Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Universelle Algebra

24. bis 30. Juli 1966

An der Tagung über "Universelle Algebra" vom 24. bis 30. Juli 1966 unter Leitung von E. Marczewski, Wrocław und J. Schmidt, Bonn, nahmen 36 Mathematiker aus neun Ländern teil. Es wurden 23 Vorträge aus dem Gebiet der Universellen Algebra und den angrenzenden Gebieten der Modelltheorie, Kategorientheorie und Mengenlehre gehalten. Es dürfte dies die erste Tagung auf deutschem Boden über dieses junge Gebiet gewesen sein und eine der ersten Tagungen überhaupt (die im September 1964 in Warschau abgehaltene Tagung war wohl die erste). Es handelt sich hier um ein Grenzgebiet zwischen Algebra und Mengenlehre, mit starken Wechselbeziehungen zur Metamathematik, das erst seit etwa zehn Jahren Gegenstand intensiverer schwerpunktmäßiger Forschung ist, so in der Bundesrepublik in Bonn/Köln und Freiburg (entsprechend zahlreich auf der Tagung vertreten). Dankbar verzeichnet Ref. die von E. Marczewski und seiner Schule empfangenen Anregungen. Leider war E. Marczewski durch Krankheit am Erscheinen verhindert. Die Moskauer Schule von A.G. Kurosh war zwar mit Kurosh selbst (von dem 1962 das erste - noch etwas vorläufige - Buch über Allgemeine Algebra erschien) eingeladen, aber leider nicht vertreten. Die Schule von P. Hall und B.H. Neumann war durch drei Neumanns (Vater und zwei Söhne) sowie einen Schüler von P. Cohn vertreten. Letzterer hat mit seinem 1965 erschienenen Buch bereits so etwas wie einen Standardtext über Allgemeine Algebra geschaffen. Vertreten war ferner Berkeley durch A.L. Foster. Von jüngeren auswärtigen Forschern auf dem Gebiet der Universellen Algebra waren Nöbauer, Wien, und Grätzer, Pennsylvania (jetzt Winnipeg), anwesend. Leider konnte der frühere Freund und Mitarbeiter von G. Grätzer, E.T. Schmidt, Budapest, infolge Paßschwierigkeiten nicht kommen. Von G. Grätzer, der gerade ein Buch über Allgemeine Algebra schreibt, gingen auf der Tagung besonders lebhafte Anregungen aus. Leider hatten wegen der Häufung internationaler Tagungen zu jener Jahreszeit viele andere prominente Vertreter dieser Arbeitsrichtung abgesagt, so daß als ein Charakteri-

stikum dieser Tagung das Debut mit oder ohne Vortrag vieler junger Mathematiker aus der Bundesrepublik Deutschland anzusehen ist. Besonders die jungen Mathematiker dürften fruchtbare Eindrücke und Anregungen von der Tagung mitgenommen haben.

Teilnehmer

Armbrust, M., Köln
Bammert, J., Freiburg
Behrens, E.-A., Frankfurt
Bruns, G., Hamilton, Canada
Burmeister, P., Bonn
Diener, K.H., Köln
Felscher, W., Freiburg
Foster, A.L., Berkeley
Grätzer, G., Pennsylvania
Harzheim, E., Köln
Herrmann, Ch., Bonn
Hirschelmann, A., Bonn
Hoehnke, H.J., Berlin
Höft, H., Bonn
Hotzel, Frankfurt
Kaiser, K., Bonn
Karp, C., Maryland
Kerkhoff, R., Freiburg
Koppelberg, B., Köln
Lawvere, F.W., Zürich
Nelson, E., Hamilton, Canada
Neumann, B.H., Canberra
Neumann, P.M., Oxford
Neumann, W., Bonn
Nöbauer, W., Wien
Novotny, M., Brno
Ossa, E., Bonn
Richter, M., Freiburg
Schmidt, J., Bonn
Schmidt, N., Bonn
Słowikowski, W., Warszawa
Stevens, M.L., London
Suter, D., Bonn
Wette, E., Uckerath
Wille, R., Frankfurt
Wimmer, S., Bonn

Vortragsauszüge

FOSTER, A.L.: Recent results in the structure theory of various families of universal algebras

The lecture reviews recent and current work of the author and some of his students in the structure theory of various broad families of universal algebras, extending classical Boolean theory in several levels.

I) If $\mathfrak{P}$ is any primal (i.e. functionally complete) algebra then any algebra in the equational class of $\mathfrak{P}$ is isomorphic to a subdirect

power of $\mathfrak{P}$.

II) If $\tilde{\mathfrak{P}}$ is any primal cluster (i.e. a set of primal algebras s.t. each finite subset is (functionally) independent) and if $\mathfrak{B}$ satisfies all identities of some finite subset $\mathfrak{C}$ of $\tilde{\mathfrak{P}}$, then $\mathfrak{B}$ is isomorphic to a subdirect product of subdirect powers of the elements of $\mathfrak{C}$.
This representation is unique, if $\mathfrak{C}$ is minimal for the above property.

III) In I) and II) one even may assume the algebras to be primal in-the-small.

IV) More generally II) holds for unique-factorization-complexes.
In the finite case the subdirect business is direct.

