}{9m}\ \frac{2}{9 \cdot m}\left(\beta_1(M_1) + \beta_1(M_2)\right) + \frac{m+1}{9 \cdot m} \cdot \beta_1(M_1) \cdot \beta_1(M_2)$
(dabei bezeichnet $\beta_1(\cdot)$ die erste Betti-Zahl)
und die Gleichheit steht genau dann, wenn $m = 1$ und $f_1(M_1)$ und $f_2(M_2)$ Kugeln von gleichen Radien sind.

W. Kühnel, TU Berlin

Minimale Immersionen in Sphären.

Sei $x: M_n \to S^{n+m}(1)$ eine isometrische Immersion einer n-dim. Riem. Mannigf. in die $(n+m)$-dim. Einheitssphäre. M sei zusammenh. u. kompakt (ohne Rand).

Problem: Gilt: x ist minimale Immersion u. die Schnittkr. von M ist $\geqq c$, $c \in \mathbb{R}$, ist dann $x(M_n)$ eine n-Sphäre?

Resultate (Eberlein, Gardner): für $c = 1$ ist ~~ist~~ $x(M_n)$ Sphäre.

(Chern, do Carmo, Kobayashi): für $c = \frac{1}{3}$ ist die Behauptung falsch (Veronese-fläche).

Im Vortrag wird gezeigt: für $c = \frac{1}{2}$ ist $x(M_n)$ Sphäre.

Beweishilfsmittel: Berechnung der Laplaceschen für die Quadrat-Länge der zweiten Grundform (vgl. Simons in Ann. of Math.).

U. Simon, Berlin, TU.

<u>Über affine geschlossene Zwangläufe in der Ebene</u>

Es werden kinematisch begründete ganzzahlige Überdeckungen $\gamma: A^2 \to \{0, \pm 1, \dots, \infty\}$ der (affinen reellen) Ebene A^2 betrachtet: x heiße <u>normaler</u> Punkt in A^2 bei einer Überdeckung γ, wenn x eine Umgebung hat, auf der γ konstant ist, andernfalls heiße $x \in A^2$ <u>singulär</u>. Bei einem geschlossenen <u>affinen Zwanglauf</u> (1-parametr. affine Transformationsschar $\alpha(t) \in A(2) \simeq \mathbb{R}^2 \otimes GL(2,\mathbb{R})$ mit t-Periode 1) einer affinen <u>Gangebene</u> A^2 auf einer affinen <u>Rastebene</u> $\hat{A}^2$ kann man jedem Punkt $x \in A^2$ einmal die <u>Tangentendrehzahl</u> $\gamma(x)$ seiner in $\hat{A}^2$ beschriebenen Bahn $\alpha(t)x$, zum andern die <u>Durchlaufzahl</u> $m(x)$ (reziproke t-Periode der Bahn $\alpha(t)x$) als Überdeckungszahl zuordnen. (i) Bei der Überdeckung γ der Gangebene A^2 ist die Menge der singulären Punkte die <u>Gangpolbahn</u> (welche unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an α eine stückweise glatte geschlossene Kurve in A^2 ist). (ii) Bei der Überdeckung m gilt $m(x)=1$ genau für die normalen Punkte; die Menge der singulären Punkte besteht aus einer Anzahl von isolierten Punkten und Geraden; wenn α keine Fixpunkte od. Fixrichtungen besitzt, ist diese Anzahl endlich, kann aber beliebig groß sein. Ist α ein (regulärer) <u>euklidischer</u> Zwanglauf, so gibt es höchstens <u>einen</u> sing. Punkt in A^2.

C. Lübbert, TH Darmstadt

<u>Divergence of geodesics in simply connected manifolds without conjugate points</u>

Let C be a compact subset of a complete riemannian manifold M. Suppose $\exists\ \delta > 0$ such that each geodesic ray $c: [0, \infty) \to M$ with $c(0) \in C$ can be extended to a geodesic ray $\tilde{c}: [-\delta, \infty) \to M$, without conjugate points. The set $S(C)$ of stable Jacobi fields along geodesic rays beginning in C is said to be closed if the limit of any convergent sequence of stable Jacobi fields is again stable. For $t \geq 0$ let $\Phi_C(t) = \operatorname{Inf} \|Y(t)\|$ over all Jacobi fields Y ~~such that~~ along geodesic rays c with $c(0) \in C$, $Y(0) = 0$, $\|DY(0)\| = 1$. Then the following

<u>Theorem</u> (i) $\mathcal{S}(C)$ is closed $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \Phi_C(t) = \infty$

(ii) $1/\Phi_C \in L^2[1,\infty) \Rightarrow \mathcal{S}(C)$ is closed;

holds when the sectional curvatures of M are ~~al~~bounded from below.

Now let c_1 and c_2 be two geodesic rays going out from a point p of a simply connected manifold $\tilde{M}$ without conjugate points. Then if the sectional curvatures of $\tilde{M}$ are bounded from below and stable Jacobi fields converge to stable Jacobi fields, it is a consequence of the above theorem that $d(c_1(t), c_2(t)) \to \infty$ as $t \to \infty$.

John J. O'Sullivan, Bonn

Kritische Punkte und Krümmung für Mengen des Konvexringes

Für $K \in \tilde{\mathcal{K}}^n$ (= Konvexring = Menge der endlichen Vereinigungen konvexer Körper des euklidischen Raumes E^n), $p \in E^n$ und $\xi \in S^{n-1}$ (= Einheitssphäre des E^n) definieren wir

$$i(K,p,\xi) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \sum_{j_1<\dots<j_k} i(K_{j_1} \cap \dots \cap K_{j_k}, p, \xi),$$

wobei $K = \bigcup_{j=1}^{r} K_j$ eine Darstellung von K als Vereinigung konvexer Körper ist und $i(K',p,\xi)$ für konvexes K' gleich 1 gesetzt ist, wenn die Stützmenge in K' in Richtung ξ den Punkt p enthält, und gleich 0 sonst. Die Definition ist unabhängig von der gewählten Darstellung. Wir bezeichnen $i(K,p,\xi)$ als "Index" und jeden Punkt p mit $i(K,p,\xi) \neq 0$ als "kritisch".

<u>Satz</u>: $\sum_{p \in K} i(K,p,\xi) = \chi(K)$ (Eulersche Charakteristik) für fast alle Richtungen ξ.

Durch $\varkappa(K,B) = \int_{S^{n-1}} \sum_{p \in B} i(K,p,\xi)\, d\omega(\xi)$ (ω = Lebesgue-Maß auf S^{n-1}) ($K \in \mathfrak{K}^n$, $B \subset E^n$ Borelmenge) wird eine additive Fortsetzung des (nach A.D. Aleksandrov erklärten) Krümmungsmaßes konvexer Körper auf den Konvexring gegeben.

Satz: $\varkappa(K, E^n) = \omega(S^{n-1})\chi(K)$.

Hierdurch werden Resultate von Banchoff (1967) und Hadwiger (1969) vom Spezialfall der Polyeder auf beliebige Elemente des Konvexringes ausgedehnt.

R. Schneider (Freiburg i. Br.)

Horizonte und Horosphären in Riemannschen Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte

Im euklidischen und hyperbolischen Raum gibt es einen Horizont, d.i. die Menge der "unendlich fernen Punkte", und Horosphären, "Sphären mit Mittelpunkt auf dem Horizont". Es sollte diskutiert werden, unter welchen Bedingungen sich eine solche Konstruktion auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte nachahmen läßt. Hinreichend dafür ist, daß es auf jedem geodätischen Strahl n linear unabhängige Jacobifelder beschränkter Länge gibt. Mannigfaltigkeiten ohne Fokalpunkte und Mgf. mit geodätischem Fluß vom Anosov-Typ erfüllen diese Bedingung. – Als Anwendung davon kann gezeigt werden, daß auf Mannigfaltigkeiten ohne Fokalpunkte (wo alle Kugeln konvex sind) zwei Geodätische von beschränktem Abstand stets einen total geodätischen flachen Streifen konstanter Breite berandern, also im euklidischen Sinne parallel sind.

J.-H. Eschenburg
Bonn

Geschlossene Geodätische auf homogenen Räumen

Es wird vermutet, daß es auf jeder kompakten Mannigfaltigkeit unendlich viele geschlossene Geodätische gibt bzgl. jeder Metrik.
1969 hat Gromoll-Meyer ~~den~~ bewiesen, daß es unendl. viele geschl. Geod. gibt wenn die Bettizahlen $b_i(\Lambda(M), K)$, $\Lambda(M) = \{c : S^1 \to M \text{ stetig}\}$ K bel. Körper, unbeschränkt sind. Dann konnten Sullivan-Vigué 1975 im Falle $\pi_1(M) = 0$ mit neuen topologischen Methoden zeigen, daß $b_i(\Lambda(M), \mathbb{Q})$ unbeschränkt ist genau dann wenn $H^*(M, \mathbb{Q})$ von mehr als einem Element erzeugt wird.
Für homogene Räume kann man zeigen:
<u>Satz 1</u>: Die homogenen Räume M, M kompakt, $\pi_1(M) = 0$ mit $H^*(M, \mathbb{Q})$ von einem Element erzeugt, sind: S^n, $P^n\mathbb{C}$, $P^n\mathbb{H}$, P^2Ca
und $SU(3)/SO(3)$, $SO(2n+1)/SO(2) \times SO(2n-1)$, $G_2/SO(4)$
$SO(2n+1)/SO(2n-1) = T_1 S^{2n}$, $G_2/U(2)$ mit $U(2) \subset SO(4) \subset G_2$
$G_2/SO(3)$ mit $SO(3) \subset SO(4) \subset G_2$, G_2/S^3 mit $S^3 \subset SO(4) \subset G_2$
G_2/S^3 mit „schiefer" Einbettung von S^3 in G_2
Für alle anderen homogenen Räume folgt aus den obigen Sätzen also die Existenz von so vielen geschl. Geod..
Mit Hilfe von Spektralsequenzen kann man dann zeigen:
<u>Satz 2</u>: Für die homogenen Räume in Satz 1, außer S^n, $P^n\mathbb{C}$, $P^n\mathbb{H}$, P^2Ca, gilt: $b_i(\Lambda(M), \mathbb{Z}_2)$ ist unbeschränkt
Zusammenfassend kann man sagen:
Alle kompakten einfach zusammenhängenden homogenen Räume außer S^n, $P^n\mathbb{C}$, $P^n\mathbb{H}$, P^2Ca haben so viele geschlossene Geodätische in jeder Metrik.

Wolfgang Ziller
Bonn

Liouvillesche Flächen mit $M = 0$.

Es werden Flächen(stücke) gesucht, deren Metrik so auf die Form von „Liouville" gebracht werden kann, daß die „Liouvilleschen Parameterlinien" <u>Krümmungslinien</u> sind.
Analytisch:
Man bestimme $f(u)$, $g(v)$, $L(u,v)$, $N(u,v)$ so, daß die 1-Formen

$$\mathrm{I} \equiv ds^2 = (u+v)\left(\frac{du^2}{f(u)} + \frac{dv^2}{g(v)}\right) \; ; \; \mathrm{II} \equiv L\,du^2 + 0 \cdot du\,dv + N\,dv^2$$

die erste bzw. zweite Grundform einer Fläche sind.
O. Bonnet gab an, (Journ. de l'école polyt., Bd 25, 1867) daß die Flächen 2. Grades die einzigen derartigen Flächen sind. Die Herleitung von Bonnet enthält allerdings einen Rechenfehler. Es wird hier gezeigt, daß die Behauptung dennoch richtig ist. Beim Beweis wird benutzt, daß für die Gaußsche Krümmung K von $\mathcal{L}$-Flächen gilt: $(u+v) \cdot K_{uv} + 2(K_u + K_v) = 0$.
Diese Dgl. läßt sich nach der „Kaskadenmethode" lösen. Berücksichtigt man bei der stufenweisen Auflösung die Gestalt von I und II, so erhält man, daß K ein Produkt einer Funktion $p(u)$ und einer Fkt. $q(v)$ ist. Der Rest ergibt sich daraus sehr leicht.

H. Vesél
Karlsruhe

Krümmungsflächen von isometrischen Immersionen in Räume konstanter Krümmung

Es sei $f: M \to N$ eine isometrische Immersion einer m-dim. Riemannschen Mannigfaltigkeit M in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit N konstanter Schnittkrümmung und $\lambda: \nu(f) \to \mathbb{R}$ eine VB-Linearform, deren Werte $\lambda(\eta_p)$ Hauptkrümmungen von f bezügl. η_p sind. Sei schließlich E ein Unter-VB von TM der Faserdimension $k > 0$, das über einer in M dichten Menge mit $\bigcap_{\eta \in \Gamma(\nu(f))} \operatorname{Kern}(A_\eta - \lambda(\eta) I)$ übereinstimmt. Dann gilt:

Satz 1 E ist involutiv, und im Falle $k \geq 2$ ist λ kovariant konstant längs E. Ist λ kovariant konstant längs E und ist N einer der Standardräume $\mathbb{R}^n$, S^n_κ, H^n_κ, so bildet f jedes Blatt (= Krümmungsfläche zu λ) der von E induzierten Blätterung in eine k-dim. Sphäre von N ab.

Satz 2 Ist $j: K \to M$ eine einzelne Krümmungsfläche zu einer kovariant konstanten Hauptkrümmungsfunktion $\mu: j^*\nu(f) \to \mathbb{R}$ und ist N einer der Standardräume, so bildet $f \circ j$ K in eine m-dim. (im Fall $\mu = 0$ große) Sphäre von N ab.

A. Reckziegel, Köln

A vanishing theorem for the characteristic classes of Γ-foliations

Let $\mathcal{F}$ be a Γ-foliation of codimension q on a manifold M, where Γ is a transitive Lie pseudogroup. There has been the following.

Problem. If Γ is of finite degree, then

$$(*) \quad \operatorname{Pont}^r(\nu(\mathcal{F}); \mathbb{R}) = 0 \quad \text{if } r > q,$$

where $\operatorname{Pont}^*(\nu(\mathcal{F}))$ is the real Pontrjagin ring of the normal bundle of $\mathcal{F}$.

In the talk, I gave a partial answer to the problem;

Theorem. If Γ is of finite degree and of regular Cartan type, then (*) holds.

Most of known examples of Γ of finite degree are of regular Cartan type. ~~Here we call Γ of regular Cartan type if there exists such Lie group~~.

Seiki Nishikawa, Bonn.

Kongruenz und Existenz von differenzierbaren Abbildungen

Ein fundamentales Resultat für Untermannigfaltigkeiten riemannscher Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung ist der Kongruenz- und Existenzsatz. Er wird mit Hilfe der Metriken und der Zusammenhänge im Tangential- und Normalbündel und der zweiten Fundamentalform formuliert. Dieser Satz lässt sich verallgemeinern auf differenzierbare Abbildungen f einer Mannigfaltigkeit M in eine Mannigfaltigkeit N, wobei N eine G-Struktur und einen damit verträglichen Zusammenhang hat, derart dass bei Parallel-verschiebung einer Basis die Komponenten des Torsions- und Krümmungstensors konstant bleiben (d.h. $\nabla T = 0$ und $\nabla R = 0$).
Der verallgemeinerte Satz wird

mit Hilfe der G-Struktur und des Zusammenhangs im zurückgeholten Tangentialbündel f^*TN und mit Hilfe des Vektorbündelhomomorphismus $f_* : TM \longrightarrow f^*TN$ formuliert.

Brigitte Wettstein, Zürich

Isometries of surfaces

Theorem 1. Let $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain, $M : \overline{\mathcal{D}} \to E^4$ a surface. Let $n : M \equiv M(\overline{\mathcal{D}}) \to N(M)$ be a section of the normal bundle $N(M)$ of M such that, for each $m \in M$, the second fundamental form $\mathrm{II}_m(n_m, .) : T_m(M) \to \mathbb{R}$ is definite and the vector n_m is not orthogonal to the mean curvature vector ξ_m at m. Let v be an infinitesimal isometry of M such that, again for each $m \in M$, the vector v_m is situated in the vector space spanned by $T_m(M)$ and n_m. Further, let v_m be orthogonal to $T_m(M)$ for each $m \in \partial M$. Then $v = 0$ on M.

Now, let $M : \overline{\mathcal{D}} \to E^5$ be a surface such that $\dim T^2_m(M) = 4$ for each $m \in M$. At $m \in M$, choose an orthonormal frame such that $T_m(M) = \{v_1, v_2\}$, $T^2_m(M) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. The second fundamentel form be $\mathrm{II}_m(x v_1 + y v_2) = (a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2) v_3 + (b_1 x^2 + 2b_2 xy + b_3 y^2) v_4$. Then $|k|$, $k := (a_1 - a_3) b_2 - a_2 (b_1 - b_3)$, is an invariant.

Theorem 2. Let further $M : \overline{\mathcal{D}} \to E^5$ satisfy: (i) $K \neq k$ and/or $K \neq -k$ on M, (ii) there are no real conjugate directions on M. Let Φ be an infinitesimal second order deformation of M which is trivial on ∂M. Then Φ is trivial on M.

Alois Švec, Praha

Eine Transformation einer ebenen konvexen Kurve

Es wird eine elementargeometrische Transformation T einer beliebigen konvexen Kurve auf das Verhalten ihrer Iterierten T^n hin untersucht. Dabei sind die Fixpunkte und die periodischen Punkte von T maßgebend. Die Fixpunkte werden allgemein bestimmt, die periodischen Punkte jedoch nur im Spezialfall in dem die konvexe Kurve eine Ellipse ist. In diesem Fall werden die Punkte der Periode 2 gerade von dem Pascal'schen Satz geliefert. Für eine beliebige glatte konvexe Kurve folgt aus einem Satz von Denjoy, daß T entweder periodische Punkte besitzt oder aber die sukzessiven Bilder eines jeden Punktes der Kurve auf dieser dicht liegen. Die analoge 3-dimensionale Aufgabe ist schwieriger und bisher nur wenig in Angriff genommen.

Moritz Arnsen, Dortmund

Hyperflächenbüschel, vom Standpunkt der mehrdimensionalen projektiven Geometrie aus betrachtet.

