Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Topologie

31. August - 10. September 66

Die diesjährige Tagung über Topologie wurde von Prof. Dr. H. SCHUBERT (Kiel) geleitet (die Professoren A. DOLD, Heidelberg und D. PUPPE, Saarbrücken, waren Einladungen nach USA gefolgt).

Neu gegenüber den bisherigen Tagungen war, daß J. B. BOARDMAN (Coventry) gewonnen worden war, in einer Reihe von sechs Vorträgen über seine schönen Ergebnisse in der Theorie der Singulatitäten differenzierbarer Abbildungen zu berichten. Nach dem übereinstimmenden Wunsch aller Teilnehmer soll versucht werden, auch für die nächste Tagung einen Referenten zu finden, der über sein Arbeitsgebiet ausführlich in einer ganzen Reihe von Vorträgen berichtet.

Teilnehmer:

Bauer, F.W., Frankfurt
Baumann, R., Frankfurt
Boardman, J.M., Coventry
Bos, W., Heidelberg
Brinkmann, H.-B., Saarbrücken
Bröcker, Th., Heidelberg
Dennet, J.R., Hull
tom Dieck, T., Saarbrücken
End, W., Saarbrücken
Fritsch, R., Saarbrücken
Gamst, J., Kiel
Giambalvo, V., Heidelberg
Godbillon, C., Strasbourg
Gray, B., Manchester
Kamps, K.H., Losheim
Koch, W., Primstal
Madsen, I., Aarhus
Moss, R.M.F., Hull
Reiter, R., Bildstock/Saar
Roberts, R.S., Liverpool
Schubert, H., Kiel
Siebeneicher, Ch., Heidelberg
Stammbach, U., Zürich
Switzer, R.M., Manchester
Takens, F., Amsterdam
Thomeier, S., Aarhus
Vastersavendts, M.L., Asse
Voigt, D., Kiel

Es folgen die von den Vortragenden selbst eingereichten Kurzfassungen der Vorträge.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge:

BOARDMAN, J.M.: Singularities of differentiable maps

Given a smooth map f of manifolds, the set $\Sigma^i(f)$ is defined by considering the rank of the differential of f. If $\Sigma^i(f)$ is also a manifold, $\Sigma^{i,j}(f) = \Sigma^j(f|\Sigma^i(f))$ can be defined, etc. This approach is not satisfactory, for various reasons.

We construct instead certain canonically defined subsets Σ^I of the jet space, one for each sequence I. The main theorem is that these are submanifolds. To do this, one must first make the jet space into a smooth "manifold".

The definition of Σ^I involves jacobian extensions of ideals, and a certain well-known subbundle of the tangent bundle to the jet space.

From the main theorem we deduce the required results about the sets $\Sigma^i(f)$, etc.

BOS, W.: Verbindbarkeit von lokalflachen k-Zellen B^k des R^n

Definition. $B^k \subset R^n$ heißt lokalflach, wenn jeder Punkt $x \in B^k$ eine Umgebung U im R^n besitzt mit $(U, U \cap B^k) \approx (R^k \times R^{n-k}, R^k \times 0)$. Alle Zellen werden lokalflach vorausgesetzt.

Definition. Ein Paar B_1^k, B_2^k heißt verbindbar, in Zeichen $B_1 \overset{k}{\sim} B_2$, wenn es ein B^k gibt, so daß $B \cap B_i$ eine offene Menge von B_i enthält $(i = 1, 2)$.

SATZ: $\overset{k}{\sim}$ ist für $k \leq n-1$ eine Äquivalenzrelation.

SATZ: $\overset{k}{\sim}$ ist für $k \leq n-3$ trivial, d.h. stets erfüllt.

KOROLLAR: Zwei (n-1)-Zellen des R^n sind stets in $R^n \times R^2$ verbindbar.

Bemerkung: Die Verbindbarkeit je zweier (n-1)-Zellen im R^n (sogar durch eine nur lokalflach eingelagerte (n-1)-Zelle) ist gleichwertig mit der Richtigkeit der Ringvermutung.

SATZ: Sind B_1, B_2 (n-1)-Zellen des R^n, dann gibt es eine (n-1)-Zelle B, so daß $B \cap B_1 \supset V$ (V offen in B_1) und $B \cap B_2 \supset B_o^{n-3}$ ist.