STEVENS, M.L.: Varieties generates by primal algebras

The lecture gives improvements of work of A.L. Foster concerning primal algebras and primal clusters. If A is any algebra, $S_r = \{1,-,r\}$ and $\mathfrak{p}$ is any partition of S_r then define

$$\Delta_p = \{(a_1,\ldots,a_r) \in A^r \mid i \sim_p j \Rightarrow a_i = a_j\}.$$

Then if A is finite, A is primal iff every finite subalgebra of a direct power of A is superdiagonal (i.e. it is Δ_p for some p). Also if Φ: $A^r \to B$ is onto and ker Φ is superdiagonal, then $A^s \cong B$ $(s \leq r)$.
This can be used to prove that if A is primal then every finite member of the variety generated by A is isomorphic to a direct power of A.
Also a class $\mathfrak{A}$ of algebras is a primal cluster if and only if every finite $SP\mathfrak{A}$-algebra is superdiagonal.

Further if A satisfies (1) every proper SP{A}-algebra is redundant and (2) the centraliser of the algebraic operations on A may be generated by unary operations alone then every kernel of a homomorphism from A^r into B is superdiagonal and every finite member of the variety generated by A is isomorphic to a direct power of A. It might be possible to extend this to classes of algebras as in the primal case.

NEUMANN, P.M.: Decision procedures for varieties of groups

A description of some works by H. Heineken, giving algorithms of tested practical use for answering problems such as:

1) Are there finite non-nilpotent groups in the variety defined by
   $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$?
2) Are there finite non-soluble groups satisfying the law
   $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$?

In both cases the procedures depend on the fact that the minimal non-nilpotent (non-soluble) groups form on algebraic family of matrix groups. The main problem here seems to be to decide whether this a genuine piece of group-theory, that is to say whether one really does not need to know in detail what the minimal non-nilpotent (non-soluble) groups are, ore whether the existence of an algorithm for such questions follows in more general cases.

SCHMIDT, J.: Completion of partial algebras

The concept of Peano-algebra is extented to the partial case. The full Peano algebras are precisely the absolutely free (full) algebras. The proof is an example of internal characterization (axiomatisation) of universal solutions: one uses existence and the property of universality guarenteed by the Recursion theorem. An application of absolutely free algebras is the natural indication of algebraic functions on arbitrary algebras. As an analogue to Stone-Čech-compactification the existence of the free (universal) completion $\hat{A}$ of a (partial) algebra A is shown and an axiomatization is given, The full Peano algebras are precisely the free completions of discrete algebras (that is an analogue to Stone's ultrafilter space on an abstract set). The (partial) Peano algebras are precisely the relative algebras of full Peano algebras. A description of all respectively all "normal" completions of a partial algebra A is given by the corresponding congruence relations on A; the minimal or normal minimal completions constitute a conditionally complete semilattice or a complete lattice respectively.

KERKHOFF, R.: Konformismen und partielle Algebren

Sind $A = (c(A), (f_i)_{i \in I})$ und $B = (c(B), (g_i)_{i \in I})$ partielle Algebren des Typs $\Delta = (K_i)_{i \in I}$, und ist X eine Erzeugende von A, dann heißt eine Abbildung t aus $c(A)$ in $c(B)$ ein X-Konformismus, wenn

(1) $X \subset \text{def}(t)$;

(2) für alle $i \in I$, für alle $\mathfrak{r} \in c(A)^{K_i}$: ist im $(\mathfrak{r}) \subseteq \text{def}(t)$; und $t \cdot \mathfrak{r} \in \text{def}(g_i)$, so $\mathfrak{r} \in \text{def}(f_i)$ und $f_i(\mathfrak{r}) \in \text{def}(t)$ und $t(f_i(\mathfrak{r})) = g_i(t.\mathfrak{r})$;

(3) t ist minimal für (1) und (2).

Konformismen haben zahlreiche Eigenschaften, die die Homomorphismen voller Algebren erfüllen.

Ist P volle Peano-Algebra über X, so besitzt jede Abbildung von X in c(A) genau eine X-konforme Fortsetzung t aus P in A. Eine Klasse $\mathfrak{A}$ von Algebren ist gleichungs-definiert genau dann, wenn:

(1) Über jeder Menge Y existiert eine für $\mathfrak{A}$ Y-konform-freie Algebra in $\mathfrak{A}$;

(2) in $\mathfrak{A}$ existiert mindestens eine volle Algebra;

(3) $\mathfrak{A}$ ist abgeschlossen gegenüber konformen Bildern.

NÖBAUER, W.: Funktionenalgebren

$\mathfrak{S} = \langle S, w_1, w_2, \ldots \rangle$ sei eine Algebra. Die Menge aller Funktionen von S^n in S mit punktweiser Ausführung der Operationen w_i und der Funktionenkomposition φ als weiterer (n+1-stelliger) Operation wird als n-stellige Funktionenalgebra $\mathfrak{F}_n(\mathfrak{S})$ bezeichnet. φ erfüllt das Gesetz der Superassoziativität (1) und der Rechtsdistributivität (2):

(1) $\varphi(\varphi(f, g_1, \ldots, g_n), h_1, \ldots, h_n) = \varphi(f, \varphi(g_1, h_1, \ldots, h_n), \ldots, \varphi(g_n, h_1, \ldots, h_n))$;

(2) $\varphi(w_i(f_1, \ldots, f_n), h_1, \ldots, h_n) = w_i(\varphi(f_1, h_1, \ldots, h_n), \ldots, \varphi(f_n, h_1, \ldots, h_n))$.