Es ist bekannt: Durch die Gesamtheit der Hyperebenen eines Büschels im Raume $\langle V_n^\sigma \rangle$ einer Veronesschen V_n^σ des P_{n_σ} $\left(n_\sigma = \binom{n+\sigma}{\sigma} - 1\right)$ wird die Gesamtheit der Hyperflächen σ-ten Grades im Parameterraume X_n der V_n^σ definiert. Es wird stets vorausgesetzt, dass der Basisraum $P_{n_\sigma - 2}$ des $P_{n_\sigma - 1}$-Büschels die V_n^σ nicht mehr als $(n-2)$-dimensional schneidet, d.h.

dass die Büschelhyperflächen keine Hyperfläche niederen Grades als s gemein haben. Bei der Abbildung der V_n^s auf eine V_n^{s+t} werden nun die Büschelhyperebenen auf die Räume $S_{n_{s+t}-n_t-1}$ einer

∞^1-Schar abgebildet. Im Vortrag wird nun die Frage nach der projektiven Gestalt dieser Raumscharen für alle s, t und $n \in N$ gestellt und gelöst. Die Raumscharen sind stets erzeugende Scharen eines gewissen Normregelgebildes bzw. eines Kegels darüber. Allgemein beschreibt man diese Gebilde so:

$F^{g_1^{\alpha_1} \dots g_r^{\alpha_r}}$ wird durch solche Räume $S_{\alpha_1+\dots+\alpha_r-1}$ beschrieben, welche entsprechende Punkte der unabhängig liegenden und bijektiv aufeinander bezogenen rationalen Normkurven

$$\underbrace{V_1^{g_1} \dots V_1^{g_1}}_{\alpha_1} \underbrace{V_1^{g_2} \dots V_1^{g_2}}_{\alpha_2} \dots \underbrace{V_1^{g_r} \dots V_1^{g_r}}_{\alpha_r}$$

$(1 \leq g_1 < \dots < g_r)$ verbinden. Der Kegel mit der Spitze S_{g_0-1} über einer solchen $F^{g_1^{\alpha_1} \dots g_r^{\alpha_r}}$ werde mit $F^{0^{g_0} g_1^{\alpha_1} \dots g_r^{\alpha_r}}$ bezeichnet. Bei unseren Raumscharen sind die g_i aufeinanderfolgende Ziffern aus der Reihe $0, 1, 2, \dots$, und die α_i ergeben sich auf einfache Weise, indem man zur Reihe

$$0, 1, 2, \dots, s-1, s, s-1, \dots 1, 0, \dots$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

die n-1-fach iterierte ~~Summe~~ Reihe der Partialsummen bildet und diese Reihe nach einer leicht durchsichtigen Vorschrift in die Spalten einer unendlichen Matrix einträgt.

Werner Burau, Hamburg

Eine Verallgemeinerung des Doppelverhältnisbegriffes

Das Doppelverhältnis als ein wichtiges Hilfsmittel mancher geometrischer Theorien wurde mehrmals verallgemeinert, am meisten auf Figuren von mehr als vier Elementen und auf Elementargebilde höherer Stufe. In letzten zwei Jahrzehnten haben einige Autoren den Begriff des DV auf Punktquadrupel der projektiven Geraden über verschiedene kommutative Körper und Schiefkörper und über verschiedene Algebren erweitert. Hier wird eine Verallgemeinerung anderer Art als die bisher bekannten gegeben, welche sich aber nur auf Vierelementenfiguren eines reellen Gebildes bezieht. Dazu geht man von einer beliebigen Zweiindizesfunktion $\Delta_{\mu\nu} = \varphi(u_\mu, u_\nu)$ aus, und stellt für das Doppelverhältnis dieser Funktion beim gegebenen geordneten Indexquadrupel den Ansatz

$$D_{ijkl} = \frac{\Delta_{ik}\,\Delta_{jl}}{\Delta_{il}\,\Delta_{jk}}$$

auf, und versucht dann mit Hilfe von Funktionalgleichungen die Funktion φ so zu bestimmen, dass dabei die Gültigkeit möglichst vieler von den Grundeigenschaften des klassischen Doppelverhältnisses erhalten bleibt.

Stanko Bilinski, Zagreb

Über den Durchschnitt eines Polyeders mit einer Kugel.

Es seien e, f und k Ecken-, Flächen- und Kantenzahl eines konvexen Polyeders $P \subset E^3$, das in einer festen Kugel K mit Mittelpunkt O und Radius R enthalten ist. K(a) sei die mit K konzentrische Kugel vom Radius $a > 0$.

Satz. Für das Volumen $|P \cap K(a)|$ gilt die Abschätzung

$$|P \cap K(a)| \leqq 4k \cdot |T \cap K(a)|, \qquad (*)$$

wobei T das folgende Tetraeder OABC bezeichnet: Das Dreieck ABC hat die beiden Winkel $\sphericalangle A = \frac{\pi f}{2k}$ und $\sphericalangle B = \frac{\pi}{2}$, $OC = R$, OA steht normal auf der Ebene ABC, und der räumliche Winkel bei O beträgt $\frac{\pi}{k}$.

Der Spezialfall $a \geqq R$ wurde von A. Florian (1956), L. Fejes Tóth (1960) und H. Florian (1961) erledigt.

Gleichheit besteht in (*) für die 5 K einbeschriebenen regulären Polyeder und bei $a \geqq OA$ nur für diese.

A. Florian (Salzburg)

Drachennetze

[1] BLASCHKE, W.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie I. Math. Zeitschr. 28 (1928), 153–157.
[2] KOCH, R.: Diagonale Netze aus Schmieg- und Krümmungslinien. Erscheint demnächst (Journal of Geometry)

Ein C^s-Kurvennetz N in einer regulären C^r-2-Fläche $\Phi \subset E^n$ ($n \geqq 2$, $r \geqq s \geqq 1$) heißt ein "Drachennetz" [2], wenn ein C^s-Netz N_1 existiert derart, daß (N, N_1) ein berührungsfreies Paar diagonaler C^s-Netze [1], [2] bilden und jedes N-Netzviereck mit einem Paar von N_1-Diagonalen dieselben Längen- und Winkelsymmetrieeigenschaften wie ein (geradliniges) Drachenviereck in E^2 aufweist.

Die Trägerflächen $\Phi \in C^r$ und Diagonalennetze $N_1 \in C^r$ der Drachennetze $N \in C^s$ ($3 \leqq s \leqq r$) werden mithilfe der Kurven konstanter GAUSS-RIEMANNscher bzw. konstanter geodätischer Krümmung in Φ gekennzeichnet. Damit können alle C^s-Drachennetze ($s \geqq 3$) bestimmt werden.

Schließlich wird ein verallgemeinerter Drachennetzbegriff vorgestellt, welcher nur auf Winkeleigenschaften basiert. Es wird gezeigt: Jede reguläre C^r-2-Fläche ($r \geqq 2$) trägt lokal verallgemeinerte Drachennetze; jedes verallgemeinerte C^s-Drachennetz ($s \geqq 1$) ist lokal konform zu einem ebenen C^s-Drachennetz.

Richard Koch, München.

Über die Existenz isometrischer Immersionen mit Codimension 2 zwischen Raumformen

Theorem Vor.: Seien $C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ mit $C > 0$ und $C > \tilde{C}$, sei M^m_C eine m-dim. $\underbrace{\text{Raumform}}$ der Krümmung C $(m \geq 4)$ und sei $\tilde{M}^{m+2}_{\tilde{C}}$ ein
(d.h. zusammenhängend, vollständig, von konstanter Krümmung)

(m+2)-dim. Standard-Raum der Krümmung $\tilde{C}$, d.h.

$$\tilde{M}^{m+2}_{\tilde{C}} \in \{ \underset{\text{Standard-Sphäre}}{S^{m+2}_{\tilde{C}}}, \underset{\text{reeller projektive Raum}}{P^{m+2}_{\tilde{C}}}, \mathbb{R}^{m+2}, \underset{\text{hyperbolischer Raum}}{H^{m+2}_{\tilde{C}}} \}.$$

Beh.: Es existiert eine isometrische reell-analytische Immersion $M^m_C \longrightarrow \tilde{M}^{m+2}_{\tilde{C}}$
$\Longleftrightarrow$ M^m_C ist einfach-zusammenhängend (d.h. isometrisch zur Standard-Sphäre S^m_C)

Auf Grund bekannter Resultate (u.a. von Cartan und Ferus) erhält man folgendes Korollar:

Korollar. Es existiert keine isometrische reell-analytische Immersion einer m-dim nicht-einfach-zusammenhängenden Raumform positiver Krümmung $(m \geq 4)$ in eine (m+2)-dim. einfach-zusammenhängende Raumform.

Wolfgang Henke, Köln

Probleme der Darstellenden Geometrie und ihre automatische Lösung

Der Vortrag gab einen Überblick über Ergebnisse auf dem Gebiet des rechnergestützten Konstruierens in der Darstellenden Geometrie. Es wurde gezeigt, daß man mit Hilfsmitteln der elementaren Analytischen- und Differentialgeometrie explizite Lösungen für wichtige Aufgabenstellungen der Darstellenden Geometrie gewinnen kann. Die gewonnenen Formeln eignen sich zur numerischen Auswertung auf einer Rechenanlage. Zu den angesprochenen Aufgaben gehören die Darstellung von Quadriken, Regel-, Dreh-, Schraub- und Spiralflächen und die Probleme der Umrisse, der ebenen Schnitte und Durchdringungen bei diesen Flächen. Zwanzig Diapositive demonstrierten die Möglichkeiten der rechnergestützten Konstruktion von Aufgaben der Darstellenden Geometrie.

Wolfgang Grimm, Karlsruhe

Nichtlineare Differentialgeometrie, speziell Kurventheorie im 3-dim. Minkowski-Raum

Im Anschluß an den Übersichtsvortrag während der Geometrie-Tagung 1973, der den allgemeinen Rahmen der nichtlinearen Differentialgeometrie absteckte, soll hier ein spezielles Teilgebiet dargestellt werden. Dabei erhält man folgende Gliederung:

1.) Grundlage ist ein 3-dim. affiner Raum $A = (M, V, \vec{\ }: M \times M \to V)$ mit dem zugehörigen 3-dim. Vektorraum V. Die Tensoralgebra wird von den äußeren Potenzen $\Lambda^p V$ (p-Vektoren) und $\Lambda^p V^*$ (p-Formen) über die 1-dim. Vektorräume $\otimes^w \Lambda^3 V^*$, $\otimes^{-w} \Lambda^3 V$ der Skalardichten vom Gewicht $w \in \mathbb{N}$ bis zu den p-Vektordichten weiterentwickelt, die für die hier gebrauchten Fälle im affinen Raum A veranschaulicht werden können.

2.) Für die Kurventheorie braucht man zusätzlich die metrischen Strukturen: Länge $l: V \to \mathbb{R}$ und Areal $F: V \times V \to \mathbb{R}$, letzteres induziert $f: \Lambda^2 V \to \mathbb{R}$. Der Verzicht auf ein Volumen hat das Auftreten von Dichten zur Folge.

3.) Für Kurven im Minkowski-Raum $(A; l, F)$ erhält man 2 Begleitbasen $(\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b}^*)$ sowie deren Frenet-Formeln. Krümmung $\kappa := f(\mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t}')$ und Torsionsdichte $T := \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}'$ vom Gewicht -1 bestimmen eine Kurve bis auf Anfangswerte eindeutig.

4.) Die Grenzschnittgebilde liefern bei benachbarten rektifizierenden Ebenen $(\mathfrak{R} := \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{t} = \mathfrak{b}^* \wedge \mathfrak{t})$ die Darboux-Achse, bei benachbarten l-Transversalebenen $(\mathfrak{Q}^* := \mathfrak{f} \wedge \mathfrak{b}^*)$ die Krümmungsachse und den Schmiegmittelpunkt sowie bei benachbarten Querebenen $(\mathfrak{Q} := \mathfrak{f} \wedge \mathfrak{b})$ die entsprechenden Gebilde. Diese überraschenderweise auch bei den allgemeinen metrischen Strukturen vorhandenen Grundgebilde einer Kurve führen z.B. zu speziellen Kurven wie „Bö-

schwungslinien" und 2 Sorten von „sphärischen Kurven".
Schlußbemerkung: Man kann diese Theorie auch als Axiomatik der Differentialgeometrie-Strukturen (hier speziell der metrischen Strukturen) betrachten.

Woldemar Barthel, Würzburg.

Minimale Untermannigfaltigkeiten von Flächenräumen

M sei eine differenzierbare, p-dimensionale Untermannigfaltigkeit eines n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes V $(1 \leq p < n)$, der eine p-Flächenstruktur trage vermöge der Grundfunktion f. f ist eine differenzierbare positive Funktion auf dem p-Graßmannkegel $Z^p V$ der zerlegbaren p-Vektoren, positiv homogen vom Grad 1, und die Hessesche von f^2 ist positiv definit. Obwohl bei diesem Ausgangspunkt im allgemeinsten Fall kein Skalarprodukt auf V gegeben ist, lassen sich durch f viele Begriffe der klassischen Differentialgeometrie übertragen und nützlich anwenden.
Theorem 1: f induziert auf M einen natürlichen linearen Zusammenhang D.
Satz: Das Normalenbündel NM von M trägt durch f eine Finslerstruktur.
Theorem 2: M ist minimal genau dann, wenn das mittlere Krümmungskovektorfeld längs M verschwindet.
Theorem 3: Für minimale Untermannigfaltigkeiten M ist der Quotient Fl_{III}/Fl_f der p-Flächenelemente bezüglich der 3. Fundamentalform und f eine innergeometrische Größe, nämlich gleich der Arealkrümmung K.

Jürgen Kern, Bonn

Codazzitensoren.

Codazzitensoren sind symmetrische Endomorphismenfelder auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die den Codazzigleichungen genügen; als „Formoperatoren" treten sie u.a. in der Hyperflächentheorie der euklidischen Räume auf. Speziell für die Untersuchung von minimalen Immersionen bzw. Immersionen mit konstanten mittl. Krümmungs~~vektor~~normale in Räume konstanter Krümmung sind kürzlich bei Erbacher, Nomizu, Smyth, Simon, Wegner u.a. Identitäten wichtig geworden, die auf den Codazzigleichungen beruhen; das erste Beispiel einer solchen Identität geht auf H. Weyl zurück. Es wird gezeigt, wie sich diese Identitäten von einem einheitlichen Ansatz her darstellen und verallgemeinern lassen. Hierbei entspricht jeweils einem Paar von Invarianten des Endomorphismenfeldes eine Identität. Anwendungsbeispiele sind globale und lokale Kennzeichnungen von kartesischen Produkten minimaler Immersionen in euklidische Sphären, die Resultate von Erbacher und Smyth erweitern.

H. F. Münzner, Bremen.

Periodic Minimalsurfaces

The first examples of triply periodic minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ were discovered by H. A. Schwarz in 1870. There has been little interest in these since that time, and no further examples were ever obtained so far as I know. Over the past year T. Nagano and B. Smyth have generated ∞-many examples by the root systems of compact semisimple Lie groups (to appear Proc Amer Math Soc). More recently I have obtained ∞-many examples by starting with one of a "high degree of symmetry" and applying the classical associate deformation of minimal surfaces. This now clears the way for the first attempts at classifying the space of all $f_\alpha : X \to T_\alpha$ (minimal immersions of a compact surface X in a flat 3-torus) which are conformal with respect to a fixed complex structure on X. The result is most simply stated when the genus of X is 3.

Theorem X compact Riemann surface of genus 3
$f_\alpha : X \to T_\alpha$ conformal minimal immersions of X in a flat torus T_α, $\alpha = 1, 2$.
Then f_1 and f_2 are associate (in the sense defined above).

The more general result for arbitrary genus must be stated in terms of the Albanese variety of X and its codimension 3 subvarieties

Brian Smyth.

Über den speziellen Satz von Bezout im projektiven Raum P_n

Für einen linearen Raum $P_a \subset \langle V_n^s \rangle \subset \langle S_{(n,s)} \rangle$ läßt sich eine Abbildung Φ in den Verband der linearen Teilräume von $\langle V_n^{s+1} \rangle$ definieren durch $\Phi(P_a) = P_a \otimes P_n \cap \langle V_n^{s+1} \rangle$. Der Satz von Bezout läßt sich mit Mitteln synthetischer Geometrie in folgender Form zeigen.

Seien im P_n n Hyperflächen F^{s_i} des Grades s_i $i \in \{1 \dots n\}$ gegeben und seien $H^{s_i} \subset \langle V_n^{s_i} \rangle$ die zugeordneten Hyperebenen mit $v^{s_i}(F^{s_i}) = V_n^{s_i} \cap H^{s_i}$. Sei $r \geq \max\{s_i \; i \in \{1, \dots, n\}\}$. Setze $D_r := \cap\, \Phi^{r-s_i}(H^{s_i})$. Es gilt:
$\exists s \in N$ mit $\dim \Phi^K(D_r) = c(K) = \text{const}$ $\forall K \geq s \Rightarrow c(K) = \prod_{i=1} s_i - 1$.

Es wird als einschränkende Voraussetzung nur benötigt, daß eine Gerade mindestens abzählbar viele Punkte enthält. Insbesondere wird auf algebraischen Abschluß verzichtet

Horst Timmermann

Operator-Ungleichungen

26. - 31. Oktober 1975

Eine Theorie der stark gekoppelten parabolischen Differential-Ungleichungs-Systeme mit Hilfe einer Ungleichung von Landau-Kolmogoroff.

von Karl Nickel - Karlsruhe

In den letzten 20 Jahren konnte die Theorie der parabolischen Differential-Ungleichungs-Systeme sehr weit entwickelt werden — soweit es sich um schwach gekoppelte Systeme handelt. Fast überhaupt nichts ist jedoch bis jetzt über stark gekoppelte Systeme bekannt. Es wird vorgeschlagen, stark gekoppelte Systeme auf schwach gekoppelte zurückzuführen, indem man eine Ungleichung von Kolmogoroff verwendet. Ein erster Bericht darüber ist erschienen als MRC Technical Summary Report # 1596, Math. Research Center, Madison (Wisconsin) USA und kann von dort bezogen werden.