Vortragsauszüge:

BOARDMAN, J.M.: Singularities of differentiable maps

Given a smooth map f of manifolds, the set $\Sigma^i(f)$ is defined by considering the rank of the differential of f. If $\Sigma^i(f)$ is also a manifold, $\Sigma^{i,j}(f) = \Sigma^j(f|\Sigma^i(f))$ can be defined, etc. This approach is not satisfactory, for various reasons.

We construct instead certain canonically defined subsets Σ^I of the jet space, one for each sequence I. The main theorem is that these are submanifolds. To do this, one must first make the jet-space into a smooth "manifold".

The definition of Σ^I involves jacobian extensions of ideals, and a certain well-known subbundle of the tangent bundle to the jet space.

From the main theorem we deduce the required results about the sets $\Sigma^I(f)$, etc.

B[illegible]S, W.: Verbindbarkeit von lokalflachen k-Zellen B^k des R^n

Definition. $B^k \subset R^n$ heißt lokalflach, wenn jeder Punkt $x \in B^k$ eine Umgebung U im R^n besitzt mit $(U, U \cap B^k) \approx (R^k \times R^{n-k}, R^k \times 0)$.

Alle Zellen werden lokalflach vorausgesetzt.

Definition. Ein Paar B_1^k, B_2^k heißt verbindbar, in Zeichen $B_1^k \sim B_2^k$, wenn es ein B^k gibt, so daß $B^k \cap B_i^k$ eine offene Menge von B_i^k enthält $(i = 1, 2)$.

SATZ: $\sim$ ist für $k \leq n-1$ eine Äquivalenzrelation.

SATZ: $\sim$ ist für $k \leq n-3$ trivial, d.h. stets erfüllt.

KOROLLAR: Zwei (n-1)-Zellen des R^n sind stets in $R^n \times R^2$ verbindbar.

Bemerkung: Die Verbindbarkeit je zweier (n-1)-Zellen im R^n (sogar durch eine nur lokalflache [illegible] (n-1)-Zelle) ist gleichwertig mit der Richtigkeit der Ringvermutung.

SATZ: Sind B_1, B_2 (n-1)-Zellen des R^n, dann gibt es eine (n-1)-Zelle B, so daß $B \cap B_1 \supset V$ (V offen in B_1) und $B \cap B_2 \supset B_0^{n-3}$ ist.

DENNET, J.R.: The Curtis Spectral Sequence

This talk described some results on the E^1 term of the Curtis spectral sequence (Annals of Math. 1965). This arises from a filtration of GX (X a s.s. complex) by its lower central series, and for X simply connected the spectral sequence converges to $\pi_*(X)$:
$E^1_{rq} = \pi_q(\Gamma_r GX / \Gamma_{r+1} GX) = \pi_q L^r(GX/\Gamma_2 GX)$ where L^r is the r^{th} weight of the prolongation of the free Lie ring functor L. If X is a s.s. Moore space, then $E^1_{rq} = \pi_q L^r K(\pi, n)$ depends only on π. For r = 2 these functors are described by the following table:

	n odd	n even
$q = 2n+1$	$R\pi$	$\Omega\pi$
$q = 2n$	$\Gamma\pi$	$L^2\pi + \mathrm{Tor}(\pi, Z_2)$
$n < q < 2n$, q odd	$\mathrm{Tor}(\pi, Z_2)$	$\pi \otimes Z_2$
$n < q < 2n$, q even	$\pi \otimes Z_2$	$\mathrm{Tor}(\pi, Z_2)$

where Γ was described by J.H.C. Whitehead (Ann.of Math. 1950) and R and Ω by Eilenberg, MacLane (Ann.of Math. 1954).

For $\pi = Z$ the E^1 term is known completely and some partial results were stated.

tom DIECK, T.: Steenrod-Operationen für Bordismentheorien

Es wurde für den Spezialfall der Bordismentheorie mit unorientierten Mannigfaltigkeiten eine geometrische Konstruktion von Operationen beschrieben, die in das Poincaré-Duale der gewöhnlichen Steenrod-Operationen übergehen, wenn man singuläre Mannigfaltigkeiten als Zykel auffaßt. Für die Koeffizienten der Theorie (die Thomsche Algebra) erhält man speziell eine Vorschrift, die den projektiven Räumen im wesentlichen die Dold-Mannigfaltigkeiten zuordnet.