A. Die Algebra $\langle F, \varphi, w_1, w_2, \ldots \rangle$ ist isomorph zu einer Teilalgebra der n-stelligen Funktionenalgebra $\mathfrak{F}_n(\mathfrak{S})$ mit einem geeigneten $\mathfrak{S}$ aus der von $\langle F, w_1, w_2, \ldots \rangle$ erzeugten primitiven Klasse.

B. Algebraische Eigenschaften:

1) Der Kongruenzverband ist für $n > 1$ stets einfach, für $n = 1$ nicht notwendig einfach (Malcev).

2) Die Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}_n(\mathfrak{S})$ ist für jedes n isomorph zur Automorphismengruppe von $\mathfrak{S}$.

3) Die minimale Erzeugende von $\mathfrak{F}_n(\mathfrak{S})$ ist n-elementig außer für $n = 1$ bzw. $n = 2$ und $|\mathfrak{S}| = 2$, hier aber stets höchstens 3-elementig.

4) Die von den Projektionen und den konstanten Funktionen erzeugte Teilalgebra $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{F}_n(\mathfrak{S})$ heißt Algebra der Polynomfunktionen. Dabei ergibt sich das natürliche Problem: Wann gilt $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{S}) = \mathfrak{F}_n(\mathfrak{S})$, d.h. wann ist $\mathfrak{S}$ funktional vollständig?

GRÄTZER, G.: <u>On the spectrum of equational classes of algebras</u>

The spectrum $Sp(\mathfrak{K})$ of a class $\mathfrak{K}$ of algebras is the set of orders of the finite algebras in $\mathfrak{K}$.

1) $S \subset N$ is the spectrum of an equational class $\mathfrak{K}$ of finite type iff $1 \in S$ and $S \cdot S \subset S$.
   The theorem does not hold if one demands that $\mathfrak{K}$ is defined by a finite set of equations.
2) If $\mathfrak{K}$ is an equational class defined by a finite set of identities, then there exists an equational class $\mathfrak{K}_1$ defined by four identities such that $Sp(\mathfrak{K}) = Sp(\mathfrak{K}_1)$. The number four is caused by the method of proof.
3) If S is any set of positive integers then there exists a universal class $\mathfrak{K}$ such that $Sp(\mathfrak{K}) = S$.

NOVOTNY, M.: <u>Algebraische Strukturen in der mathematischen Linguistik</u>

Jeder Äquivalenzrelation α auf einem Relationensystem wird die Äquivalenzrelation α' zugeordnet, die folgende Eigenschaften besitzt:

(1) $\alpha \subset \alpha'$, $\alpha'' = \alpha'$; (2) $\mu' \subset \alpha' \Rightarrow (\mu' \vee \alpha)' = \alpha'$;
(3) $id'_A\ \alpha = \alpha\ id'_A \Rightarrow id'_A \subset \alpha'$.

Sprachen können als Relationssysteme interpretiert werden; die Klassen von Zerlegungen, welche Äquivalenzrelationen entsprechen, sind grammatische Kategorien. Die Klassen von $(id' \vee \alpha)'$ entsprechen für ein geeignetes α "großen" grammatischen Kategorien, z.B. den Substantiven einer natürlichen Sprache. Andererseits kann man Sprachen als freie Halbgruppen mit Einselement und einer einstelligen Relation, allgemeine Grammatiken als freie Halbgruppen mit einem Einselement, [illegible] d. Erzeugende von $S_n(\mathfrak{S})$ ist [illegible]elementig außer f[illegible] $r = 1$ bzw. [illegible] $= 2$ und $|\mathfrak{S}| = 2$, hier aber stets [illegible] [illegible]

[illegible] und der [illegible] erzeugten Funktionen [illegible] Teilalgebra $S_n(\mathfrak{S})$ von $S_n(\mathfrak{S})$ heißt Algebra der [illegible] Funktionen. Dabei ergibt sich das natürliche Problem: Wann [illegible] $= S_n(\mathfrak{S})$, d.h. wann [illegible] funktional vollständig?

[illegible], G.: On the spectrum of equational classes of algebras

The spectrum Sp(K) of a class K of algebras is the set of orders of the finite algebras in K.

1) [illegible] is the spectrum of an equational class of finite type iff 1 ∈ S and [illegible].

The theorem does not hold if one demands that [illegible] defined by finite set of equations.

2) If [illegible] is an equational class defined by a finite set of identities, then there exists an equational class K_1 defined by four identities such that Sp( ) = Sp(K_1). The number four is caused by the method of proof.

3) If S is any set of positive integers then there exists a universal class such that Sp( ) = S.