Some new estimates for harmonic and parabolic measures

by Matts Essén, Stockholm

Let D be an open, connected subset of the unit disk $\{|z|<1\}$. Consider u which satisfies

$$\Delta u(z) - f(|z|)\,u = 0, \quad z \in D, \qquad u(z)=0,\ z\in\{|z|<1\}\setminus D.$$

$$u(z) = \begin{cases} 0 & z \in \partial D \cap \{|z|<1\}, \\ 1 & z \in \partial D \cap \{|z|=1\}. \end{cases}$$

Here f is an integrable, nonnegative function.

Let $a(r) = \begin{cases} \text{meas.}\{\Theta \in [-\pi,\pi] : re^{i\Theta} \in D\}, & \{|z|=r\} \cap \partial D \neq \emptyset \\ \infty, & \{|z|=r\} \cap \partial D = \emptyset. \end{cases}$

If $A(r) = \sup_{r \le t < 1} 2\pi / a(t)$, we have

Theorem: $\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\Theta})^2 \, d\Theta \right\}^{1/2} \le 2\sqrt{2\pi A(r)} \exp\left\{ -\int_r^1 \sqrt{f(t) + \frac{\pi^2}{(t a(t))^2}} \, dt \right\}$.

When $f=0$, this is a generalization of Beurling's estimate of harmonic measure (1933). In the proof, the following two results are used:

1) An estimate of harmonic measure due to A. Baernstein (cf. Acta Math. 133 (1974)).
2) A differential inequality due to Essén (cf. Springer Lecture Notes 467).

Remark 1: In $\mathbb{R}^d$, $d \ge 3$, there are related results. Here we need a result of C. Borell (cf. Springer 467).

Remark 2: The Baernstein technique works also for parabolic measures, according to recent results of C. Borell. This includes cases where Brownian motion methods do not work.

Some differential operator inequalities

W N Everitt (Dundee, Scotland)

If $T : D(X) \to X$ is a linear operator, bounded or unbounded, on a normed vector space then T is a Ljubič (1960) operator if for $n = 2, 3, 4, \ldots$ and $m = 1, 2, \ldots, n-1$ the powers T^n of T satisfy the operator inequalities

$$\|T^m f\| \le C_{n,m}(T) \|f\|^{(n-m)/n} \|T^n f\|^{m/n} \quad (f \in D(T^n))$$

where $0 \le C_{n,m}(T) < \infty$ for all m, n as above. This type of inequality is related to inequalities of Kallman-Rota

(1970), and Kato (1972), and Everitt (1971).

A Monotone Method for a Class of Nonlinear Boundary Value Problems

Jagdish Chandra

In this talk we will discuss use of monotone iteration scheme in the construction of solutions of a class of nonlinear boundary value problems. In earlier paper Chandra and Davis [Arch. Rat. Mech. Analy, 54, p. 257–266 (1974)] constructed maximal and minimal solutions of such steady-state problems as limits of monotone sequences with upper and lower solutions as the first terms of respective sequences. Here we show that these solutions are stable in the sense that they have evolved in time from a suitable time-dependent problem having these upper and lower solutions as initial states.

Über Maximum-Minimum Aussagen für hyperbolische Differentialgleichungen

M. Schneider (Berlin)

Entsprechend dem Fall im $\mathbb{R}^2$ (Agmon, Protter, Nirenberg) wird versucht, die Eindeutigkeit des Frankl-Morawetz Problems im $\mathbb{R}^3$ für die Gleichung (*) $u_{tt} + k(t)(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t)$, $k(t) \gtreqless 0$ entsprechend $t \gtreqless 0$, mit Hilfe von Maximum-Minimum Aussagen herzuleiten. Hierzu werden für das Cauchysche Anfangswertproblem und das charakteristische Anfangswertproblem der Gleichung (*) in $t < 0$ zwei Sätze angegeben und deren Beweise skizziert. Ein Satz lautet:

Satz

$L[u] := u_{tt} + k(t)(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t)$ in $t_0 < t < 0$ mit $k(t) < 0$ und $k(0) = 0$,

$k(t) \in C^1(t_0 \leq t \leq 0) \cap C^2(t_0 < t < 0)$, $f(x,y,t) \in C^0(\ldots)$.

$u \in C^1(x,y,\, t_0 \leq t \leq 0) \cap C^2(x,y,\, t_0 < t < 0)$ mit $u(x,y,t_0) = u_0 \in C^2$,

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x,y,t_0)} = u_1 \in C^0(\ldots)$ sei Lösung von $L[u] = f$ mit

$u_1(x,y,t_0) \leq 0$, $f(x,y,t) - k(t)(u_{0_{xx}} + u_{0_{yy}}) \leq 0$ für $t_0 \leq t < 0$,

$\frac{(k')^2}{(-k)^3}\left[1 + 4\left(\frac{k}{k'}\right)'\right]\left(\int_{\tau=t}^{T} (-k(\tau))^{\frac{1}{2}}\,d\tau\right)^2 \leq 4$ in $t_0 < t < 0$; dann gilt

$u(x,y,t) \leq u(x,y,t_0)$.

Operatorgleichungen und nichtlineare Randwertprobleme

In diesem Vortrag werden nichtlineare elliptische RWP der Form $Au = f(x,u)$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $Bu = g(x,u)$ auf $\Gamma := \partial\Omega$ behandelt. Dabei ist A ein gleichmäßig stark elliptischer Operator 2-ter Ordnung und B ein Randoperator 1. Ordnung. Es wird gezeigt, daß diese Probleme auf äquivalente Fixpunktgleichungen in $C(\bar{\Omega})$ zurückgeführt werden können, wobei der nichtlineare Operator in $C(\bar{\Omega})$ stetig ist. Diese Tatsache kann dann benutzt werden um Existenz- und Multiplizitätsaussagen zu gewinnen.

H. Amann

Über Korrektheit und Konvergenz der Diskretisierung nichtlinearer elliptischer oder parabolischer Randwertaufgaben

Auf beschränkten Grundgebieten des $\mathbb{R}^2$ werden schwach gekoppelte, quasimonotone Systeme bestehend aus M nichtlinearen parabolischen oder elliptischen DGL jeweils zweiter Ordnung mit Lipschitzbedingung und geeigneten Randbedingungen betrachtet. Es mögen eine klassische Lösung u existieren und eine Testfunktion für eine zugeordnete lineare Aufgabe bekannt sein. Auf einer Gitterfolge mit charakteristischer Schrittweite h wird eine konsistente Diskretisierung nach dem gewöhnlichen Differenzenverfahren betrachtet. Unter Verwendung der diskretisierten Testfunktion wird gezeigt, daß die Diskretisierung der Randwertaufgabe korrekt ist, d.h. für jedes $h \in (0, h_0]$ existiert genau eine beschränkte Lösung u^h mit in h gleichgradig stetiger Datenabhängigkeit. Daraus ergibt sich die Konvergenz von (u^h) gegen u. Ebenso wird die Konvergenz der mit u^h gebildeten finiten Ausdrücke gegen die entsprechende Ableitung von u behandelt. Statt der Testfunktion kann auch eine Schrankenbedingung verwendet werden.

E. Adams (Karlsruhe)

<u>Applications of Operator Inequalities to Some Nonlinear Problems in Transport Phenomena</u>

Algorithms providing convergent upper and lower bounds are constructed for certain classes of nonlinear ordinary and partial differential equations from fluid mechanics, diffusion and associated eigenvalue problems. Developments are based upon the construction of antitone operators which are oscillatory contraction mappings. Applications are made to non-Newtonian boundary layers, diffusion and birth and death processes. "Exact" shooting and the construction of invariant solutions occurs in the process.

W. F. Ames (Atlanta, Georgia)

<u>Lipschitz continuous dependence of eigenvector spaces of a positive compact operator on the operator</u>

An estimate is proved, which shows that the projector on a space spanned by a finite set of eigenvectors of a positive compact operator is a Lipschitz continuous function of the operator. Applications are offered to the estimation of the approximate eigenvectors by the Rayleigh-Ritz method. As an application the following operator

$$Tu = \int_0^1 K(x,y)\, u(y)\, dy$$

in the $L^2(0,1)$ space is considered, where

$$K(x,y) \begin{cases} = 2 \log \dfrac{x(1-y)}{x-y} & 0 \leq y < x \leq 1, \\ = 2 \log \dfrac{y(1-x)}{y-x} & 0 \leq x < y \leq 1. \end{cases}$$

The problem of computing the largest eigenvalue μ_1 of T was proposed by Ostrowski. In a joint paper with M. A. Muller (Rend. Matem. 1975) the following estimates for μ_1 have been proved

$$1.20\,24\,31\,52\,57\,11 < \mu_1 < 1.20\,24\,31\,52\,57\,33$$

As an application of the above recalled results the following estimate is proved

$$\int_0^1 [v(x) - w(x)]^2\, dx < 305 \times 10^{-12}$$

where $v(x)$ is a polynomial of degree 17 which approximates the eigenfunctions of T correspond-ing to μ_1 and $w(x)$ is such an eigenfunction.

Gaetano Fichera (Roma)

Einige Anwendungen der Inversmonotonie.

Gegeben sei ein Gleichungssystem der Form $Ax = Fx$ mit $A \in L[\mathbb{R}^n]$ und einem stetigen Feld F des $\mathbb{R}^n$ in sich. Es seien $Q, H, R \in L[\mathbb{R}^n]$, und die Felder $F-Q$, $H-R$ sowie $H+Q-2R$ seien monoton. Unter der Voraussetzung der Inversmonotonie von $A-R$ und $A-H$

wurde die iterative Lösbarkeit von $Ax = Fx$ und die Existenz einer Stabilitätsungleichung für $A-F$ gezeigt. Anschließend sind Anwendungen auf diskrete Analoga zu Zwei-Punkt-Randwertaufgaben bei nichtlinearen Differentialgleichungen 2. Ordnung diskutiert. Hierbei wurden hauptsächlich Differenzenschemen höherer Ordnung behandelt, für welche insbesondere die Stabilität und die Konvergenz folgen.

Erich Bohl (Münster).

Über nichtlineare Diffusionsgleichungen

Es seien D ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^N$, $f(s)$ eine positive, reell analytische Funktion mit $f'>0$ und $f''\geq 0$ und c eine beliebige reelle Zahl. Mit $u(x,t)$ $[x=(x_1,\dots,x_N)]$ werde die Lösung des Problems

$$\Delta u - cu + f(u) = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ in } D\times(0,T), \quad u=0 \text{ auf } \partial D\times(0,T),$$

$$u(x,0)=0$$

bezeichnet. Es wird bewiesen, dass von allen Gebieten D mit gegebenem Volumen die Kugel am instabilsten ist; d.h. falls im Zeitintervall $[0,T]$ die Lösung $u^*(x,t)$ für die Kugel existiert, dann existiert auch $u(x,t)$ für $0\leq t\leq T$ und es gilt dort $u(x,t)\leq \max\limits_{x\in \text{Kugel}} u^*(x,t)$. Ferner werden

Integralabschätzungen für u und u^* angegeben.

Catherine Bandle (Basel)

Fixed point theorems for Lyapunov-monotone operators in a Banach Space.

Introducing the notion of Lyapunov monotone operators in terms of several Lyapunov functions and employing some recent results of the author concerning nonlinear contractions and comparison theorems in abstract cones, the fixed points of such operators are discussed. The technique is through the theory of differential equations in a Banach space and using the semigroup properties of solution operators. The results presented are very general that they not only include some known results as very special cases but also expose new results.

V. Lakshmikantham
(University of Texas at Arlington)
U.S.A

Abstract Comparison Principle and applications.

The Comparison principle which has been proved to be a very useful technique for studying the qualitative behavior as well as existence and uniqueness of solutions of ordinary differential equations is further extended to take care of similar study for differential equations in abstract spaces. The Generalization is not trivial as the development of the abstract comparison principle includes the use of (a) the notion of quasi-monotonicity via linear functionals (b) existence results of solutions of abstract differential equations and (c) the introduction of a K-Banach space. The applications of this general comparison principle

Could be many because of the flexibility of choosing convenient norms in suitable cones in appropriate abstract spaces. However, a uniqueness result for a differential equation in K-Banach space and an existence result for differential equations with retarded argument ~~were~~ are discussed.

S. Leela
(SUNY, Geneseo, N.Y. U.S.A)

Rayleigh-Ritz-Galerkin Approximation

Consider a nonlinear eigenvalue problem of the form $Au + N(u) = \lambda u$ on a dense domain $D_A \cap D_N$ of a Hilbert space $\mathfrak{H}$. Suppose that N is "reproducing" relative to the eigenfunctions $\{u_i\}$ of a second self-adjoint operator A^0, $A^0 u_i = \lambda_i u_i$; that is, $N(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{m(n)} \beta_i(\vec{\alpha}^n) u_i$, where the β_i's are known functions. Then our Rayleigh-Ritz-Galerkin (R-R-G) Approximation is $P^k A P^k u + P^k N(P^k u) = \lambda P^k u$ and leads to the algebraic nonlinear system $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (Au_i, u_j) + \beta_j(\vec{\alpha}^k) = \lambda \alpha_j$, $j = 1, \dots, k$. Further, suppose $A+N$ is maximal cyclically monotone and Lusternik-Schnirelmann critical values of the original problem exist. The critical values of the R-R-G problems provide upper bounds to those critical values, as can be seen by applying results of algebraic topology. Lower bounds to Lusternik-Schnirelmann critical values are obtained for operators of the form $A^0 u + B^*(Bu)^{2k+1}$.

Norman Bazley (Köln)

Inversmonotonie und Stabilität bei Diskretisierungen, die nicht auf M-Matrizen führen.

Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ wird eine hinreichende Bedingung für Inversmonotonie hergeleitet, welche positive Außerdiagonalelemente bei A zulässt. Damit wird gezeigt, daß bei vielen Diskretisierungen die Inversmonotonie der kontinuierlichen Aufgabe die der diskreten nach sich zieht. Weiter ergibt sich, daß an den Diskretisierungsmatrizen A_h (h: die Schrittweite) quantifizierbare Störungen angebracht werden dürfen, ohne Inversmonotonie zu verlieren. Das ermöglicht eine Anwendung auf nichtlineare Aufgaben sowie eine detaillierte Diskussion der Konvergenzordnung bei $h \to 0$.

Jens Lorenz (Münster)

Ein Einschliessungssatz für nichtlineare elliptische und parabolische Randwertprobleme.

Betrachtet wird ein nichtlineares elliptisches Randwertproblem der Form

$$\begin{cases} -\Delta u + p(\cdot, u, \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wo Ω ein (möglicherweise unbeschränktes) glatt berandetes Gebiet des $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) bezeichnet. Der Begriff der schwachen Unter- resp. Oberlösung (φ resp. Φ) wird eingeführt. Falls $\varphi \leq \Phi$ in Ω, wird unter gewissen Wachstumsbedingungen an p die Existenz einer schwachen Lösung u mit $\varphi \leq u \leq \Phi$ gezeigt. Der Beweis beruht auf einer Abschneidemethode sowie auf einem neuen Existenzsatz für koerzitive nichtlineare elliptische Randwertprobleme in unbeschränkten Gebieten. Dieselbe Beweismethode lässt sich übertragen auf parabolische Randwertprobleme sowie elliptische und parabolische Variationsungleichungen.

Peter Hess (Univ. Zürich)

Verschiedene Verfahren und Ergebnisse bei Einschließungsaussagen. Der Vortrag gibt eine Übersicht über bestimmte Methoden zur Gewinnung von Einschließungsaussagen für Lösungen einer (linearen oder nichtlinearen) Gleichung $Mu = r$. Insbesondere wird die Frage behandelt, unter welchen Bedingungen für gegebene Mengen K und C die folgende Aussage richtig ist: $Mu \in C \Rightarrow u \in K$ (d.h. M ist (C,K)-invers). Für Kegel K und C bedeutet dies die Inverspositivität von M. Ein anderer Spezialfall, welcher z.B. für die Anwendung auf Differentialoperatoren höherer Ordnung (>2) nützlich ist, wird beschrieben durch: $\Phi \le Mu \le \Psi \Rightarrow \varphi \le u \le \psi$. – Die Ergebnisse sind bei der Entwicklung von Programmen für die numerische Fehlerabschätzung bei Differentialgleichungen benutzt worden. Johann Schröder (Köln)

Upper and Lower Solutions and their generalization to systems of second order ordinary differential equations

We consider a second order vector differential eq.

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x = (x^1, \dots, x^n), \quad \dot{} = \frac{d}{dt}$$

and boundary conditions of the periodic type or of the two-point-type ($x(0) = a$, $x(1) = b$). Given a region Ω in (t,x)-space, two conditions are stated which are sufficient in order that there exists a solution $x(t)$ of the problem satisfying $(t, x(t)) \in \Omega$ for all t. The first condition is of analytic nature and can locally be expressed in terms of an inequality

$$\ddot{\phi}(t,x,\dot{x}) \ge 0 \quad \text{if} \quad \phi(t,x) = 0 \text{ and } \dot{\phi}(t,x,\dot{x}) = 0,$$

if $\partial\Omega$ is defined by the equation $\phi(t,x) = 0$.

In case of the dimension $n=1$ this condition reduces to the inequality defining upper and lower solutions. The second condition is of geometric nature and implies among other things the convexity of the cross sections $\Omega_t = \{x \mid (t,x)\in\Omega\}$.

H. W. Knobloch, Würzburg.

Monotone Art elliptischer Randwertaufgaben bei Gebietszerlegungen

Ausgehend von einer Zerlegung $\mathfrak{Z}^B$ eines Gebietes $B\subset\mathbb{R}^n$ in disjunkte Teilgebiete $B_i\subset B, i\in I$, wird zunächst für „bzgl. $\mathfrak{Z}^B$ schwach L-subharmonische" Funktionen ein starkes Maximumprinzip und ein Hopfsches Lemma bewiesen. Dabei ist L ein gleichmäßig elliptischer, fastlinearer Differentialoperator und eine bzgl. $\mathfrak{Z}^B$ schwach L-subharmonische Funktion ein $u\in C^1(\bar{B})\cap C^2(\cup B_i)$ mit

$$\text{(i)}\ L[u](x)\le 0 \quad \forall x\in \cup B_i \qquad \text{(ii)}\ S_{\nu(x)}[u](x)\le 0 \quad \forall x\in B-\cup B_i,$$

$$S_z[u](x) = \lim_{t\to+0} \frac{u(x)-u(x-tz)}{t} + \lim_{t\to+0}\frac{u(x)-u(x+tz)}{t}.$$

Für gewisse Randoperatoren R folgt dann die Monotone Art von (L,R,S) auf $C^1(\bar{B})\cap C^2(\cup B_i)$, die die Einschließung von Lösungen einer elliptischen Randwertaufgabe durch stetige Funktionen mit Unstetigkeiten in den Ableitungen erlaubt.