tom DIECK, T.: Charakteristische Bordismenklassen

Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit, TM Tangentialbündel von M, i : M → TM der Nullschnitt. a: $S^j \times M \xrightarrow{pr} M \xrightarrow{i} TM$ ist eine Z_2-Abbildung, wenn Z_2 auf S^j und TM durch die antipodische Abbildung operiert. Man approximiere a äquivalent durch b, so daß b transversal

zu $\bar{M} \subset TM$. b indiziert $b^{-1} M / Z_2 \to M$; das sei die charakteristische Bordismenklasse w_j. w_j hängt mit den Bordismen-Steenrodoperationen zusammen; man erhält eine geometrische Interpretation der Thomschen Definition der Stiefel-Whitney-Klassen durch die Steenrod-squares.

GAMST, J.: Linearisierung von Gruppendaten mit Anwendungen auf Knotengruppen

Der "Free Differential Calculus" von FOX wurde in die Begriffsbildungen der linearen Algebra eingeordnet.

TERMINOLOGIE: Freie Erzeugende $(x_\iota)_{\iota \in I}$ einer freien Gruppe F geben in kanonischer Weise Anlaß zu verschränkten Homomorphismen $v_\iota : IF \to \mathbb{Z}F$ (IF: Augmentationsideal des Gruppenringes $\mathbb{Z}F$) mit $v_\iota(x_\varkappa) = \delta_{\iota\varkappa}$. Ein Gruppendatum für eine Gruppe G ist eine exakte Folge $1 \to R \to F \xrightarrow{p} G \to 1$ von Gruppen, zusammen mit freien Erzeugenden x_ι für F und Wörtern r_λ in den x_ι, die R als Normalteiler von F erzeugen.

SATZ: Ist $G \xrightarrow{h} H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $(hpv_\iota(r_\lambda))$ eine Relationenmatrix für den H-Modul $\mathbb{Z}H \otimes_G IG$.

SATZ: Ist $1 \to K \to G \to H \to 1$ eine exakte Folge von Gruppen, so ist

$$0 \to {}^{K}/K' \to \mathbb{Z}H \otimes_G IG \to \mathbb{Z}H \to \mathbb{Z} \to 0$$

exakt ($K' = [K, K]$) und bestimmt als Element von $H^2(H, {}^{K}/K')$ die Gruppenerweiterung $0 \to {}^{K}/K' \to {}^{G}/K' \to H \to 1$.

Für Knotengruppen G ist ${}^{G}/G'$ die unendliche zyklische Gruppe, und Erzeugende und Relationen für G liefern Erzeugende und Relationen für den ${}^{G}/G'$-Modul ${}^{G'}/G''$. Analoges gilt für die endlichen zyklischen Faktorgruppen einer Knotengruppe.

GIAMBALVO, V.: Cohomology of Hopf Algebras according to Peter May

A concise description without proofs and almost no computations of May's Methods for computing the cohomology of Hopf Algebras, explicitly computing $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}_1}(Z_2, Z_2)$ where $\mathfrak{A}_1 = \{S_q^1, S_q^2\} \subset \mathfrak{A}$.
Mention of application to Arf Invariant problem in dimension 38.

GODBILLON, C.: Relations d'équivalence et prolongement des homotopies

La notion de relation d'équivalence ayant la propriété du prolongement des homotopies généralise celle de fibré au sens de Serre.

Elle conduit, dans le cadre de la topologie algébrique, à des résultats analogues à ceux du cas classique; par exemple suite exacte d'homotopie, suite spectrale.

Cette notion permet l'étude de certains types de feuilletages.

GRAY, B.: P-primary components of $\pi_n(S^k)$, p odd

A spectral sequence is described which is used to calculate $\pi_*(S^{2n+1})$ from $\pi_*(S^{2n-1})$ and lower stems on larger spheres (p fixed). The differentials are described in terms of Toda brackets and by using Toda bracket formulae the first 41 stems have been calculated for $p = 3$. Some patterns appear, one of which can be stated most simply as: $\pi_{k+2n-3}(\Omega^2 S^{2n+1}, S^{2n-1})$ independent of n, for n large (p, k fixed). This has the status (at present) of a conjecture. However strong approximations to a proof are given for the following. - There exists an element $\gamma_k \in G_{2p^k(p-1)-2}$ which is stably essential and has order p. γ_k is detected by a secondary operation and P^{p^k} is nonzero in $S^n \cup_{p\iota} e^{n+1} \cup_{\gamma_k} e^{2n+2p^k(p-1)}$, n large. γ_k is given as an element of $\underbrace{\{\gamma_{k-1}, p\iota, \gamma_{k-1}, p\iota, \dots, \gamma_{k-1}, p\iota\}}_{2p\text{ fold}}$ and $\gamma_1 = \beta_1 = \underbrace{\{\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1\}}_{p\text{ fold}}$.