[illegible], M.: Algebraische Strukturen in der mathematischen Linguistik

[illegible] der Äquivalenzrelation [illegible] auf einem Relationssystem wird die äquivalenzrelation [illegible]' zugeordnet, die folgende Eigenschaften besitzt:

(1) $\alpha \subseteq \alpha'$, $\alpha'' = \alpha'$; (2) $\alpha' \subseteq \alpha'' \Rightarrow (\alpha' \vee \alpha)' = \alpha'$;

(3) id'_A [illegible] $= id'_A \Rightarrow id'_A \subseteq \alpha'$.

Sprachen können als Relationssysteme interpretiert werden; die Klassen von Zeichenfolgen, welche Äquivalenzrelationen entsprechen, sind grammatische [illegible]. Die Klassen von $(id' \vee \alpha)'$ entsprechen für [illegible] grammatischen Kategorien, z.B. der Substantive einer natürlichen Sprache. Andererseits kann man Sprachen als freie Halbgruppen [illegible] Einselement und [illegible] allgemeine Grammatik [illegible] Halbgruppe mit einem Einselement [illegible] einer einstelligen Ralation ("richtige Sätze") und einer zweistelligen Relation (Ableitungsregeln) definieren. Es wird ein kanonisches Verfahren angegeben, das jeder Sprache eine allgemeine Grammatik (Konfigurations-Grammatik) zuordnet, die diese Sprache erzeugt. Es wird ein Homomorphiebegriff für Sprache bzw. Grammatiken eingeführt und gezeigt, daß die Homomorphismen von Sprachen genau die Homomorphismen der zugehörigen Konfigurationsgrammatiken sind. Insbesondere werden die sog. endlich charakterisierbaren Sprachen untersucht.

NELSON, E.: Finiteness of semigroups of operators in universal algebra

Between the operators H, S, P, P_S, P_P, P_F, C (homomorphic images, subalgebras, products, subdirect products, prime products, filter products and covers) on classes of algebras a multiplication and a partial order can be defined. The sets $\{H, S, P, P_S\}$, $\{C, H, S, P, P_F\}$ and $\{C, H, S, P_P, P_F\}$ generate finite positively ordered semigroups. Especially the order relations between the elements of the semigroup generated by $\{H, S, P, P_S\}$ are considered.

SŁOWIKOWSKI, W.: Distribution-like extensions of groups with operators

Take the category of map-system $\mathfrak{A} = (S,X)$. Call $\mathfrak{A}$ right solvable iff there exists a family of commutative endomorphisms of X that provide right inverses for elements of S.

It has been proved that one can extend under some additional conditions a map-system $\mathfrak{A}$ to a regular one, $\bar{\mathfrak{A}} = (S,\bar{X})$. Produce a new regular map system $(\mathfrak{R}(S), \bar{X})$, where $\mathfrak{R}(S)$ is the ring generated by S. In several concrete cases one can prove that $(\mathfrak{R}(S), \bar{X})$ is right solvable. Nothing is known about $(\mathfrak{R}(S), \bar{X})$ being right solvable when we know, that (S,X) is right solvable.

NEUMANN, B.H.: Characteristic morphisms

The notions of characteristic, strictly characteristic, S-characteristic, fully invariant, hypercharacteristic, ultracharacteristic, hyperinvariant subgroups of a group can easily be generalized to the corresponding congruences in a general algebra and the various interrelations between

these notions can be proved as in the case of groups. If one wants to generalize them further to characteristic,.. hyperinvariant morphisms in a category, one finds oneself with two possibilities, one "weak", one "strong", according to which of two possible translations one chooses for the relation "$\leq$" between normal subgroups of a group. Some of the interrelations can be proved for both weak and strong notions, others only for the strong notion. The dual notions and results can be interpreted in the category of groups and their homomorphisms, but they turn out to be not very exciting.

LAWVERE, F.W.: Algebraic theories and algebraic categories

An algebraic theory T is a category whose objects are the natural numbers and in which each object n is coproduct of 1 with itself n-times. By a n-ary operation is understood any map $1 \to n$, by a T-algebra any set X together with a composition $\circ$.
$n \xrightarrow{\alpha \circ \varphi} X$ for $n \xrightarrow{\varphi} m$, $m \xrightarrow{\alpha} X$ s.t. $(\alpha \circ \varphi) \circ \psi = \alpha \circ (\varphi \circ \psi)$ for any $1 \xrightarrow{\varphi} n$ and $\alpha \circ \varphi = \alpha\varphi$ if φ belongs to the category S_o of finite sets. A functor $X : T \xrightarrow{op} S$ from the category opposite to T in the category of sets is called algebraic if preserving products. The algebraic category $S^{(T)}$ of algebraic functors is a full subcategory of $S^{T^{op}}$. By a free algebra is meant a functor $F : S \to S^{(T)}$ adjoint to the "unterlying functor" $ev_1 : S^{(T)} \to S$. Let T be the category of finitely generated free algebras, T_{alg} the category of algebraic theories. Then the F-algebra X defines by $T' \to T \xrightarrow{X} S$ a full and faithfull functor, called semantics, from T_{alg}^{op} in the category of categories over sets. There exists an adjoint of semantics that is called structure.

BRUNS, G.: Categorical characterization of the MacNeille completion

Using Grothendieck's notion of a strict monomorphism it is shown that the MacNeille completion of a partial ordered set P can be characterized by

1) the smallest injective extension of P
2) the largest essential extension of P
3) the only essential, injective extension of P.