B. Werner (Hamburg)

Parabolic differential equations with a singular non linear term – the phenomenon of quenching.

A simple example of the kind of problems considered here is the following.

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u} \quad \text{in } [0,\infty)\times(0,l), \quad u(t,0)=u(t,l)=u(0,x)=0.$$

For small values of $l>0$ the solution exists for all $t>0$; for large values of l there is a $T<\infty$ such that

$\|u\|_0\to 1$ and $\|u_t\|_0\to\infty$ as $t\to T-0$, where $\|u\|_0=\max_{0\le x\le l}|u(t,x)|$.

If the second possibility prevails, the sol. is said to be "quenching". Quenching is a phenomenon related to "blow-up" of solutions. Here, the sol. remains finite, but a derivative blows up. Naturally, this is due to the fact that the nonlinear term $1/(1-u)$ has a singularity for $u=1$.

Using the method of subfunctions and superfunctions, upper and lower bounds for the number l are obtained, such that we have global existence or quenching. In particular, for $l \leq l_0 = 1{,}53$, we have global ex., for $l > l_1 = \pi/2 = 1.57$ we have quenching. — The method applies to much more general nonlinear differential equations in several space variables.

30.10.75 W. Walter (Karlsruhe).

Über Verfahren zur numerischen Bestimmung konvergenter Schrankenfolgen für Systeme gewöhnlicher Anfangswertprobleme

Für ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen werden Folgen von Schranken unter Verwendung des äquivalenten Systems Volterrascher Integralgleichungen konstruiert. Zwischen benachbarten Gitterpunkten im Abstand h werden diese Schranken durch die bei der Quadratur benutzte Spline-Funktion und einen den Quadraturfehler abschätzenden Zusatzterm dargestellt. Gerechnete Beispiele bestätigen die theoretisch erhaltene Abhängigkeit des Schrankenabstandes von der Schrittweite h und der Ordnung der Quadraturformel.

30.10.1975 G. Scheu (Karlsruhe)

Singuläre Störungen hyperbolischen Typs

Wir betrachten folgendes singulären Störungsproblem:

$$\varepsilon L_2[u_\varepsilon(x,t)] + L_1[u_\varepsilon(x,t)] = f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t$$

mit Anfangsbedingungen:

$$u_\varepsilon(x,0) = F(x), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = G(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

L_1 ist der Differentialoperator $a(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial t}$ und

L_2 der Wellenoperator $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Unter den Bedingungen:

1. $0 < c(x,t) < c_0$, $b(x,t) > 0$, $\forall x$, $\forall t \geq 0$
2. $\frac{|a(x,t)|}{b(x,t)} < c(x,t)$, $\forall x$, $\forall t \geq 0$, d.h. Subkarakteristiken sind "Zeitartig".
3. $a, b \in C^2[-\infty < x < +\infty, t \geq 0]$; $c \in C^1[-\infty < x < +\infty, t \geq 0]$
4. $f \in C^2[-\infty < x < +\infty, t \geq 0]$
5. $F \in C^3[-\infty < x < +\infty]$, $G \in C^2[-\infty < x < +\infty]$

wird gezeigt, daß

$$u_\varepsilon(x,t) = w(x,t) + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

gleichmäßig in jedem begrenzten Gebiet mit $t \geq 0$,

wo w ist die Lösung des sogenannten reduzierten Problems:

$$L_1[w] = f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t$$

$$w(x,0) = F(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

E. M. de Jager
(Amsterdam, zeitlich Köln)

Numerische Durchführung von Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Es wird ein Verfahren zur Fehlerabschätzung von Näherungslösungen für Anfangswertaufgaben bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgestellt und auf praktische Probleme angewendet.

Das Verfahren ist eine Verallgemeinerung eines von J. Schröder für eine skalare Differentialgleichung entwickelten Verfahrens auf Systeme.

Es beruht auf der Abschätzung einer Lösung eines Systems nichtlinearer Differentialungleichungen, dessen rechte Seite immer quasimonoton ist, auch wenn das betrachtete Differentialgleichungssystem diese Eigenschaft nicht besitzt.

Die numerischen Ergebnisse beziehen sich u.a. auf drei Differentialgleichungsaufgaben, die physikalische Vorgänge beschreiben:

1. Kette radioaktiven Zerfalls
2. Kepler-Ellipse
3. Reentry-Problem (Wiedereintritt eines Raumfahrzeugs in die Lufthülle der Erde).

Bei dem kritischen Beispiel 3. läßt sich eine Einschließung des Fehlers durch vorzeichengleiche untere und obere Schranken erreichen, die so eng ist, daß hierdurch die Genauigkeit der Näherungslösung auch am Ende des Integrationsintervalles noch um eine Dezimalstelle zu verbessern ist.

M. Marcowitz (Köln)

Einschließungsaussagen und Fehlerabschätzungen bei Differentialoperatoren

Es wird ein Verfahren beschrieben, daß Fehlerabschätzungen insbesondere bei nicht invers positiven Differentialoperatoren ergibt. Dazu wird das Konzept der Ober- und Unterfunktion auf nicht notwendig differenzierbare Funktionen erweitert. Zusätzliche Bedingungen an den Sprungstellen dieser Funktionen sichern ~~die~~ eine Einschließungsaussage, die dann zu Fehlerabschätzungen verwendet werden kann. Das Verfahren ist anwendbar bei gewöhnlichen und partiellen Differentialoperatoren zweiter und höherer Ordnung, bei nichthomogenen Problemen und Eigenwertaufgaben sowie nichtlinearen Differentialgleichungen.

Tassilo Küpper (Köln)

Konvergente numerische Schranken für schwach nichtlineare elliptische Randwertaufgaben vom monotonen Art

Es wird betrachtet $-\Delta u + f(x,u) = 0$ im n-dimensionalen Einheitswürfel mit der Randbedingung $u=0$ und Voraussetzungen an f. Ausgehend vom gewöhnlichen Differenzenverfahren mit der Schrittweite h werden unter Verwendung kubischer Splines und Abschätzung des Defektes Schranken für die Funktionswerte aufgestellt, die in der $C^{2+\alpha}$-Norm wie $O(h^2)$ konvergieren. Nebenbei erhält man einen elementaren Existenzbeweis für eine klassische Lösung.

H. Grewe, Karlsruhe

Konvergenz und Fehlerabschätzungen bei projektiven Newton-verfahren für nichtlineare Randwertaufgaben

Näherungslösungen für eine nichtlineare Randwertaufgabe werden folgendermaßen gesucht: Auf den nichtlinearen Operator wird das Newtonverfahren angewendet, und die linearen Gleichungen werden mit Projektionsverfahren näherungsweise gelöst. Unter Voraussetzungen an den Operator, die denen für das klassische Newtonverfahren entsprechen, und an die Projektionen erhält man Konvergenzaussagen. In vielen Fällen bestimmen die Projektionen die Konvergenzgeschwindigkeit. Ausgehend von solchen Näherungslösungen kann man in vielen Fällen Ober- und Unterfunktionen bestimmen. Hieraus ergeben sich bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung Existenz- und Einschließungsaussagen. Diese liefern bei Beispielen aus der Wärmeleitungstheorie enge Schranken für die Lösung

K. Witsch (Köln)

Some inequalities for the spectral radius of certain operator-valued functions.

Let Y be a Banach space with a closed normal generating cone $K \neq \{0\}$. A bounded linear operator T on Y is said to have property (S) if $\lambda \in \sigma(T)$ ($\sigma(T)$ - spectrum of T), $|\lambda| = r(T)$ ($r(T)$ - spectral radius of T), implies that λ is a pole of the resolvent operator.

Theorem 1. Let T have property (S) and let T be irreducible. Then (i) $r(T) \in \sigma(T)$; (ii) There is an eigenvector $x_0 \in K$, x_0 - quasiinterior. (iii) If $Ty = ry$, $y \in K$, then $y = cx_0$ for some constant c. (iv) $r(T)$ is a simple pole of the resolvent operator. (v) $\frac{1}{N}\sum^{N}[r(T)]^{-k}T^{k} \to P = P^2$, P is irreducible and $\dim PY = 1$.

Theorem 2. Let Y be a Hilbert space, T a self-adjoint operator on Y, $T = L + L^*$, $LK \subset K$, $L^*K \subset K$, L^* adjoint of L, T irreducible. Then $\chi(\alpha) = r(T(\alpha))$ is either constant or increases for $\alpha \in (0, +\infty)$, where $T(\alpha) = e^{\alpha}L + e^{-\alpha}L^*$.

Applications. Classification of iterative processes. In particular, a proof of quasioptimality of the standard optimal relaxation factor for over-relaxation with non-consistently ordered matrices is given.

Ivo Marek (Prague)

Inverspositivität und verwandte Eigenschaften bei linearen gewöhnlichen Differentialoperatoren höherer Ordnung. Es wird ein Überblick über verschiedene Methoden gegeben, um einen gegebenen gewöhnlichen Differentialoperator höherer Ordnung nachzuweisen, daß L inverspositiv ist. Solche Methoden sind: 1) Monotoniesatz (Schröder), 2) Theorie der reproduzierenden Kerne (Aronszajn-Smith), 3) Theorie der totalpositiven Kerne (Karlin, Krein), 4) spezielle Darstellungen Greenscher Funktionen.

Ein spezielles Ergebnis für Operatoren 4. Ordnung wird genauer ausgeführt und zu den angesprochenen Methoden in Beziehung gesetzt. Hierbei wird auf die besondere Bedeutung „ungelöster" Aufspaltungen von Differentialoperatoren hingewiesen.

Ulrich Trottenberg, Köln

Ode to Hans and Norm

There once were two men from Cologne
Whose work is exceedingly well known,
Their conference organization was profound,
All Lecturers certainly did astound.
I close with many thanks and heavy heart,
Considering that soon we depart.
We shall here again be found,
but then it will be with a better bound!

A.J. Amer, 10-31-75

„Zahlentheorie"
2. – 8. 11. 1975.

A Problem of Hardy and Ramanujan

The author gives necessary and sufficient conditions in order that an ~~arithme~~ additive arithmetic should possess a non-decreasing normal order.

Let $f(n)$ be an additive function with a normal order (under the above terms) $g(n)$. Define the function $g(x)$ by linear interpolation. The conditions to be satisfied are

(i) $\exists$ a decomposition $g(x) = u(x) + v(x)$ where, for each fixed $y > 0$, $u(x^y) = y\,u(x) + o(g(x))$, $v(x^y) = v(x) + o(g(x))$

(ii) For each $\varepsilon > 0$ the function $h(p,x) = f(p) - u(x)\left(\frac{\log p}{\log x}\right)$ satisfies

$$\sum_{\substack{p \le x \\ |h(p,x)| > \varepsilon g(x)}} \frac{1}{p} \longrightarrow 0, \qquad \sum_{\substack{p \le x \\ |h(p,x)| \le \varepsilon g(x)}} \frac{h^2(p,x)}{p} \longrightarrow 0$$

(iii)

$$g(x) = \sum_{\substack{p \le x \\ |h(p,x)| \le g(x)}} \frac{h(p,x)}{p} + o(g(x)).$$

All of these conditions are to hold as $x \longrightarrow \infty$.

P. D. T. A. Elliott (Boulder)

Über neuere Abschätzungen einer zahlentheoretischen Funktion von Jacobsthal.

Die zahlentheoretische Funktion $g(n)$ von E. Jacobsthal kann definiert werden als Maximalabstand zweier aufeinanderfolgender zu n teilerfremder natürlicher Zahlen.

Sei (1) $n = p_1 \cdots p_k$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ Primzahlen.

Sei (2) $m \in \mathbb{N}$, $m \geqq 2$; $e^{\frac{1}{m}-1} < \alpha$ (reell), $k^\alpha < p_1$.

Satz 1. Für alle hinreichend grossen k ist $g(n) \leq mk$.

Satz 2. Sei noch $k \gtreqqless e^6$, $k^\alpha \geq 67$, $\alpha \leq \frac{3}{4}$; $(1 - \frac{1}{m} + \log\alpha)\log k \geqq \log 2m + \frac{1}{2\alpha} - \frac{0{,}7}{1 + \frac{\log 2m}{\log k}}$.
Dann folgt $g(n) \leqq mk$.

<u>Satz 3.</u> Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: Aus $k^{\frac{\log 3}{\log 5}} < p_1 < \dots < p_k$ folgt $g(n) \leqq 2k$.
Dieser Satz ist in gewissem Sinn „scharf" wegen $g(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot p_4 \cdot p_5) = 11$.

H.-J. Kanold (Braunschweig)

Yet another characterization of Pisot-Vijayaraghavan numbers

Let $\theta > 1$ be a real number and let $q > \theta$ be a rational integer. Define

$$\mu_\theta(n) = (q-\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{n}{q^k} \right\} \theta^k$$

where $\{x\}$ is the fractional part of x.

<u>Theorem</u>: The following conditions are equivalent:

(i) θ is not a PV-number

(ii) The sequence μ_θ is equidistributed (mod 1)

(iii) $\exists\, \alpha \geq 1$ (resp $\exists\, \alpha > 1$) for which the sequence $(\mu_\theta([\alpha n]))$ is equidistributed (mod 1)

(iv) $\forall\, \alpha \geq 1$ (resp $\forall\, \alpha > 1$)

The proof involves the notion of statistical independance.

Michel Mendes France (Bordeaux, France)

Verteilungsunregelmäßigkeiten im Einheitswürfel

Gegeben seien N Punkte im k-dimensionalen Einheitswürfel U, bestehend aus $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_k)$ mit $0 \leqq x_i < 1$ $(i = 1, \dots, k)$. Für $\mathfrak{y} = (y_1, \dots, y_k)$ in U sei $Z(\mathfrak{y})$ die Anzahl der gegebenen Punkte, die im Quader $0 \leqq x_i < y_i$ $(i = 1, \dots, k)$ liegen, und es sei $D(\mathfrak{y}) = Z(\mathfrak{y}) - N y_1 \cdots y_k$. Die Unregelmäßigkeit der Verteilung der Punkte wird durch die „Größe" der „Diskrepanzfunktion" $D(\mathfrak{y})$ beschrieben. Dazu bilden wir die L^p-Norm

$$\| D \|_p = \left(\int_U |D(\mathfrak{y})|^p \, d\mathfrak{y} \right)^{1/p}.$$

Nach K. F. Roth ist $\| D \|_2 \geqq c_1(k) (\log N)^{(k-1)/2}$. Nun zeigen wir allgemeiner

$$\| D \|_p \geqq c_2(k,p) (\log N)^{(k-1)/2}$$

für reelles $p > 1$.

Wolfgang M. Schmidt (Univ. of Colorado, dzt Univ. Wien)

Mertens Vermutung und Kronecker Approximation

Es wird gezeigt, daß $\limsup M(x)/\sqrt{x} \geqq 0{,}778$ ist $(M(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n))$.

Der Beweis erfordert Kronecker Approximationen $\| \xi_\nu k - \eta_\nu \| < \varepsilon$ für ein festes $\varepsilon > 0$ und Zahlen ξ_ν, η_ν, die im wesentlichen aus den Nullstellen der ζ-Funktion gebildet sind; $\nu = 1, 2, \ldots N$. Es wird ein Weg angegeben, solche Approximationen zu konstruieren. Die Einzelheiten werden im Crelle Journal erscheinen (gemeinsam mit Jurkat)

Peyerimhoff (Ulm)

On perfect powers ~~of~~ whose digits are identical

It is an old problem whether a number $\underbrace{a \ldots a}_{n \text{ times}}$ can be a perfect power. This leads to the diophantine equation (1) $a \frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$ in integers $a \geqslant 1$, a fixed, $n > 2$, $q > 1$, $x > 1$, $y > 1$.
The following results are joint work with T. N. Shorey.

Thm 1 Equation (1) has only finitely many solutions if at least one of the following conditions holds
(i) x fixed (ii) n has a fixed divisor > 2 (iii) n even and q fixed
(iv) n even and $a = 1$ (v) n even and $x+1$ is $[\frac{q}{2}]$-free (vi) n odd and y has fixed divisor > 1.

Other results are due to Nagell (1925), Ljunggren (1943) and Inkéri, who gave all solutions for $a=1, 4|n$; $a=1, 3|n$; $a=1, 2|q$; $2 \leq a < x \leq 10$.

Thm 2 The equation $\frac{10^n - 1}{10 - 1} = y^q$ has no solutions in integers $n > 1$, $2 \leq q < 23$, $y > 1$.

Obláth proved in 1956 that $a \frac{10^n - 1}{10 - 1} = y^q$ has no solutions for $2 \leq a < 10$, $n > 2$, $q > 1$, $y > 1$ and for $a = 1, n = 2$; $a = 1, n = 3$; $a = 1$, $2 \leq q \leq 5$.

R. Tijdeman
(Leiden)

Verallgemeinerter Algorithmus von Kakutani

~~Gegeben: Ausgabe~~

1. Der ursprüngliche Algorithmus

Gegeben: ungerades $x_0 > 0$.

Rekursion: $3x_\nu + 1 = 2^{\alpha_{\nu+1}} x_{\nu+1}$ ($\nu \geq 0$; $x_\nu, x_{\nu+1}$ ungerade > 0)

Vermutung: Die Folge x_ν wird stets schliesslich periodisch, und zwar mit der 1-gliedrigen Periode $x_\nu = 1$.

Aviezri Fraenkel bestätigte Richtigkeit für $x_0 < 2^{50}$.

Thompson bewies, dass nur endlich viele Perioden auftreten können.

2. Verallgemeinerung auf ungerades $x_0 < 0$

und dann ungerade $x_\nu < 0$. Dies läuft offenbar hinaus auf

Rekursion $3x_\nu - 1 = 2^{\alpha_{\nu+1}} x_{\nu+1}$ ($\nu \geq 0$; $x_\nu, x_{\nu+1}$ ungerade > 0).