These notions [illegible] proved as in the [illegible] group. If [illegible] generalize [illegible] further to characteristic [illegible] hyperinvariant [illegible] in a category, [illegible] possibilities, [illegible] "strong", [illegible] which of the possible translations [illegible] for the [illegible] between normal subgroups of a group. Some of the [illegible] proved for both [illegible] notions, others only for the [illegible]. The dual notions and results can be interpreted in the [illegible] of groups [illegible] epimorphisms, but they turn out to be [illegible] exciting.

LAWVERE, F. W.: Algebraic theories and algebraic categories

[illegible] algebraic theory [illegible] is a category whose objects are the natural numbers and in which each object is the product of 1 with itself [illegible]. By an n-ary operation [illegible], by a T-algebra any set X together with a composition

$X^n \longrightarrow X$ for [illegible]

any 1 [illegible] for [illegible]. [illegible] belongs to the category S_0 of finite [illegible].

A functor $X: T \longrightarrow S$ from the category opposite to T in the category [illegible] is called algebraic if preserving products. The algebraic category $S^{(T)}$ of algebraic functors is a full subcategory of [illegible]. There is a free algebra [illegible] functor [illegible] $S^{(T)}$ adjoint to the [illegible] $S^{(T)} \longrightarrow S$.

Let T be the category of finitely generated free algebras. [illegible] category of algebraic [illegible]. Then the T-algebra X [illegible] full and faithful functor, called semantics, from [illegible] category of categories [illegible]. There exists [illegible] adjoint of semantics that is called structure.

BRUNS, G.: Categorical characterization of the MacNeille completion

Using Grothendieck's [illegible] strict monomorphism it is shown that the MacNeille completion of a partial ordered set P can be characterized [illegible]

[illegible] the smallest injective [illegible] of P

[illegible] the largest [illegible] extension of P

[illegible] the only [illegible] extension of P.

The same result is true in the category of all Boolean lattices and Boolean homomorphisms. In the category of all distributive lattices and lattice homomorphisms the above properties characterize the MacNeille completion of the Boolean lattice generated by P. In the category of all lattices and lattice homomorphisms every non-trivial object has an arbitrary large essential extension and hence there are no non-trivial injectives.

KARP, C.: Undecidability results for Boolean algebras with infinitary operations

Methods are being developed for treating questions of decidability in K steps, K an infinite cardinal. Let H_K be the set of all sets hereditarily of power at most K. The notion of Σ_1^K - subset of H_K corresponds to the notion of recursively enumerable subset of natural numbers when H_K is replaced by the hereditarily finite sets. A subset of H_K is Π_1^K iff its complement is Σ_1^K. A predicate on H_K decidable in K steps is always $\Pi_1^K \cap \Sigma_1^K$. The converse depends on the unterlying set theory.

Consider Boolean algebraic equations admitting the K-place sum and product operations and let Φ_K be the set of such equations that hold in the two-element Boolean algebra. Then Φ_K is trivially Π_1^K.

THEOREM: If $K^{\aleph_0} = K$, then Φ_K is not Σ_1^K. Assuming the generalized continuum hypothesis, Φ_K is Σ_1^K iff $K^{\aleph_0} > K$. It is well-known that Φ_K holds in a K-complete Boolean algebra iff the algebra is representable as a K-homomorphic image of a K-complete field of sets. Further, it can be shown that if Ψ is a Σ_1^K - subset of Φ_K and $\Lambda \geq K$, then there is a Λ-complete Boolean algebra in which Ψ holds but E fails.

COROLLARY: If Ψ is a Σ_1^K-subset of Φ_K and $\Lambda \geq K$, then there is a Λ-complete Boolean algebra $\mathfrak{B}$ in which Ψ holds, but $\mathfrak{B}$ is not representable as a K-homomorphic image of a K-field of sets.

COROLLARY: In every $\Lambda \geq 2^{\aleph_0}$ there is a Λ-complete, $\aleph_0$-distributive Boolean algebra which is not representable as a $2^{\aleph_0}$-homomorphic image of a $2^{\aleph_0}$-field of sets. Compare with Smith (Annals of Mathematics, 1956) who gives such an example that is complete, assume that the Suslin hypothesis is false.

The same result holds in the category of all Boolean [illegible] Rather [illegible] in the category of all distributive lattices [illegible] above properties [illegible] completion of the Boolean lattice generated by T. [illegible] the category of all lattices and lattice homomorphisms [illegible] every non-trivial object has an arbitrarily large essential extension and hence there are no non-trivial injectives.

KARP, C.: Undecidability results for Boolean algebras with infinitary operations

Methods are being developed for treating questions of decidability [illegible] steps; K an infinite cardinal. Let H_K be the set of all sets hereditarily of power at most K. The notion of Σ_1^K - subset of H_K corresponds to the notion of recursively enumerable subset of natural numbers when [illegible] is replaced by the hereditarily finite sets. A subset of H_K is Π_1^K iff its complement is Σ_1^K. A predicate on H_K decidable in K steps is always Δ_1^K [illegible]. The converse depends on the underlying set theory.