Hier treten im Bereich $x_0 < 200$ bereits drei Perioden auf:

(1), (5, 7), (17, 25, 37, 55, 41, 61, 91).

Zu vermuten ist, dass die Folge x_ν stets mit einer dieser drei Perioden ausläuft, wie ich das für $x_0 < 200$ fand.

Im folgenden wird diese Rekursion als die primäre zugrundegelegt, während die ursprüngliche durch Übergang zu ungeraden $x_0 < 0$ gekennzeichnet ist. So bezeichnet sind die beiden Rekursionen gleichbedeutend mit der dyadischen Entwicklung

$$x_0 = \frac{2^{\sigma_0}}{3} + \frac{2^{\sigma_1}}{3^2} + \cdots = \sum_{\nu \geq 0} \frac{2^{\sigma_\nu}}{3^{\nu+1}}$$

in der dyadischen Vervollständigung Γ_2 des Rings Γ der ganzrationalen Zahlen, wobei die Exponenten als die Partialsummen

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu \quad \text{mit } \sigma_0 = 0$$

gegeben sind. Die Periodizität ist dann gleichbedeutend damit, dass diese dyadische Entwicklung in eine geometrische Reihe ausläuft. Durch deren Summation bedeutet das weiter die Darstellbarkeit der Ausgangszahl x_0 in

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

der Form
$$x_0 = \frac{B_k(3^l - 2^t) + C_l\, 2^s}{3^k(3^l - 2^t)}$$
mit
$$B_k = 3^{k-1}\cdot 2^{\sigma_0} + \dots + 3^0\cdot 2^{\sigma_{k-1}}, \quad C_l = 3^{l-1}\cdot 2^{\tau_0} + \dots + 3^0 \cdot 2^{\tau_{l-1}};$$
Dabei sind k und l die Längen von Vorperiode bzw. Periode, und s, t sowie die τ_ν aus der ursprünglichen Exponentenfolge wie folgt gebildet:
$$\sigma_k = s, \quad \sigma_{k+\nu} = s + \tau_\nu \; (\nu = 0, \dots, l-1), \quad \sigma_{k+l} = s + t,$$
so dass jedenfalls
$$0 \leq k \leq s, \qquad 0 \leq l \leq t.$$

Im Falle der gewöhnlichen dyadischen Entwicklung, wo die Nenner $3^{\nu+1}$ sämtlich durch $1^{\nu+1}$ ersetzt sind, gelang mir durch Nachweis einer solchen Darstellung bereits 1920 (im Henselschen Seminar) der Beweis für die Periodizität der dyadischen Entwicklungen der rationalen Zahlen, ebenso wie auch für jede andere Primzahl p. *) In dem hier vorliegenden Falle erscheint ein solcher Nachweis jedoch sehr viel schwieriger.

3. Weitergehende Verallgemeinerung.

Ersetzung des Multiplikators 3 durch eine beliebige natürliche Zahl m und des Divisors 2 durch eine zu m teilerfremde natürliche Zahl d, mit der wie folgt verallgemeinerten Rekursion:
$$m x_\nu - r_\nu = d^{\alpha_{\nu+1}} x_{\nu+1} \quad \text{mit} \quad x_\nu, x_{\nu+1} \not\equiv 0 \bmod d,$$
wo die Reste $r_\nu \not\equiv 0 \bmod d$ aus einem vorgegebenen Restsystem R zu entnehmen sind, etwa

$1, \dots, d-1$ (kleinstes positives Restsystem),

$-1, \dots, -(d-1)$ (kleinstes negatives Restsystem),

oder für ungerades d

$-\frac{d-1}{2}, \dots, -1, 1, \dots, \frac{d-1}{2}$ (absolut kleinstes Restsystem). Die Rekursion bedeutet dann die d-adische Entwicklung
$$x_0 = \sum_{\nu \geq 0} \frac{r_\nu d^{\sigma_\nu}}{m^{\nu+1}}.$$

Für diese viel allgemeinere Rekursion ist durchgängige Periodizität nicht immer zu erwarten. Das zeigt die folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtung.

*) Siehe meine „Zahlentheorie", 3. Aufl., S. 139–141.

Zahlentheoretisch ist die <u>Wahrscheinlichkeit</u> $w(\alpha)$ dafür, dass im $(\nu+1)$-ten Schritt der Exponent von d genau $\alpha_{\nu+1} = \alpha$ wird:

$$w(\alpha) = \frac{1}{d^{\alpha-1}} - \frac{1}{d^{\alpha}} = \frac{d-1}{d^{\alpha}}.$$

Für einen gegebenen Exponenten $\alpha_{\nu+1} = \alpha$ ist bei den obigen kleinsten Restsystemen der <u>Vergrösserungsfaktor</u>

$$v(\alpha) = v(\alpha_{\nu+1}) = \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = \frac{m x_\nu - r_\nu}{d^{\alpha_{\nu+1}} x_\nu} = \frac{m}{d^{\alpha}} - \frac{r_\nu}{d^{\alpha_{\nu+1}} x_\nu}.$$

Vernachlässigt man hierin das Restglied

$$\left| \frac{r_\nu}{d^{\alpha_{\nu+1}} x_\nu} \right| < 1,$$

so hat der Vergrösserungsfaktor

$$v(\alpha) \sim \frac{m}{d^{\alpha}}$$

ungefähr den <u>Erwartungswert</u>

$$e = \sum_{\alpha \geq 1} w(\alpha)\, v(\alpha) \sim (d-1) m \sum_{\alpha \geq 1} \frac{1}{d^{2\alpha}} = \frac{m}{d+1}.$$

Hiernach erscheint für durchgängige Periodizität jedenfalls notwendig:

$$e \leqq 1, \qquad \text{d. h.} \qquad m \leq d+1.$$

Für $m < d$ sieht man nun ganz leicht, dass die Folge x_ν beschränkt ist, also sicher stets Periodizität eintritt.

Bleiben also als wesentlich interessant, weil für durchgängige Periodizität noch gerade ausreichend, die Fälle

$$m = d+1,$$

von denen der erste $m = 3$, $d = 2$ mit kleinstem negativen Restsystem der Fall des ursprünglichen Algorithmus von Kakutani ist.

Anstelle der obigen Reduktion für den ursprünglichen Fall auf ein Darstellungsproblem für die Ausgangszahl x_0 tritt hier etwas allgemeiner:

$$x_0 = \frac{B_k (m^l - d^t) + C_l d^s}{m^k (m^l - d^t)} \qquad \text{mit} \qquad m = d+1$$

und

$$B_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} r_\nu d^{\sigma_\nu} m^{k-(\nu+1)}, \qquad C_l = \sum_{\nu=0}^{l-1} r_{k+\nu} d^{\tau_\nu} m^{l-(\nu+1)}.$$

Speziell ist <u>reine Periodizität</u> $(k=0,\ s=0)$ gleichbedeutend mit

$$x_0 = \frac{C_l}{m^l - d^t}$$

und <u>Periodizität mit 1-gliedriger Periode</u> $(l=1,\ t=\tau_1 = \sigma_{k+1} - \sigma_k)$ gleichbedeutend mit

$$x_0 = \frac{B_k (m - r_k d^s)}{m^k (m - d^t)}.$$

4. Numerische Ergebnisse

a) Schreibtisch-Kalkulator:

$(d+1, d) = (3,2), (4,3), \ldots, (11,10)$, kleinstes Restsysteme R
für $x_0 \leq 100$ durchgängige Periodizität,
max. Vorperiodenlänge $k = 107$ (für $d=9$, kleinstes negatives R),
mit max. Zwischenwert $x_\nu = 31248$ (für $x_0 = 50$).

$(d+2, d) = (5,3), (7,5), (11,9)$, kleinste Restsysteme R
für $x_0 \leq 100$ erstaunlicherweise fast durchgängige Periodizität.

b) Computer (Kl. Alber):

$(d+2, d) = (5,3)$, kleinste Restsysteme R
für $x_0 \leq 100$ sogar durchgängige Periodizität,
für $x_0 \leq 1000$ fast durchgängige Periodizität,
dagegen
$(d+3, d) = (5,2)$ kleinstes pos. Restsystem R
für $x_0 \leq 1000$ nur in Ausnahmefällen Periodizität.

Hiernach schien mein wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansatz noch verbesserungsbedürftig zu sein.

5. Weitere theoretische Ergebnisse

a) J. H. Conway (Cal. Tech.): „Unpredictable Iterations", published in England.

In einem Korollar zu seinem Theorem stellt er fest, dass Algorithmen solcher Art im allgemeinen "unpredictable" sind.

b) Riho Terras (UCLA) bewies für den ursprünglichen Algorithmus die Existenz einer Verteilungsfunktion $F(s)$, die so definiert ist:

$$\sigma(x_0) = \min \sigma_\nu \quad \text{mit} \quad x_\nu < x_0,$$

$$N_s(X) = \# \, x_0 \leq X \quad \text{mit} \quad \sigma(x_0) \geq s,$$

$$F(s) = \lim_{X \to \infty} \frac{N_s(X)}{X}.$$

Für diese Funktion bewies er:

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

c) H. Möller (Münster) packt den ursprünglichen Algorithmus von Kakutani mittels der S. N. Bernsteinschen Theorie der F-Normalreihen

$$\sum_{k,n} a_{k,n} \, x^k (1-x)^n$$

an und beweist, dass die Menge der x_0, für welche die Folge x_ν periodisch wird, die natürliche Dichte 1 besitzt. – Diese Arbeit ist im Druck bei Crelles Journal.

In einer weiteren Arbeit beweist er, dass der verallgemeinerte Algorithmus (Multiplikator m, Divisor d) dann und nur dann für fast alle Anfangsglieder x_0 (im Sinne von natürlicher Dichte 1) verkleinernd (im Sinne: es gibt ein späteres $x_\nu < x_0$) ist, wenn die Ungleichung

$$m^{d-1} < d^d, \text{ oder also } m < d^{\frac{d}{d-1}}$$

besteht, also z. B. für

$m = d+2$ mit $d = 5, 7, \ldots, 11$

$m = d+3$ mit $d = 13$, aber nicht mit $d = 2$.

~~[illegible]~~ Hierbei ist es sogar gleichgültig, welches Restsystem mod. d (ohne die Klasse 0 mod. d) zugrunde gelegt wird. Auch diese Arbeit soll in Crelles Journal erscheinen.

Helmut Hasse

On the greatest prime factor of $ax^n - b$.

§1. The greatest prime factor of $2^n - 1$. Denote by $P[a]$ the greatest prime factor of the integer a. Erdös (1965) conjectured that $P[2^n-1]/n$ tends to infinity with n. S. Baug (1886) proved that $P[2^n-1] \geq n+1$ for $n > 1$. It was improved by Schinzel (1962), he proved that $P[2^n-1] \geq 2n+1$ when $n \neq 2, 4, 6, 12$. Stewart (1975) ~~if~~ proved that for every x with $0 < x < (\log 2)^{-1}$ and for every integer $n (>2)$ with at most $x \log\log n$ distinct prime factors, $P[2^n-1]/n > f(n)$ where $f(n)$ is a function of n which can ~~to~~ be specifically determined in terms of x and $f(n)$ tends to infinity with n.

Let us consider the case when $n = p$ and p is a prime. Stewart (1975) proved that $P[2^p-1] \gg p(\log p)^{1/4}$. Erdös and Shorey improved it to constant times $p \log p$. Further they proved that for almost all primes p, $P[2^p-1] \geq p\dfrac{(\log p)^2}{(\log\log p)^3}$. ~~The~~ The proof depends on Brun's Sieve method and on linear ~~results of Stewart depend~~ forms in the logarithms.

§2. The greatest prime factor of $ax^n - b$.

Let a, b with $ab \neq 0$ be fixed integers. It was proved by Tijdeman and Shorey that

$$\lim_{n \to \infty} P[ax^n - b] = \infty$$

uniformly in integers $x > 1$. The proof depends on a result of Baker (1973) on linear forms in the logarithms of rational numbers. For a fixed integer $n \geq 2$, it follows from the work of Schinzel (1967), Keates (1969) and Coates (1970) that $P[ax^n - b]$ tends to infinity with x; an ineffective version of this result was proved by Siegel (1921).

T. N. Shorey

Trigonometrische Reihen über multiplikativen Zahlenmengen

Es sei T eine Teilmenge der Primzahlmenge, M die von T multiplikativ erzeugte Halbgruppe mit der charakteristischen Funktion ϑ. Besteht T aus allen Primzahlen $\not\equiv 1$ nach einem festen Modul K, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta(n)}{n} \sin(2\pi n\alpha) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

gleichmäßig.

Der Beweis (gemeinsam mit D. Wolke) verläuft über Abschätzungen von Charakter- und Exponentialsummen. Es zeigt sich, daß mit Ausnahme hinreichend weniger kurzer Intervalle von Zahlen N

$$\sum_{n \leq N} \vartheta(n) \sin(2\pi n\alpha) \ll_K N (\log N)^{-1-\varepsilon} \qquad (\varepsilon = \varepsilon(K) > 0)$$

gleichmäßig für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Dies ist im wesentlichen um den Faktor $\log N$ besser als die triviale Abschätzung.

Die gleichmäßige Konvergenz der obigen Reihe ist von Interesse im Zusammenhang mit einer von E. Artin stammenden Charakterisierung der Gamma-Funktion durch den Gaußschen Multiplikationssatz.

L. Lucht (Clausthal)

On the distribution of the values of some arithmetical functions

Theorem Let f be an additive function with real positive values, such that the distribution function F of the values $f(p+1)$, p being prime, (i.e. $F(u) = \lim \pi(N)^{-1} \#\{ p \le N ; f(p+1) < u \}$) exists and is continuous; one has the equivalence:

$$G(u) < G(v)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists p_0 > 2 \quad : \quad u < g(p_0+1) < v$$

Furthermore, if the series $\sum f(p)$ diverges but $f(p^\alpha)$ tends to zero (for $\alpha = 1,2,3$ and p tending to infinity), F is strictly increasing on $[\inf_{k \ge 1} f(2^k), +\infty[$ and $F(\inf f(2^k)) = 0$.

The demonstration of similar results (and generalizations) will be found in a forthcoming issue of Compositio Mathematica; I would like here to correct some "paternity" points which I learnt during the session.

One of the tools used in the proof of theorem is:
Let f be an additive positive valued function, and F the distribution function of the values $f(p+1)$; one has the equivalence:

(i) $\sum p^{-1} \min(f(p), 1) < +\infty$, $\sum_{f(p)>1} p^{-1} < +\infty$, $\sum_{f(p)=0} p^{-1} = +\infty$

(ii) F exists and is continuous.

The implication (i) $\Rightarrow$ (ii) has been proved by I. Kátai in 1968; the implication (ii) $\Rightarrow$ (i) has been proved by P.D.T.A. Elliott in the case where f is ~~also~~ supposed strongly additive, and independently by H. Daboussi and K.H. Indlekofer in the general case.

Without quoting all the references on connected works, I refer the reader to the paper by H. Halberstam (J. London Math. Soc. 31 (1956) 14-27) where the distribution functions of numbers $(\omega(P(p)) - \log\log p)/(\log\log p)^{1/2}$, where P is a polynomial, is completely determined.

J.M. DESHOUILLERS (Bordeaux, France)

Zero-density estimates for L-functions

It is shown how the Halász-Montgomery method for estimating the frequency of large values of Dirichlet polynomials can be refined using two additional arguments, which are:

1) the "reflection argument" of Huxley (in a simplified form),
2) an inequality for vectors $\varphi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots)$ in the Hilbert space H of square summable complex sequences: if $\varphi_1, \dots, \varphi_R$, $\psi_1, \dots, \psi_R \in H$ and $\varphi_\nu^{(n)} = \theta_n \psi_\nu^{(n)}$ with $|\theta_n| \le 1$ for all ν, n, then $\sum_{r,s=1}^{R} |(\varphi_r, \varphi_s)|^2 \le \sum_{r,s=1}^{R} |(\psi_r, \psi_s)|^2$.

As applications of a general theorem the following zero-density estimates can be obtained (in the usual notation):

(1) $\sum_{q \le Q} \sum_{\substack{\chi \bmod q,\\ \text{prim.}}} N(\alpha, T, \chi) \ll_\varepsilon (Q^2 T)^{2(1-\alpha)+\varepsilon}$ for $\alpha \ge \frac{4}{5}$

(2) $\qquad - \text{"} - \qquad \ll_\varepsilon (Q^2 T^2)^{2(1-\alpha)+\varepsilon}$ for $\alpha \ge \frac{557}{718}$ $\left(< \frac{7}{9}\right)$

(3) $\sum_{\chi \bmod q} N(\alpha, T, \chi) \ll_\varepsilon (qT)^{2(1-\alpha)+\varepsilon}$ for $\alpha \ge \frac{4}{5}$

(4) $N(\alpha, T) \ll_\varepsilon T^{2(1-\alpha)+\varepsilon}$ for $\alpha \ge \frac{11}{14} = 0.7857\ldots$

The result (2) is actually due to Huxley (I obtained the bound $\frac{7}{9}$), and (1), (3) were proved independently by Huxley and myself on the basis of a paper which will appear in Acta Arithmetica. In that paper the bound was weaker: $\frac{21}{26}$ instead of $\frac{4}{5}$.

Matti Jutila (Turku, Finland)

On almost primes in arithmetic progressions.

The principal aim of this lecture is to present some results which are obtained from the asymptotical study of Jurkat-Richert's (Acta Arith. 11 (1965), 217-240) beautiful work. Let $A(x;k,l;z)$ denotes the sum

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l \pmod k\\ (n,P_k(z))=1}} 1 \quad , \quad (k,l)=1 ,$$

where $P_k(z)=\prod_{\substack{p<z\\ p\nmid k}} p$. Then we have

Theorem 1

Let $A>1$ be arbitary and let $k\le x(\log x)^{-A}$. Then, for any z with $2\le z\le (x/\sqrt{k})(\log x)^{-A}$, we have

$$A(x;k,l;z)\le \frac{x}{k}\Gamma_k(z)\left\{F\left(\frac{\log(x/\sqrt{k})}{\log z}\right)+O((\log x)^{-1/14})\right\}$$

$$A(x;k,l;z)\ge \frac{x}{k}\Gamma_k(z)\left\{f\left(\frac{\log(x/\sqrt{k})}{\log z}\right)-O((\log x)^{-1/14})\right\}$$

save for at most $k(\log x)^{-\frac{A}{2}+23}$ l's (mod k). Here $\Gamma_k(z)=\prod_{\substack{p<z\\ p\nmid k}}(1-\frac{1}{p})$, and F, f are the fundemental functions in the linear sieve.

Also we have

Theorem 2

Let

$$W_\xi(x;k,l;z,w)=\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l \pmod k\\ (n,P_k(z))=1}}{}' \left\{1-\xi\sum_{\substack{z\le q<w\\ q\mid n\\ q\nmid k}}\left(1-\frac{\log q}{\log w}\right)\right\},$$

where q is a prime and Σ' is the sum over n's such that $q^2\nmid n$.

Then, for any non-negative constant ξ, we have

$$W_\xi(x;k,l;z,w)\ge \frac{x}{k}\Gamma_k(z)\left\{\Phi_\xi\left(\frac{\log(x/\sqrt{k})}{\log w},\frac{\log(x/\sqrt{k})}{\log z}\right)-O((\log x)^{-1/15})\right\}$$

save for at most $k(\log x)^{-\frac{A}{2}+33}$ l's (mod k). Here

$$\Phi_\xi(u,v)=f(v)-\xi\int_u^v F\left(v\left(1-\frac{1}{t}\right)\right)\left(1-\frac{u}{t}\right)\frac{dt}{t} \qquad (1<u\le v)$$

From this it follows that

<u>Theorem 3</u>. There exists numbers such that

$$P_2 \leqq k^{11/10}, \quad P_2 \equiv l \pmod{k}$$

$$P_3 \leqq k(\log k)^{70}, \quad P_3 \equiv l \pmod{k},$$

also

$$P_5 \leqq k^{1+\varepsilon}, \quad P_5 \equiv l \pmod{k}, \quad \mu(P_5) \neq 0,$$

for almost all l's (mod k).

In a similar way we can also prove that

<u>Theorem 4</u>

Let l be a fixed non-zero integer. Then there is a P_3 such that

$$P_3 \leqq k(\log k)^{70}, \quad P_3 \equiv l \pmod{k}$$

for almost all k, $(k, l) = 1$.

To consider the possibility of the improvement of Richert's result on P_2, we introduce the hypothesis:

$$\mathcal{D}_d: \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \pmod{k}}} \tau(n) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leqq x \\ (n,x)=1}} \tau(n) \left(1 + O_E((\log x)^{-E})\right),$$

where $\tau(n)$ stands for the number of divisors of n. Then we can prove

<u>Theorem 5</u>.

If $\mathcal{D}_{7/8}$ is confirmed, then there is a P_2 such that

$$P_2 \ll k^{1+\varepsilon}, \quad P_2 \equiv l \pmod{k},$$

uniformly for all l, $(k, l) = 1$.

Y. MOTOHASHI
(Tokyo / JAPAN)

Large gaps ~~of~~ between consecutive primes

By means of some recent zero density results for the zeta functions (Montgomery, Huxley, Jutila) the following inequality is proved $\sum_{\substack{p_n \le x \\ p_{n+1}-p_n > p_n^{1/2}}} (p_{n+1}-p_n) \ll x^{1-\frac{1}{30}}$ (p_n = n'th prime).

This answers a question of Erdös.

Dieter Wolke (Clausthal-Zellerfeld)

Zahlentheoretische Eigenschaften der Folge $[f(n)]$.

Es sei $f: [c_0, \infty) \to [1, \infty)$ 3-mal stetig diffbar. mit $f' > 0$, $f'' \geq 0$, so daß $f^{-1}: [c_1, \infty) \to [c_0, \infty)$ existiert.
Es gibt eine Funktionenklasse $\tilde{\mathcal{F}}$, deren Elemente durch Größenordnungsbedingungen, sowie durch Bedingungen an die ersten drei Ableitungen gekennzeichnet sind, so daß gilt:

<u>Satz 1</u> : $f \in \tilde{\mathcal{F}}$, $x \geq c_1$, $A > 0$, $q \leq \log^A x$

$$\Rightarrow \pi_f(x; q, l) := \sum_{\substack{p \le x \\ p = [f(n)] \\ p \equiv l (q)}} 1 = \frac{1}{\phi(q)} \int_{c_1}^{x} \frac{(f^{-1}(t))'}{\log t}\, dt + O\left(f^{-1}(x)\, e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

falls $(l, q) = 1$ und $\phi(q) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{q} 1$

<u>Satz 2</u> : $f \in \tilde{\mathcal{F}} \Rightarrow$ ex. $\varepsilon_0 > 0$, so daß für alle $A > 0$ gilt

$$\sum_{q \le x^{\varepsilon_0}} \max_{(l,q)=1} \max_{c_1 \le y \le x} \left| \pi_f(y; q, l) - \frac{1}{\phi(q)} \int_{c_1}^{y} \frac{(f^{-1}(t))'}{\log t}\, dt \right| \ll \frac{f^{-1}(x)}{\log^A x}$$

Korollar : ~~Es ex.~~ Ist $f \in \tilde{\mathcal{F}}$, so ex. ∞-viele Primzahlen $p = [f(n)]$, so daß $\Omega(p+2) \leq k = k(f)$.

Beispiele für Funktionen aus $\mathcal{F}$ sind: $x^T \log^A x$, $x^T e^{A \log^B x}$, $x \log^C x$, $x\, e^{C \log^B x}$, $x \log \ldots \log x$ wenn $1 < T < \frac{12}{11}$, $A \in \mathbb{R}$, $0 < B < 1$ und $C > 0$.

Dieter Leitmann (Clausthal-Zellerfeld)

Positive inverse Einheiten in komplexen kubischen Zahlkörpern

Es sei θ eine reelle kubische Irrationalzahl mit negativer Diskriminante D_θ und dem Minimalpolynom $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Jede ganze Zahl α von $K = \mathbb{Q}(\theta)$ kann ja in der Form

$$\alpha = \frac{b_0 \theta^2 + b_1 \theta + b_2}{d}, \quad d \mid D_\theta, \; b_i \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

dargestellt werden. Delone hat bewiesen, daß für positive inverse Einheiten η von K, für die also $\eta > 1$ ist, die Koeffizienten b_i in der Darstellung (1) von η positiv sind. Diese Aussage wird verschärft, indem für nicht zu kleine Einheiten $\eta > 1$ die Darstellung (1) explizit angegeben wird. Daraus ergeben sich zwei Anwendungen. 1. Ist auch nur <u>eine</u> Einheit von K bekannt, so läßt sich eine Grundeinheit von K finden. Das ist deshalb interessant, weil es sonst kein Verfahren gibt um festzustellen, ob eine vorgegebene Einheit eine Grundeinheit ist oder nicht. 2. Für die Zahlen $\theta + a_1$ und $\theta^2 + a_1\theta + a_2$ lassen sich besonders gute simultane rationale Approximationen explizit angeben.

Rainer Güting (Frankfurt)

Some open problems for the Jacobi algorithm

① Let $T(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_2}{x_1} - \left[\frac{x_2}{x_1}\right], \ldots, \frac{1}{x_1} - \left[\frac{1}{x_1}\right] \right)$, $0 < x_i \le 1$, $1 \le i \le n$. It is known that there exists a T-invariant measure μ equivalent to Lebesgue measure. Can one give some information on the density comparable with the simple formula

$$\mu(E) = \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{d\lambda(x)}{1+x}$$ in the case $n = 1$.

(2) Let $\frac{A_i^{(g+n)}}{A_0^{(g+n)}}$, $i = 1, .., n$ be the convergents of x. Fischer proved

$$\left| \frac{A_i^{(g+n)}}{A_0^{(g+n)}} - x_i \right| = O(\theta^g), \quad \theta = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

~~The~~ This value of θ should be improved. Only in the case $n = 1$ the best possible constant ($\theta = \frac{4}{3+\sqrt{5}}$) is known; for $n = 2$ ~~one~~ can take $\theta = \gamma^{-1}$, where $\gamma^3 = \gamma^2 + 1$, $\gamma > 1$, but it is still open if this constant is best possible.

On the other hand you may ask for individual estimates:

$$\left| \frac{A_i^{(g+n)}}{A_0^{(g+n)}} - x_i \right| = O(f(A_0^{(g+n)})), \quad f \downarrow$$

For $n = 1$ $f(t) = t^{-2}$, $n = 2$ $f(t) = t^{-1}$ are best possible. Surprisingly enough there are cubic pairs having $f(t) = t^{-\frac{3}{2}}$ and continuum many pairs with $f(t) = t^{-1}$.

(3) If the Jacobi-Perron algorithm

becomes periodic, $\tau_1, \dots, \tau_n$ belong to a numberfield of degree $\le n+1$. Besides of the case $n=1$ the converse is still open.

F. Schweiger (Salzburg)

On Siegel's zero

The following results obtained together with D. M. Goldfeld have been discussed

Let d be a fundamental discriminant, $\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right)$, β the greatest real zero of $L(s,\chi)$.

Theorem 1. The following asymptotic relation holds,

$$1-\beta = \frac{6}{\pi^2} \frac{L(1,\chi)}{\sum' \frac{1}{a}} \left[1 + O\left(\frac{(\log\log|d|)^2}{\log|d|}\right) + O\left((1-\beta)\log|d|\right)\right],$$

where $\sum'$ is taken over all quadratic forms (a,b,c) of discriminant d such that

$$-a < b \le a < \tfrac{1}{4}\sqrt{|d|}$$

and the constants in the O-symbols are effectively computable

Theorem 2 If (a,b,c) runs through a class C of properly equivalent primitive forms of discriminant d, then

$$\sum_{\frac{1}{4}\sqrt{|d|} \ge |a| \ge b > -|a|} \frac{1}{|a|} \le \begin{cases} 1/m_0 & \text{if } d<0 \\ \dfrac{\log \varepsilon_0}{\log(\frac{1}{2}\sqrt{d}-1)} + \dfrac{4}{\sqrt{d}} & \text{if } d > 676, \end{cases}$$

where m_0 is the least positive integer represented by C and ε_0 is the least ~~totally~~ positive unit of the field $Q(\sqrt{d})$.

Corollary For any $\eta > 0$ and $|d| > C(\eta)$ (d fundamental) we have

$$1-\beta \geq \begin{cases} \left(\frac{6}{\pi}-\eta\right)\frac{1}{\sqrt{|d|}} & \text{if } d<0 \\ \left(\frac{6}{\pi^2}-\eta\right)\frac{\log d}{\sqrt{d}} & \text{if } d>0, \end{cases}$$

where $c(\eta)$ is an effectively computable constant.

A. Schinzel
Math. Institute of the Polish Academy of Sciences,
Warsaw, Poland.

<u>A coprimality problem for a pair of polynomial-like multiplicative functions</u>

Let f, g denote polynomial-like multiplicative functions, so that $\exists\ w_1, w_2 \in \mathbb{Z}[x]$ such that $f(p) = w_1(p)$, $g(p) = w_2(p)$ $\forall$ primes p. Assume that w_1, w_2 have positive degrees and that they are coprime, and also that $w_2(0) \neq 0$, $w_1(x) = x^d w_1^*(x)$ where $w_1^*(0) \neq 0$, $\deg w_1^* > 0$. Let $S_0 = \{p : p \mid (w_1(q), w_2(q))$ for all primes q except perhaps $p\}$. Then put

$$N_{f,g}(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ p \nmid (f(n), g(n))\ \forall p \notin S_0}} 1 .$$

The proof of the following theorem was outlined:

<u>Theorem</u> $\quad \frac{x}{\log x} \ll N_{f,g}(x) \ll \frac{x}{\log x} \exp\left(\frac{B \log_3 x}{(\log_4 x)^{\lambda}}\right)$

where $B > 0$, $\lambda > 0$.

Furthermore under certain conditions, the left inequality may be strengthened to $N_{f,g}(x) \gg \frac{x \log_3 x}{\log x}$.

The application $f = \phi$, $g = \sigma$, when $S_0 = \{2\}$, was discussed. Further examples for which the Theorem holds are: $f = \phi$, $g = \sigma_\nu$ $(\nu \geq 0)$; $f = \sigma_k$, $g = \sigma_\nu$ where one of $\frac{k}{(\nu,k)}$, $\frac{\nu}{(\nu,k)}$ is even.

Eira J. Scourfield
Westfield College, University of London.
England.

Some problems on arithmetical functions

1.§. Characterization of $\log n$.

Let $f(n)$ (and later) $g(n)$ be additive functions. Erdős proved: If $f(n)$ is monotonic, or $f(n+1)-f(n)\to 0$, then $f(n)=c\log n$. These theorems have many generalizations.

I proved: If $\sum_{n\le x}|f(n+1)-f(n)|=o(x)$, then $f(n)=c\log n$.

Wirsing -"- : If $\liminf_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{x\le n\le(1+\gamma)x}|f(n+1)-f(n)|\to 0$, then $f(n)=c\log n$. ($\gamma>0$, const.)

-"- -"- : If $f(n+1)-f(n)=O(1)$, then $f(n)=c\log n+O(1)$.

I determined all $f(n)$ and $g(n)$ for which $g(n+k)-f(n)\to 0$ (k fixed integer) (Acta Sci. Math. (1969)). In the same paper I stated the conjecture that from $g(n+1)-f(n)=O(1)$ it follows that $f(n)=c\log n+O(1)$, $g(n)=c\log n+O(1)$. This was proved by J. Mauclaire (Acta Sci. Math. (1974)).

Recently I proved: If $(\log x)^{-1}\cdot\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\cdot|g(n+1)-f(n)|\to 0$, then $f(n)=g(n)=c\log n$.

Iványi and I proved (Acta Math. Hung. (1973)) the following: If $f(n)$ is completely additive, $\varepsilon>0$, and $N_1<N_2<\dots$ be an arbitrary sequence of integers so that

$$f(n)\le f(n+1)\quad \text{in } n\in[N_j,\ N_j+(2+\varepsilon)\sqrt{N_j}\,],$$

then $f(n)=c\log n$. / For non-completely additive $f(n)$ we need to change the interval to $[N_j, N_j+\exp(c\frac{\log N_j}{\log\log N_j})\cdot\sqrt{N_j}\,]$. We believe that the intervals $[N_j, N_j+N_j^{\varepsilon}]$ correspond, too. / On the other hand we can construct a completely additive $f(n)$, $f(n)\not\equiv 0$, so that $f(n)=A_j$ $n\in[N_j, N_j+\rho(N_j)]$, $\rho(N)=\exp(c\sqrt{(\log N)\cdot(\log\log\log N)})$, $N_1<N_2<\dots$ being a suitable infinite sequence of integers.

2.§. Local behaviour of multiplicative functions.

Let $f(n)$ be completely multiplicative and $f(n)$ is never zero, $f(n)\not\equiv 1$. I have proved that the relation $f(n)=f(n+1)=\dots=f(n+j)$ $j=[(2+\varepsilon)\sqrt{n}]$ does not hold for $n>n_0(f,\varepsilon)$ ($\varepsilon>0$, constant). If $\lambda(n)$ is the Liouville function, then - it follows evidently that - it takes both values in every $[n, n+(2+\varepsilon)\sqrt{n}\,]$ when $n>n_0$. As I know, there no exists better results for $\lambda(n)$.

Let $f(n)$ be multiplicative defined on the set of square-free numbers, so that $f(n)$ is never zero and $f(n) \not\equiv 1$. Then it takes at least two values in $[N, N+N^{\vartheta}]$, $\vartheta = 0,62$ when $N > N_0(f, \varepsilon)$. This gives a result for the change of signs of the μ-function. I believe that for every large N, there exist ~~is~~ $n_1, n_2 \in [N, N+\sqrt{N}]$ such that $\mu(n_1) = +1$, $\mu(n_2) = -1$.

3.§. Multiplicative functions of normal type

Let $\mathcal{M}$ denote the class of those ~~m~~ completely multiplicative $f(n)$ that take only the values $+1$ and -1. Let $N_f(x; \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ be the number of those n's for which $n \le x$ and $f(n+i) = \varepsilon_i$ $(i = 0, \dots, k)$ $(\varepsilon_0 = \pm 1, \dots, \varepsilon_k = \pm 1)$. We say that $f(n) \in \mathcal{M}$ is of normal type, if

$$x^{-1} \cdot N_f(x; \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \to 2^{-k-1} \quad (x \to \infty)$$

for every k and every choice of ε_j. This definition is equivalent with the following one. $f(n) \in \mathcal{M}$ is of normal type, if

$$\sum_{n \le x} f(n) f(n+j_1) \dots f(n+j_l) = o(x) \quad (x \to \infty)$$

for every $j_1 < \dots < j_l$ $(l = 0, 1, \dots)$.

We define a metrization on $\mathcal{M}$. Let $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ be a probability space, $\xi_n = \xi_n(\omega)$ be independent random variables, $P(\xi_n = +1) = P(\xi_n = -1) = 1/2$. We define $f(n, \omega)$ at the k'th prime p_k by $f(p_k, \omega) = \xi_k(\omega)$ $(k = 1, \dots)$. I proved (Acta Sci. Math., 1972) that $f(n, \omega)$ is of normal type for almost all ω. I cannot give a construction for normal multiplicative function.

I think that, if $f(n) \in \mathcal{M}$ and $\sum_{f(p) = -1} 1/p = \infty$, then

$$x^{-1} \cdot N_f(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \to 1/4 \quad (\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1).$$

This would be a generalization of a theorem of Wirsing. Presently I can prove only that

$$\liminf x^{-1} N_f(x, 1, 1) \ge 1/12, \quad \liminf x^{-1} N_f(x, -1, -1) \ge 1/12.$$

I. Kátai (Budapest)
Eötvös Loránd's University

Some new results in lattice point theory.