Consider Boolean algebraic equations admitting the K-place sum and product operations and let $\mathcal{E}_K$ be the set of such equations that hold in the two-element Boolean algebra. Then $\mathcal{E}_K$ is trivially Π_1^K.

THEOREM: If $K^{\omega} = K$, then $\mathcal{E}_K$ is not Σ_1^K. Assuming the generalized continuum hypothesis, $\mathcal{E}_K$ is Σ_1^K iff $K^{\omega} > K$. It is well-known that $\mathcal{E}_K$ holds in a K-complete Boolean algebra iff the algebra is representable as a K-homomorphic image of a K-complete field of sets. Further, it can be shown that if [illegible] is a Σ_1^K - subset of $\mathcal{E}_K$ and [illegible] $\geq$ K, then there is a [illegible]-complete Boolean algebra in which [illegible] holds but [illegible] fails.

COROLLARY: If [illegible] is a Σ_1^K-subset of $\mathcal{E}_K$ and [illegible] $\geq$ [illegible], then there is a λ-complete Boolean algebra in which [illegible] holds, but [illegible] is not representable as a K-homomorphic image of a K-field of sets.

COROLLARY: In every $\lambda \geq 2^{\omega}$ there is a λ-complete, [illegible]-distributive Boolean algebra which is not representable as a 2^{ω}-homomorphic image of a 2^{ω}-field of sets. (Compare with Smith (Annals of Mathematics, 1956) who gives such an example that is complete, [illegible] that the Smith hypothesis is [illegible].)

HÖFT, H.: Eine algebraische Darstellung der Prädikatenlogik erster Stufe

Es wird die Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe mit Funktorenvariablen und Gleichheit als eine Peano-Algebra dargestellt. Die Diskussion von Teilalgebren dieser Peano-Algebra (PK_1 ohne Funktoren-, oder Relationenvariablen) führt in kanonischer Weise zu den Algebren der algebraischen Operationen und Relationen einer Algebra. Somit erhält man eine natürliche Indizierung von Funktions- und Relationstermen. Eine weitere Anwendung ist die Definition der Gültigkeit von Ausdrücken der Sprache in Algebren mit Relationen durch einen Homomorphismus.

KAISER, K.: Abgeschlossene Algebren

Sei K eine konsistente Satzmenge einer Prädikatenlogik erster Stufe. Gibt es induktive und relativ zu K modellkonsistente Satzmengen, dann gibt es unter diesen eine größte $\bar{K}$. $\bar{K}$ hieße die induktive Hülle von K. Die Algebren der induktiven Hülle = Md$\bar{K}$ (K ist ein Axiomensystem der partiellen Algebren vom Typus $\Delta = (n_t)_{t \in T}$) wurden beschrieben. Diese "abgeschlossenen" Algebren sind vollständig, unendlich, und alle nicht nullstelligen Operationen sind immer surjektiv. In Analogie zur Körpertheorie wurde gezeigt, daß das Axiomensystem $\bar{K}$ eine Modellkomplettierung von K_V (Axiomensystem aller vollen Algebren) ist. Entsprechend ist $\bar{K}_R$ (Axiomensystem der abgeschlossenen Algebren der Charakteristik R) vollständig. Zu jeder endlichen Charakteristik gibt es bis auf Isomorphie genau eine abzählbare, lokal endliche abgeschlossene Erweiterung.

FELSCHER, W.: Rational equivalences of classes of algebras

Consider two classes of algebras $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ of type $\Delta^1 = <n_i \mid i \in I>$, $\Delta^2 = <m_k \mid k \in K>$ resp., where $I \cap K = \emptyset$, n_i, m_k arbitrary ordinals. Assume there exists an equivalence Φ between $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ i.e. a bijection from $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{C}$ such that corresponding algebras have the same carrier. Let $\mathfrak{A}$ be the class of mixed type $\Delta = <p_j \mid j \in J = I \cup K>$ that consists of all algebras $< c(B), <f_i^B \mid i \in I> \wedge <g_k^{\Phi(B)} \mid j \in K>>$ where $B = <c(B), f_i^B \mid i \in I>> \in \mathfrak{B}$, $<c(B), < g_k^{\Phi(B)} \mid k \in K>> = \Phi(B)$. Let

H[illegible]PT, H.: [illegible] algebraische Darstellung der Prädikatenlogik erster Stufe

Es wird die Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe mit Funktionenvariablen und Gleichheit als eine [illegible]ano-Algebra dargestellt. Die Diskussion von Tarskis [illegible] dieser [illegible]-Algebra ($\mathfrak{F}_I$ [illegible] Funktoren- oder Relationsvariablen) führt zu kanonischer [illegible] zu den Algebren der algebraischen Operationen und Relationen [illegible] Algebra. Somit erhält man eine natürliche Indizierung von Fu[illegible] und Relationsformen. Eine weitere Anwendung ist die Definition [illegible] von Ausdrücken [illegible] Algebren mit Relationen durch [illegible] morphismus.