Let Q be a positive definite quadratic form in r variables with integral symmetric coefficient matrix and determinant D and let α_j, b_j ($j = 1, 2, \ldots, r$) be real numbers, $0 \leq \alpha_j, b_j < 1$. For $x \geq 0$ denote by $A(x)$ the sum

$$\sum e^{2\pi i(\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_r m_r)},$$

where the summation runs over all integers m_j satisfying $Q(m_j + b_j) \leq x$. Let

$$P(x) = A(x) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}} \delta}{\sqrt{D}\,\Gamma(\frac{r}{2}+1)}$$

($\delta = 1$ if all the numbers α_j are equal to zero, $\delta = 0$ otherwise) be the corresponding lattice remainder term. Let further $P_0(x) = P(x)$ and for $\rho > 0$

$$P_\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^x P(t)(x-t)^{\rho-1}\,dt.$$

Recently (see Math. Notes 17, No 3) the author proved the following theorem.

Theorem 1. Let $\rho > 0$, $r > 4$. Then

$$P_\rho(x) \ll x^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{h,k}' \frac{k^\rho}{|h|^{\rho+1}} \min^{\frac{r}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{k}, \frac{1}{P_{h,k}}\right),$$

where $P_{h,k} = \max_j \| k\alpha_j - 2h \sum_{l=1}^{r} a_{jl} b_l \|$, $Q(u) = \sum a_{jl} u_j u_l$ and $\sum'$ denote the summation over integers h, k, $h \neq 0$, $0 < k \leq \sqrt{x}$, $(h,k) = 1$.

This result together with a similar formula for $\rho = 0$ and for the function $M_\rho(x) = \int_0^x |P_\rho(t)|^2\,dt$ and with author's Ω-method (see Czech. Math. J. 21 (1971), 257-279) and three lemmas of Jarník gives the following results (Trans. Am. M. Soc. 195, 357-364, Comm. Math. Univ. Carol. 13)

Theorem 2. a) Let $b_1 = b_2 = \ldots = b_r = 0$, $r > 4$. Then

(*) $$P_\rho(x) = O(x^{f+\varepsilon}),\quad P_\rho(x) = \Omega(x^{f-\varepsilon})$$

for any $\varepsilon > 0$, where

$$f = \left(\frac{r}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{2\gamma+1}{\gamma+1} + \frac{\rho}{2(\gamma+1)}$$

provided $f \geq \frac{r}{4} + \rho/2$, where $\gamma = \gamma(\alpha_1 \ldots \alpha_r)$ is the supremum of all $\beta > 0$, for which $\liminf P_k k^{-\beta} < +\infty$.

b) Let $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$, $r > 4$. Then (*)

holds, where

$$f = \frac{k}{2} - 1 - \frac{\rho+1}{2j},$$

$j = j(b_1 - b_r)$, provided $f \geq \frac{k}{4} + \rho/2$

c) In the both above introduced cases (i.e. $a_j \equiv 0$ or $b_j \equiv 0$)

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\lg M_\rho(x)}{\lg x} = \max\left(2f+1, \frac{k}{2}+\rho+\frac{1}{2}\right).$$

For almost all a_j's (if $b_j = 0$) and almost all b_j's (if $a_j = 0$) we have only the following estimates

$$P_\rho(x) = O(x^{\frac{k}{4}+\rho/2+\varepsilon}), \quad P_\rho(x) = \Omega(x^{\frac{k}{4}-\frac{1}{4}+\rho/2})$$

Thus, the following theorem is very surprising.

Theorem 3.

$$\int |P_\rho(x)|^2 \, da \sim \frac{\Gamma(2\rho+1)\pi^{k/2} x^{k+2\rho}}{\Gamma^2(\rho+1)\sqrt{D}\,\Gamma(\frac{k}{2}+2\rho+1)}, \quad \sup_{a_j} |P_\rho(x)| \asymp x^{\frac{k}{2}+\rho}$$

$$\int |P_\rho(x)|^2 \, db = \begin{cases} O(x^{\frac{k-1}{2}+\rho}) \\ \Omega(x^{\frac{k-1}{2}+\rho}) \end{cases}$$

B. Novák,

Charles University, Praha

Nombres 2-hautement composés. J.L. NICOLAS

univ de Limoges, France

Soit $d(n) = \sum_{d|n} 1$. Ramanujan dit que n est hautement composé si $\forall m < n$, on a $d(m) < d(n)$.

Soit $\mathcal{N}_2 = \{ 2^a 3^b \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \}$. On dit que $n \in \mathcal{N}_2$ est 2 hautement composé si: $\forall m \in \mathcal{N}_2$, $m < n \Rightarrow d(m) < d(n)$

On démontre le théorème suivant, avec la collaboration de G. Bessi :-

Théorème : Soit $\vartheta = \frac{\log 2}{\log 3}$. Soit $\frac{p_k}{q_k}$ les convergents successifs du développement de ϑ en fraction continue. Pour x réel on définit k par : $q_k \leq x < q_{k+1}$; on définit $r = \left[\frac{x - q_{k-1}}{q_k}\right]$ et $q = r q_k + q_{k-1}$ et enfin $\varphi(x) = \vartheta q_k q (2x - q - q_k)$.
La fonction φ est strictement croissante et continue pour $x \geq 1$ et admet une fonction réciproque.
Soit $2^a 3^b$ un nombre 2-hautement composé. Soit $a+1 = \varphi(x_a)$ soit $q_k \leq x_a < q_{k+1}$ et supposons k pair. Alors les nombres 2-hautement composés appartenant à l'intervalle $[2^a 3^b, 2^a 3^{b+1}[$ sont de la forme $2^{a+i} 3^{b-h(i)}$ (avec $h(i) = [i\vartheta]$) avec $-i'_0 \leq i \leq i_0$ et :

$$2i_0 = (a+1)\frac{\|\vartheta q_k\|}{\vartheta q_k} + q_k + \frac{\varepsilon}{\vartheta} + \gamma \qquad -2 \leq \gamma \leq 1.8$$

$$2i'_0 = (a+1)\frac{\|\vartheta q\|}{\vartheta q} + q - \frac{\varepsilon}{\vartheta} + \gamma' \qquad -1.8 \leq \gamma' \leq 2$$

$\|u\| = \min_{n \in \mathbb{N}} |n - u|$ et $\varepsilon = (b+1) - (a+1)\vartheta$. Si q est impair les formules donnant i_0 et i'_0 doivent être permutées.

Corollaire : Soit $Q(X) = \text{Card}\{n \leq X \text{ ; } n \text{ est 2 hautement composé}\}$

On a :

$$(\log X)^{4/3} \ll Q(X) \ll (\log X)^{3/2}$$

et plus précisément :

$$\liminf \frac{\log Q(X)}{\log\log X} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \limsup \frac{\log Q(X)}{\log\log X} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\limsup \frac{q_{k+1}}{q_k}}}$$

Linear Independence of Cosecans Values

The following two theorems are proved :

I Let p denote an odd prime and let $m = \frac{1}{2}(p-1)$. The m numbers

$$\csc \frac{2\pi l}{p}, \quad l = 1, 2, \cdots, m,$$

are linearly independent over $\mathbb{Q}$, if and only if the multiplicative order of 2, mod p, is even.

II Let p denote an odd prime and let $m = \frac{1}{2}(p-1)$. Then the m numbers

$$\csc^2 \frac{2\pi l}{p}, \quad l = 1, 2, \cdots, m$$

are linearly independent over $\mathbb{Q}$.

Details, proofs and references can be found in:
H. Jager and H. W. Lenstra, Jr., Linear independence of cosecant values, Nieuw Archief voor Wiskunde, XXIII, 1975, 131-144

H. Jager, Amsterdam.

Bounds for the coefficients of cyclotomic polynomials

Let $\Phi_n(z) = \prod_{\substack{r=1 \\ (r,n)=1}}^{n} (z - e(r/n)) = \sum_{m=0}^{\phi(n)} a_n(m) z^m$ denote the nth cyclotomic polynomial. There is an old question concerning the order of magnitude of $A_n = \max_m |a_n(m)|$. Bateman Bull AMS 1949 showed that $A_n < \exp(\frac{1}{2} d(n) \log n) \ll \exp(2^{(1+\varepsilon)\log n/\log\log n})$ and Erdős, also 1949, showed that i.o. $A_n > \exp(n^{c/\log\log n})$. Erdős asks if this is true for every $c < \log 2$. We provide a proof as follows. Let $s = \sigma + i$, $\sigma = \frac{1}{\log n}$, $n = \prod p$ with $\pi(2k+1) < \log p \leq \pi(2k+1) + \frac{1}{4}\varepsilon$ and $k > k_0(\varepsilon)$. Then for every real θ

$$\int_0^\infty \left(\log \Phi_n(e^{-1/x})\right) x^{-1-\sigma}\left(1 + \cos(\theta - \log x)\right) dx =$$

$$-\mu(n)\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma+1)\prod_{p|n}(1-p^{-\sigma}) \cancel{\mp} \operatorname{Re} e^{i\theta}\mu(n)\Gamma(s)\zeta(s+1)\prod_{p|n}(1-p^{-s}).$$

Now it is easily verified that

$\left|\prod_{p|n}(1-p^{-s})\right| > 2^{\omega(n)(1-\frac{1}{2}\varepsilon)}$ and $\omega(n) \sim \dfrac{\log n}{\log\log n}$. Hence, for a suitable choice of θ we obtain $\Phi_n(e^{-1/x}) > \exp\left(2^{(1-\frac{3}{4}\varepsilon)\log n/\log\log n}\right)$ and hence $A_n > \exp\left(2^{(1-\varepsilon)\log n/\log\log n}\right)$.

R. C. Vaughan, Imperial College, London.

Ramanujan expansions of multiplicative functions

The main result is the following:

Theorem: Let f be a multiplicative function. Suppose that

(1) The series $\sum \dfrac{f(p)-1}{p}$ converges;

(2) we have $\displaystyle\sum_{|f(p)-1|\leq 1} \frac{|f(p)-1|^2}{p} < \infty$ and $\displaystyle\sum_{|f(p)-1|>1} \frac{|f(p)-1|}{p} < \infty$;

(3) we have $\displaystyle\sum_{\substack{p,r\\ r\geq 2}} \frac{|f(p^r)|}{p^r} < \infty$.

Then f is limit-periodic (B) and, by a suitable grouping of its terms, its Fourier Series takes on the form

$$(R) \qquad \sum_{q=1}^{\infty} a_q\, c_q(n),$$

where $c_q(n)$ is Ramanujan's sum $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq h\leq q\\ (h,q)=1}} e^{2\pi i \frac{h}{q} n}$.

we have $\displaystyle a_q = \prod_p \left(\sum_{r=\rho_p(q)}^{\infty} \frac{f'(p^r)}{p^r} \right)$,

where $\rho_p(q)$ is the exponent of p in the factorization of q and $f' = f * \mu$.

The series (R) is convergent and equal to $f(n)$ for every n.

This theorem can be generalized by replacing hypotheses (1) and (2) by the following:

There exist a Dirichlet character χ such that

a. The series $\sum_p \frac{\chi(p)f(p)-1}{p}$ converges,

b. we have $\sum_{|\chi(p)f(p)-1|\leqslant 1} \frac{|\chi(p)f(p)-1|^2}{p}<\infty$ and $\sum_{|\chi(p)f(p)-1|>1} \frac{|\chi(p)f(p)-1|}{p}<\infty$.

If χ is supposed to be a primitive character to the modulus k, then the Fourier-series of f now takes on the form

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q c_{q,\chi}(n),$$

where $c_{q,\chi}(n) = \sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant kq \\ (h,kq)=1}} \chi(h) e^{2\pi i \frac{h}{kq} n}$.

This series is again convergent and equal to $f(n)$ for every n.

H. Delange (Université de Paris-Sud)

Primzahlen und dünne Folgen

Es ist nicht bekannt, ob es unter den Zahlen $2^{2^r}+1$ ($r \in \mathbb{N}$) unendlich viele Primzahlen (= Fermat-Primzahlen) gibt; ferner ist nicht bekannt, ob es unter den Zahlen 2^p-1 unendlich viele Primzahlen (= Mersenne-Primzahlen) gibt. Dagegen ist bekannt, dass die Anzahl der natürlichen Zahlen $r \leq \xi$, für die $r2^r+1$ eine Primzahl ist, ein $o(\xi)$ ist ($\xi \to \infty$) (vgl. C. Hooley, Applications of sieve methods to the theory of numbers. Cardiff 1975); das lässt sich leicht zu $O(\xi(\log\log\log\xi)^{-1})$ verschärfen. Wir beweisen hier, dass die Anzahl der Prim–

zahlen $p \leq \xi$, für die $p2^p+1$ eine Primzahl ist, ein $O(\xi(\log\xi)^{-1}(\log\log\log\log\xi)^{-1})$ ist. Beim Beweis spielt die Menge Q aller ungeraden Primzahlen $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$ mit $q_i \nmid (q_j - 1)$ $(i<j)$ eine Rolle; für diese Menge $Q = \{3, 5, 17, 23, 29, 53, 59, \ldots\}$ hat Erdős (J. Australian Math. Soc. 2 (1961/62), 1–8) bewiesen $\sum_{q \leq \xi,\, q \in Q} \frac{1}{q} = \log\log\log\xi + O(1)$.

G. J. Rieger (Hannover)

<u>Über die asymptotische Entwicklung einer Funktion im Zusammenhang mit dem Kreisproblem in reell-quadratischen Zahlkörpern.</u>

Es sei K ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d>0$. Seien ξ, μ, ν ganze algebraische Zahlen aus K, sei

$$r(\xi) := \sum_{(\mu,\nu),\, \mu^2+\nu^2=\xi} 1 \qquad \text{für } \xi \geq 0,\ \xi' \geq 0.$$

Will man Ω-Abschätzungen für das Restglied $R(x,x')$ in der Entwicklung

$$\sum_{\substack{0<\xi<x \\ 0<\xi'<x'}} r(\xi) = \frac{\pi^2}{d}(xx') + R(x,x')$$

erhalten (bekannt ist $R(x,x') \ll_\varepsilon (xx')^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, ferner $R(x,x') \neq o\left((xx')^{1/4}\right)$), so wird man auf folgende Funktion geführt:

$$f(s,s') = \sum_{\substack{\xi \geq 0 \\ \xi' \geq 0}} r(\xi) e^{-s\sqrt{\xi} - s'\sqrt{\xi'}} = \frac{c}{(ss')^2} + c\,ss' \sum_{\substack{\xi>0 \\ \xi'>0}} \frac{r(\xi)}{[s^2+c\,\xi]^{3/2}[s'^2+c\,\xi']^{3/2}}$$

mit $s=\sigma+it$, $s'=\sigma'+it'$ ($\sigma>0, \sigma'>0$ in der linken Summe), $c=\frac{4\pi^2}{d}$. Man benötigt eine asymptotische Entwicklung der rechten Reihe für $s=s'=0$.
Mit Hilfe der Poissonschen Summenformel und Mellins Umkehrformeln kann man ~~[illegible]~~ eine asymptotische Entwicklung dieser Reihe herleiten, welche zeigt, daß sie eine Singularität der Form $\log(s\cdot s')$ besitzt. Wegen des Faktors ss' hat also $f(s,s')$ bei $s=s'=0$ die durch $\frac{c}{(ss')^2}$ charakterisierte Singularität.

Werner Schaal Marburg/L.

Über die grösste reelle Nullstelle einer reellen L-Funktion

Es sei χ ein reeller primitiver Charakter (mod D), $L(s) = L(s, \chi)$ die zu χ gehörige L-Funktion $\beta = 1-\delta$ die grösste reelle Nullstelle von $L(s)$. Es wird eine effektive asymptotische Formel für δ gegeben, falls $\chi(n) = \left(\frac{-D}{n}\right)$, $D>0$ ist und für die Klassenzahl $h(-D)$ von $Q(\sqrt{-D})$ die Ungleichung

$$h(-D) \leq \frac{\log D}{2 \log\log D}$$

gültig ist. Wir haben nämlich

$$(1) \quad \delta \sim \frac{6\, h(-D)}{\pi \sqrt{D} \prod_{p \mid D} \left(1 + \frac{1}{p}\right)}$$

Mittels (1) kann man beweisen, dass wenn χ ein reeller nicht Hauptcharakter (mod D) ist, für welchen $L(1-\delta, \chi) = 0$ ist, so erfüllt δ die Ungleichung

$$(2) \quad \delta > \frac{12 - \varepsilon}{\pi \sqrt{D}} \quad \text{für } D > D(\varepsilon),$$

wo $D(\varepsilon)$ eine von ε abhängende, effektive Konstante ist.

J. Pintz (Budapest)

On some phenomena in the theory of partitions (P. Turán (Budapest))

vorgetragen von J. Pintz

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen

Eine Teilmenge $\mathfrak{A} = \{a_m\}$ von $\mathbb{N}$ heißt Eindeutigkeitsmenge für additive Funktionen f, falls aus $f(a_m) = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ folgt, daß f identisch Null ist.

$\mathfrak{A} = \{a_m\}$ habe folgende Eigenschaften:

(i) $a_m \ll m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ (ii) $\sum_{\substack{m \\ a_m = k}} 1 = O(1)$ glm. in $k \in \mathbb{N}$

(iii) ~~Es existieren ganzzahlige Gewichte~~ $\cancel{1 \le g(a_m) = O(1)}$ ~~$(m = 1, 2, \ldots)$, so daß~~ für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\substack{m \le x \\ a_m = o(d)}} 1 \, \cancel{g(a_m)} = x \frac{\rho(d)}{d} + o(x) \qquad (x \to \infty),$$

~~gilt~~, wobei $\rho \geq 0$ multiplikativ ist und $o(\cdot)$ von $\mathfrak{A}$ und d abhängen kann.

Dann gilt

<u>Theorem 1.</u> Sei f additiv, $\mathfrak{A} = \{a_m\}$ erfülle (i) und (ii). Dann ist

$$\mathfrak{A} \cup \{p^\alpha : \rho(p^\alpha) = 0\} \cup \{p^\beta : \rho(p) = p,\ \rho(p^\beta) \neq 0\} \cup \{p^\gamma : \rho(p^{\gamma+1}) = p\,\rho(p^\gamma)\}$$

eine Eindeutigkeitsmenge von f, falls mindestens für zwei Primzahlen $(p_1 \neq p_2)$ $p_1 = \rho(p_1)$ und $p_2 = \rho(p_2)$ gilt. Andernfalls ist

$$\mathfrak{A} \cup \{p^\alpha : \rho(p^\alpha) = 0\} \cup \{p, p^2, \ldots, p^{\beta-1} : \rho(p^\beta) = p^\beta,\ \rho(p^{\beta+1}) \neq p^{\beta+1}\} \cup \{p^\gamma : \rho(p^{\gamma+1}) = p\rho(p^\gamma)\}.$$

eine Eindeutigkeitsmenge für f.

Entsprechende Ergebnisse lassen sich für vollständig additive Funktionen angeben.

Als Beispiel für $\mathfrak{A}$ haben wir

<u>Theorem 2.</u> $\mathfrak{A} = \{[\alpha m] : \alpha > 1 \text{ irrational}\}$ ist Eindeutigkeitsmenge für additive Funktionen.

Die Beweise beruhen hauptsächlich auf Ergebnissen über notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Grenzverteilung von $f(a_m)$ (Lit. Mat. Sbornik, 1976).

K.-H. Indlekofer (Paderborn)

'Über die asymptotische Verteilung von Beurling'schen Zahlen'

Unter einem System G von Beurlingschen Zahlen versteht man eine multiplikative Halbgruppe, die von abzählbar vielen reellen Zahlen p_n mit $1 < p_1 \le p_2 \le \cdots \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ erzeugt wird. Für $x > 0$ sind dann die beiden Anzahlfunktionen $\pi_G(x) = \sum_{p_n \le x} 1$ und $N_G(x) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \in G}} 1$ wohldefiniert.

Mit elementaren Mitteln läßt sich leicht ein System G so konstruieren, daß

$$(*) \quad N_G(x) \sim cx \text{ für kein } c > 0 \quad \text{und} \quad \pi_G(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x \, \log\log x}\right)$$

gilt.

Andererseits folgt auf Grund eines allgemeinen Satzes von Wirsing (1961), daß aus

$$\pi_G(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x (\log\log x)^{\delta}}\right), \; \delta > 1$$

stets $N_G(x) \sim cx$ für ein $c > 0$ folgt.

Damit ist $(*)$ in gewisser Weise optimal.

H. Müller

Freie Universität Berlin, 1. Math. Inst.

NEW ESTIMATES FOR THE SUMMATORY FUNCTION OF THE MÖBIUS FUNCTION

Let μ be the Möbius function, and define the summatory functions $M(x) = \sum_{n \le x} \mu(n)$ and $Q(x) = \sum_{n \le x} |\mu(n)|$. Up to now, the best effective bound for $M(x)$ are

$$|M(x)| \le \tfrac{1}{2}\sqrt{x} \quad \text{for } x \in [201, 10^8] \quad (\text{G. Neubauer - 1963})$$

$$|M(x)| \leq \frac{x}{80} \qquad \text{for } x \geq 1119 \qquad (\text{R.A. MacLeod - 1967})$$

$$|M(x)| \leq \frac{5.3\,x}{(\log x)^{10/9}} \qquad \text{for } x \geq 1 \qquad (\text{L. Schoenfeld - 1969})$$

The method used by Mac Leod (and, before him, by Von Sterneck and Hackel) consists to consider functions of the form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \left[\frac{x}{n}\right]$$

which satisfy the two properties:

(i) $\exists A$ s.t. $f(x) = 1$ for $1 \leq x < A$

($\Leftrightarrow$ $c_n = \mu(n)$ for $1 \leq n < A$)

(ii) $\exists B$ s.t. $|1 - f(x)| \leq B$ for all x

($\Leftrightarrow$ f periodic $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n} = 0$)

Then, the sum $S = \sum_{n \leq x} \mu(n) \left\{1 - f\left(\frac{x}{n}\right)\right\}$ can be estimated in two different manners, hence one can deduce an effective bound $|M(x)| \leq \left(\frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{B}{A} + 2\right) x$ for $x \geq x_0$.

Using various refinements ("better" functions than those of Mac Leod, a new effective estimate $\left|\Phi(x) - \frac{6}{\pi^2} x\right| \leq 0.22\sqrt{x}$ [H. Cohen and the author], and so on ...), we can improve the bound of Mac Leod. The computations are not completed. Our present best result is

$$|M(x)| \leq \frac{x}{143.7} \qquad \text{for } x \geq \text{about } 3400$$

Two remarks must be done:

1) the bound $\frac{x}{143.7}$ is the best effective result for $x \in [10^8, 10^{170}]$;

2) in the bound $\frac{cx}{(\log x)^{9/10}}$ of Schoenfeld, the determination of the constant c depends upon a convolution formula involving $M(x)$ itself, so that our bound $\frac{x}{143.7}$ gives an improvement of the constant c (not yet computed)

F. DRESS
Université de Bordeaux
(Talence - France)

Über ein kombinatorisches Problem

Es sei n Zahlen a_i gegeben; das Problem ist, die Anzahl $N(a)$ von $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ mit fixiertem $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i = a$ ($\varepsilon_i = \pm 1$ oder 0) abzuschätzen. Einen einfachen analytischen ~~Methode~~ Beweis wird für ~~den Beweis~~ eines Resultats von Sárközi und Szemerédi ($N(a) \le c \frac{2^n}{n^{3/2}}$, falls $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ ist) gegeben, welcher ~~auch~~ eine einheitliche Behandlung von gelösten und neuen Problemen ermöglicht. Zum Beispiel wird als neues Resultat behauptet: Anzahl von $\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ mit fixiertem $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$ und fixiertem $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\} < c \frac{2^n}{n^2}$ (Vermut~~ung~~et früher von P. Erdös)

G. Halász
Mathematisches Institut
Budapest

The irregular primes to 100 000

Using a computer at the University of Illinois, the 9591 odd primes less than 100 000 were tested for regularity. Of these primes, 5802 are regular and 3789 are irregular. Of the latter, 2928 have index 1 (i.e., divide exactly one Bernoulli numerator), 728 have index 2, 123 have index 3, 8 have index 4, and two have index 5. No prime of higher index of irregularity was discovered. The two primes of index 5 which were found are 78233 and 94693.

Once the irregular primes below a given limit are known, it is easy to derive some other results with a little more calculation. The theorem of Vandiver proved Fermat's "Last Theorem" for all exponents less than 100000. The Iwasawa invariants μ_p, λ_p and ν_p were computed. As conjectured, $\mu_p = 0$ for $p < 100000$. For any small $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, the irregular primes seem to be distributed uniformly in the $\phi(m)$ possible residue classes modulo m. The rational numbers $\frac{2k}{p}$, $1 < 2k < p-2$ with $p \mid B_{2k}$ appear to be uniformly distributed in the unit interval $[0,1]$. The data support the heuristic argument that the index of irregularity of primes satisfys a Poisson distribution.

Question: Do there exist infinitely many pairs $(p, 2k)$ with p prime, $1 < 2k < p-2$, $p \mid B_{2k}$ and $p \equiv 1 \pmod{2k}$? Three such pairs are known: $(3617, 16)$, $(5479, 1826)$, $(43867, 18)$

S. Wagstaff
Urbana, Illinois.

Neuere Resultate zum Reichweitenproblem

Sei $A: a_0 = 0,\ a_1 = 1 < a_2 < \cdots < a_k$ eine Menge ganzer Zahlen, seien $h, n \in \mathbb{N}$. Besitzt jede ganze Zahl aus $[0, n]$ eine Darstellung als Summe von h (nicht notwendig verschiedenen) Elementen aus A, so heißt A eine Basis der Ordnung h für n.

Die größte Zahl n, für die eine Basis h-ter Ordnung mit genau k positiven Elementen existiert, wird mit $n(h,k)$ bezeichnet. Es werden einige asymptotische Abschätzungen nach unten für $n(h,k)$ bei festem k bzw bei festem h angegeben und die Widerlegung der Rohrbachschen Vermutung $n(2,k) \sim \frac{k^2}{4}$ anhand eines Beispiels skizziert, das $n(2,k) > \frac{10}{9}\frac{k^2}{4}$ liefert.

G. Hofmeister
Joh. Gutenberg-Universität, FB Mathematik
Mainz

Über die Verteilung der pythagoräischen Dreiecke (gemeinsam mit J. DUTTLINGER)

Ein Dreieck $\langle a,b,c\rangle$ heißt pythagoräisch (bzw. primitiv), wenn $a \le b$ und $a^2+b^2=c^2$ (bzw. $\mathrm{ggT}(a,b,c)=1$) gilt. Nach LAMBEK und MOSER gilt für die Anzahl $P(N)$ der primitiven pythag. Dreiecke der Fläche $\frac{1}{2}ab < N$ die asympt. Formel

$$P(N) = c\cdot N^{1/2} + O(N^{1/3}), \quad c = \pi^{-2}\cdot\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\cdot(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \approx 0.53.$$

Numerische Rechnungen von MIKSA suggerieren eine asympt. Entwicklung

$$P(N) = c\cdot N^{1/2} + c' N^{1/3} + R(N), \quad c' \approx -0.295.$$

Im Vortrag wird gezeigt, daß dies zutrifft mit der Konstanten

$$c' = \zeta\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\zeta\left(\tfrac{4}{3}\right)\right)^{-1}\cdot\left(1+2^{-\frac{1}{3}}\right)\left(1+4^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1} \approx -0.29746$$

und einem Restglied $R(N) = o(N^{1/4})$.

Nach Reduktion des Problems auf die Bestimmung die Anzahl der Gitterpunkte in

$$\{(x,y);\ xy(y^2-x^2) < N,\ x<y\}$$

erfolgt der Beweis mit klassischen Hilfsmitteln der analytischen Zahlentheorie.

W. Schwarz (Frankfurt).

Über die Anzahl abelscher Gruppen

$A(x)$ sei die Anzahl der wesentlich verschiedenen abelschen Gruppen, deren Ordnung x nicht übersteigt, und $\Delta(x)$ das Restglied in der asymptotischen Entwicklung
$$A(x) = A_1 x + A_2 x^{1/2} + A_3 x^{1/3} + \Delta(x) \text{ mit } A_\mu := \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{\infty} \zeta\left(\frac{\nu}{\mu}\right).$$

Ist ϑ die untere Grenze aller Θ, für die $\Delta(x) \ll x^\Theta$ gilt, so zeigten Erdös und Szekeres, Kendall und Rankin, Richert, Schwarz, der Vortragende, Srinivasan
$$\vartheta \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{20}{69}, \frac{7}{27}, \frac{105}{407}.$$

Mit der van der Corput - Titchmarsh - Methode zur Abschätzung zweidimensionaler Exponentialsummen wird
$$\vartheta \leq \frac{10}{39} \text{ gezeigt}$$

P. G. Schmidt (Marburg)

Problems and results in number theory.

1. Let $a_1 < \dots < a_n$ be a set of n integers is it true that for $n > n_0(\varepsilon)$ there are at least $n^{2-\varepsilon}$ distinct integers of the form $a_i + a_j$; $a_i a_j$ — $1 \leq i < j \leq n$. I offer 300 marks for a proof or disproof 100 marks for $n^{1+\varepsilon}$.

2. Define t_n as the smallest integer for which $t_n(t_n+1) \equiv 0 \pmod n$. Is it true that $t_n/n \to 0$ if one neglects a sequence of density 0 – or is it true that
$$\lim_{X=\infty} \left(\frac{1}{X} \sum_{n=1}^{X} \frac{t_n}{n} \right) = 0.$$

3. Let $a_1 < a_2 < \ldots$ be such that $\sum \frac{1}{a_i} = \infty$
Is it true that the sequence contains arbitrarily long arithmetic progressions? 7500 marks for a proof or disproof. Also define

$$A_k = \lim\sup \sum \frac{1}{a_i}$$

where the sup is taken over all sequences which do not contain a k term arithmetic sequence. Estimate A_k from above, and below as well as possible. For all we know $A_k = \infty$ but I hope $A_k < \infty$. $A_k \geq (1+o(1)) \frac{k \log 2}{2}$ is all I know.

P. Erdős

Zeros of Dirichlet polynomials

In 1857 Kronecker showed that if an algebraic integer α and all its conjugates lie in the closed unit disc, then α is a root of unity. As it stands, this result would appear not to extend to polynomials in several variables. However, Kronecker's theorem can be reformulated as follows: Let $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $P(0)=1$, $P(z) \neq 0$ for $|z|<1$. Then P is a product of cyclotomic polynomials; all roots of P are roots of unity. Put this way, the result generalizes naturally as

THEOREM 1. Let $P \in \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_n]$, $P(\underline{0})=1$, $P(\underline{z}) \neq 0$ for $\underline{z} \in U^n$, where $U^n = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^n : |z_i|<1 \text{ for all } i\}$. Then

$$P(\underline{z}) = \prod_{j=1}^{J} P_j(z_1^{a_{1j}} z_2^{a_{2j}} \cdots z_n^{a_{nj}}),$$

where the P_j are cyclotomic and the a_{ij} are non-negative integers.

My original proof of this was very complicated, but Atle Selberg and Bryan Birch have both found simpler proofs.

To achieve our main goal (Theorem 3), we require also the following

THEOREM 2. Let $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, $D(s) = P(e^{-\lambda_1 s}, \ldots, e^{-\lambda_n s})$, where $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ are positive ~~real~~ real numbers, linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then

$$\{D(s) : \operatorname{Re} s > 0\} = \{P(\underline{z}) : \underline{z} \in U^n\}.$$

This manner of writing a Dirichlet polynomial $D(s)$ has been shown to be natural by H. Bohr. Indeed, from Bohr's theorems we see that the set on the left above is

$$= \bigcup_{\sigma > 0} \{P(\underline{z}) : |z_i| = e^{-\lambda_i \sigma}\}.$$

That this latter set is identical to the set on the right follows by an analytic completion argument.

Using Theorems 1 and 2, we immediately have

THEOREM 3. Let $D(s) = 1 + \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}$, where $a_n \in \mathbb{Z}$, $\lambda_n > 0$. Then $D(s)$ has zeros in $\operatorname{Re} s \geq 0$. If $D(s) \neq 0$ for $\operatorname{Re} s > 0$ then

$$D(s) = \prod_{j=1}^{J} P_j(e^{-\mu_j s}),$$

where the P_j are cyclotomic, and $\mu_j > 0$.

Hugh L. Montgomery
University of Michigan
Ann Arbor, MI 48104
USA.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Perfect sets as spectra of additive functions and Bernoulli convolutions.

Let A be the spectrum of a bounded Bernoulli convolution on the real line. Let B be the spectrum of a bounded strongly additive real-valued ~~function~~ arithmetical function, that is, the (closed) set of "points of increase" of its distribution function. The problem of describing the structure of the sets A and B is easily seen to be equivalent to the following one:

PROBLEM. Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be an absolutely convergent series of real numbers. Describe the (closed) set

$$S = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \ : \ \varepsilon_n = 0 \text{ or } 1 \right\}.$$

The answer is as follows:

THEOREM 1. The set S is necessarily of one of the following four types, all of which occur:

type 1 : a finite set
type 2 : a union of a finite number of intervals.
type 3 : a perfect set of empty interior

type 4 : <u>a regular closed set</u> (<u>that is</u>, S <u>is the closure of its own interior</u>) <u>for which</u>, <u>in addition</u>, <u>the boundary is perfect</u>.

This is a special case of

THEOREM 2. <u>Let</u> $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ <u>be finite sets of real numbers such that</u> $0 \in V_n$, <u>and</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{diam} V_n < \infty$.

<u>Let</u> $S = V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n : \ \varepsilon_n = 0 \text{ or } 1, \ a_n \in V_n \right\}$.

<u>Then</u> S <u>has the same structure as the four types of Theorem 1</u>.

While it is trivial to find necessary and sufficient conditions for S to belong to type 1 or type 2, it seems to be quite hard to find necessary and sufficient condition for the types 3 and 4. Examples of such sets S of type 4 have been provided by A. DOUADY, J.-P. KAHANE and myself. There are also comparable theorems for the circle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

BABAR SAFFARI
Université de Paris XI
91405 ORSAY
France.

On k-free values of polynomials

Twentyfive years ago first K.F. Roth, and then Roth and I, obtained the first non-trivial estimates of gaps between k-free numbers (consecutive). Specifically, our results were of the type

$$(1) \qquad \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n\ k\text{-free}}} 1 = \frac{h}{\zeta(k)}\left(1 + o(1)\right)$$

for $$h = x^{\frac{1}{2k} - \delta} \qquad (\delta = \delta(k) > 0).$$

Except for small values of k, this result appears still to be the best that is available. Recently NAIR, a student of mine, has extended our method to studying

$$(2) \qquad \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ P(n)\ k\text{-free}}} 1$$

with P a polynomial with integer coefficients. For $P(n) = n^2+1$ he has shown that an asymptotic formula of type (1) exists if

$$h = x^{\frac{2}{2k-1} + \varepsilon} \qquad (k \geq 2),$$

and in the case $k=2$ he is able to remove the ε and even to save an additional small power of $\log x$. For general P (satisfying certain natural necessary conditions), of degree g, the problem is much harder but it seems that he can now prove an asymptotic result with

$$h = x^{\frac{g}{2^{k+1}-g} + \varepsilon} \qquad \text{for } k \geq g+2.$$

In any case he has results which improve on some old estimates of Cugiani.

H. Halberstam

The University, Nottingham, U.K.

Über die Summe der Ziffern natürlicher Zahlen.

Ein Ergebnis von Kátai über die Summe der Ziffern von Primzahlen, welches dieser unter Annahme der Richtigkeit der Dichtehypothese für die Anzahl der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion erzielte, wird verschärft und verallgemeinert zu

Satz. Sei $g \in \mathbb{N}$, $g > 1$ und für $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{j=0}^{\ell(n)} a_j(n)\, g^j$ sei $\alpha(n) = \sum_{j=0}^{\ell(n)} a_j(n)$. Dann gilt für $\mathbb{B} \subset \mathbb{N}$,

$B(x) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \in \mathbb{B}}} 1$, $\log B(x) \sim \log x$ die asymptotische Formel

$$\sum_{n \le x} \alpha(n) = \frac{g-1}{2} \frac{\log x}{\log g} B(x) \left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log x + \log \frac{x}{B(x)}}{\log x} \right)^{1/2} \right) \right).$$

Der Beweis ~~bet~~ beruht auf Bernsteins Verschärfung der Tschebyscheffschen Ungleichung.

E. Heppner (Frankfurt)

I n h a l t s v e r z e i c h n i s für Buch Nr. 31