[illegible], H.: Die [illegible]schlossene Algebren

Sei K eine [illegible] Satzmenge, [illegible] Prädikatenlogik erster Stufe. Gibt [illegible] induktive und relativ zu K modelltheoretisch [illegible] Satzmengen, dann gibt es unter diesen eine größte $\tilde{K}$. $\tilde{K}$ heißt die induktive Hülle von K. Die Algebren der induktiven Hülle $= M(\tilde{K})$ (K ist ein Axiomensystem der [illegible] Algebren vom Typus $\alpha = (n_i)_{i \in I}$) wurden beschrieben. Die [illegible]schlossenen Algebren sind vollständig, unendlich, und alle nicht [illegible] Operationen sind immer surjektiv. In Analogie zur Körpertheorie wurde gezeigt, daß das Axiomensystem $\tilde{K}$ [illegible] Modell-komplett [illegible] von K_V (Axiomensystem aller vollen [illegible]) ist. [illegible] entsprechend ist $\tilde{K}$ [illegible] Axiomensystem der abgeschlossenen Algebren [illegible] (statt [illegible]) vollständig. Zu jeder [illegible] Oberkörper gibt es bis auf Isomorphie genau eine abzählbare, [illegible] schlossene Erweiterung.

[illegible]SCHERS, W.: Rational equivalence of classes of algebras

Consider two classes of algebras $\mathfrak{A}$, [illegible] of type [illegible] $= \langle m_i \mid i \in I \rangle$, $\Delta^B = \langle m_k \mid k \in K \rangle$ resp., where [illegible] $= \emptyset$, [illegible] arbitrary ordinals. Assume that there exists an equivalence between [illegible], i.e. a bijection from [illegible] onto [illegible] such that corresponding algebras [illegible] the same carrier. [illegible] be the class of mixed type [illegible] $= \langle p_i \mid i$ [illegible] that consists of algebras $\langle c(B), \langle f_i^B \mid i \in I \rangle$ [illegible] $^{(B)}$ [illegible]

[illegible] $= c(B), f_i^B \mid i \in I$ [illegible] $c(B)$, [illegible] $^{(B)}$ $\mid k \in K$ [illegible] (B) [illegible]

$P = \langle c(P), \langle h_j \mid j \in J \rangle\rangle$ be an absolutely free algebra of type Δ generated by a set X of cardinality rank (Δ), P^1, P^2 the subalgebras generated by X in the I- (resp. K-) reduct of P. Suppose there is chosen an injection $ß_n : n \to X$ for any ordinal n such that $\mathrm{card}(n) \leq \mathrm{card}(X)$. Then Φ is called rational iff there exist sequences $\langle s_k \mid k \in K\rangle$ in $c(P^1)$ and $\langle t_i \mid i \in I\rangle$ in $c(P^2)$ such that the equations $\langle h_k(ß_{P_k}), s_k\rangle$, $\langle t_i, h_i(ß_{P_i})\rangle$ $(i \in I,\ k \in K)$ hold in all algebras of $\mathfrak{A}$. It is to be shown that Φ may be extended to the strict equational closure of $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ resp.

Let A be an algebra of type Δ, $H(A,X)$ the algebra of algebraic operations of type X and, for $Y \subseteq X$, $H(A,X;Y)$ the image under the obvious monomorphism $r^X_Y : H(A,Y) \to H(A,X)$.

(In case $X = 0$ resp. $Y = 0$ definition has to be done in a convenient way.) Suppose $\mathrm{card}(X) = \mathrm{rank}(\Delta)$. Then for $d \in c(H(A,X))$ the set $\mathrm{supp}(d)$ consisting of all $Y \subseteq X$ s.t. $d \in c(H(A,X;Y)$ is a filter with base of bounded cardinality. If $\mathfrak{B}$ is a class of algebras s.t. for the sets of equations holds $Q(A) = Q(\mathfrak{B})$ we have an epimorphism P_B: $H(A,X) \to H(B,X)$.

Lemma: $\mathrm{Supp}(d) = \bigcap \langle \mathrm{supp}(P_B(d)) \mid B \in \mathfrak{B}\rangle$ for any $d \in c(H(A,X))$.

HOEHNKE, H.-J.: Strukturgleichheit axiomatischer Klassen

Der Begriff der rationalen Äquivalenz primitiver Klassen von Algebren ist im Anschluß an Malcev vielfach untersucht worden. Dieser Begriff versagt jedoch, wenn man ausdrücken will, daß z.B. Verbände und Halbordnungen mit inf und sup für je zwei Elemente dieselbe Struktur beschreiben. Man nennt allgemein zwei axiomatische Klassen K_{Γ_1} und K_{Γ_2} strukturgleich, wenn umkehrbare Korrespondenzen (im Sinne einer Substitution) zwischen Γ_1 und Γ_2 existieren. Es wurde gezeigt, daß zwei axiomatische Klassen genau dann strukturgleich sind, wenn die zugehörigen Zylinderalgebren $\mathfrak{Z}^1_\alpha / \equiv_{\Gamma_1}$ und $\mathfrak{Z}^2_\alpha / \equiv_{\Gamma_2}$ isomorph sind.

KOPPELBERG, B.: Eine Verallgemeinerung eines Einbettungssatzes von B.H. Neumann

Es wurde die Klasse C der Kardinalzahlen charakterisiert, für die ein

zum Einbettungssatz von B.H. Neumann entsprechendes Ergebnis gilt: α regulär und für jedes reguläre $\beta \geq \alpha$ gibt es in $P(\beta)$ einen α-vollständigen Ultrafilter, der die Mengen $\beta \sim \gamma$ für jedes $\gamma < \beta$ enthält. Aus diesen Ergebnissen läßt sich für $\alpha = \omega$ die Primidealhypothese ableiten.

BURMEISTER, P.: Über die Mächtigkeiten und Unabhängigkeitsklassen der Basen freier Algebren

$\mathfrak{A}$ sei eine primitive Klasse partieller Algebren vom Typus Δ, K die Klasse aller Kardinalzahlen. Mit A_m werde die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte, von einer Menge M der Mächtigkeit m $\mathfrak{A}$-frei erzeugte $\mathfrak{A}$-Algebra bezeichnet. Durch $(m, n) \in R_{\mathfrak{A}} :\Longleftrightarrow A_m \cong A_n$ wird in $K \times K$ eine Äquivalenzrelation $R_{\mathfrak{A}}$ definiert; diese ist stets totaladditiv. Es läßt sich nun zeigen, daß jede (und nur eine solche) Äquivalenzrelation R von K, für die eine Kardinalzahl $\mathfrak{s}$ existiert, so daß alle Restklassen oberhalb $\mathfrak{s}$ einelementig sind, sich als ein $R_{\mathfrak{A}}$ darstellen läßt. In einer solchen primitiven Klasse treten dann unter Umständen $\mathfrak{A}$-frei erzeugte $\mathfrak{A}$-Algebren mit $\mathfrak{A}$-Basen verschiedener Mächtigkeiten auf, die auch verschiedene Unabhängigkeitsklassen besitzen; außerdem erhält man Beispiele für $\mathfrak{A}$-Algebren, die einerseits $\mathfrak{A}$-frei erzeugt werden, andererseits Basen besitzen (im Sinne von Marczewski), die keine $\mathfrak{A}$-Basen sind.

HARZHEIM, E.: Kombinatorische Betrachtung über Algebren

Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ einer Menge M ist $|M|$-universell geordnete Menge. Unter Annahme der verallgemeinerten Kontinuumshypothese wird bewiesen:

Ist $|M|$ reguläre Kardinalzahl und $\mathfrak{P}(M)$ auf höchstens $|M|$-viele Klassen verteilt, so ist mindestens eine unter diesen auch noch $|M|$-universell geordnet. Dieses Ergebnis wird auf Algebren angewendet:

Sei (A, f) eine Algebra, f habe die Stellenmenge $\mathfrak{S}$, $|A| \geq \aleph_0$ und $|\mathfrak{S}| \geq |A|$. Dann gibt es zu jedem Ordnungstypus τ mit $|\tau| \leq |A|$ eine Menge $B \subset A^{\mathfrak{S}}$, über der f konstant ist. Dabei hat die Menge $m(B) = \{\text{Bild}(\sigma) \mid \sigma \in B\}$ den Ordnungstypus τ. Dieser Satz liefert eine Anwendung über Konstanzbereiche auf $\mathfrak{P}(M)$, wenn f eine Zermelosche Auswahlfunktion in M ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

WETTE, E.: Über eine formal-universelle Arithmetik

Es wird eine Einführung in den wörter-kalkulatorischen Angelpunkt der ersten normalen Sphäre $\mathfrak{S}_1$ über Grundzahlen gegeben. Intuitionistische Beweismittel werden mit rekursiven Definitionsmitteln, auch mit "relativen" und deduktiven Hypothesen, verflochten. Der finite Satz von der unbeschränkten schwachen "transfiniten Induktion" in $\mathfrak{S}_1$ wird angegeben. Die offizielle Notation des konstruktiv-arithmetischen Kalküls (ohne ω_o, tertium non datur, Imprädikativität) bleibt im Hintergrund. Eine transfinite Rechentechnik, die auf eine völlige Umdeutung der formalisierten Mengenlehre abzielt, wird eingeführt.

WILLE, R.: Über die Koordinatisierung allgemeiner Geometrien

Der Verband der Kongruenzklassen $\mathfrak{G}(A)$ einer Algebra (A, f) mit endlichstelligen Operationen ist isomorph zum Verband der Teilräume einer allgemeinen Geometrie (im Sinne von Maeda). Allerdings kann auf diese Art nicht jede allgemeine Geometrie koordinatisiert werden. Ist nämlich $\mathfrak{G}(A)$ modular (projektive Geometrie), so ist A einfach oder $\mathfrak{G}(A)$ distributiv. Ist $\mathfrak{G}(A)$ semimodular (Geometrie mit Austauschaxiom), kann man aus $\mathfrak{G}(A)$ die Kongruenzrelation zurückgewinnen. Für transitive Algebren mit semimodularen $\mathfrak{G}(A)$ führt das zu einer Verallgemeinerung des Zusammenhangs zwischen affinen und projektiven Geometrien bei Vektorräumen: $\mathfrak{G}(A)$ ist genau dann schwach modular (streng planare Geometrie), wenn der Verband der Kongruenzrelationen von A modular geometrisch ist (projektive Geometrie).

Prof. Dr. J. Schmidt