KOCH, W.: Über die Erhöhung der Ordnung der Differenzierbarkeitsstruktur bei Mannigfaltigkeiten mit überabzählbarer Basis

Für Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Basis sind folgende Sätze bekannt:

SATZ 1: Ist D eine C^r-differenzierbare Struktur auf der Mannigfaltigkeit M, so enthält D eine C^∞-Struktur $(r \geq 1)$.

SATZ 2: Seien M und N C^p-Mannigfaltigkeiten und $f: M \to N$ ein C^r-Diffeomorphismus $(1 \leq r \leq p \leq \infty)$, dann folgt: Es gibt einen C^p-Diffeomorphismus $f_1 : M \to N$.

CURBILLON, C.: Relations d'équivalence et prolongement des homotopies

L[illegible] de relation d'équivalence ayant la propriété de prolongement [illegible] homotopie [illegible] généralise celle de fibré au sens de Serre.

Elle conduit, dans le cadre de la topologie algébrique, [illegible] du cas classique; [illegible] simple suite exacte d'homotopie, suite [illegible].

Cette notion permet l'étude de [illegible].

GRAY, B.: [illegible]-primary components of $\pi_*(S^{[illegible]})$

[illegible] spectral sequence is described which is used to calculate $\pi_*(S^{2n+1})$ from $\pi_*(S^{2n-1})$ and lower stems [illegible] (n fixed). The differentials are described in terms of Toda brackets and by using Toda bracket formulae the first [illegible] have been calculated for p = 3. Some patterns appear, one of which can be stated most simply as: [illegible] $(\Omega^2 S^{2n+1}, S^{2n-1})$ independent of n, for n large (p, k fixed). This has the status (at present) of a conjecture. However strong [illegible] are given for the following. - There exists an [illegible] which is stably essential and has order p. [illegible] is detected by a secondary operation and [illegible] is nonzero in [illegible] n large. γ_k is given as an element of [illegible]

[illegible] p fold [illegible]

KOCH, W.: Über die [illegible] Differenzierbarkeits-struktur bei Mannigfaltigkeiten mit überabzählbarer Basis

Für Mannigfaltigkeiten mit überabzählbarer Basis [illegible]:

SATZ 1: Ist [illegible] mit M, [illegible] Mannigfaltig- [illegible] (r ≥ 1).

SATZ 2: [illegible] Mannigfaltigkeiten und f: M → M [illegible] Diffeomorphismus (1 ≤ r ≤ p [illegible]), dann folgt: Es gibt ein [illegible] morphismus f_1: M → M.

Es wird gezeigt, daß Satz 1 auch für Mannigfaltigkeiten ohne abzählbare Basis gilt. Das globale Problem wird vermöge des Lemmas von Zorn auf ein lokales Problem zurückgeführt, das dann mit Hilfsmitteln der Approximationstheorie gelöst wird. Satz 2 gilt im allgemeinen für Mannigfaltigkeiten ohne abzühlbare Basis nicht. Die lange Gerade besitzt zwei C^{∞}-differenzierbare Strukturen, die C^{1}-diffeomorph sind, für die es aber keinen C^{2}-Diffeomorphismus gibt.

MADSEN, I.: Cohomology operations

The talk will contain cochain definitions of (unstable) secondary and tertiary cohomology operations. It will be shown how these definitions make it possible to obtain results on evaluation of secondary (resp. tertiary) operations in low dimensions.

Geometrical application: Consider two maps $f, g: Y \to X$ and a primary or secondary operation λ. I shall define a sort of functionalized operation $\lambda_{f,g}$. These operations will be used to prove the following theorem: Let α be one of the three Hopf maps η, ν or σ. Put

$$\epsilon = sq^{i+1} sq^{n+1} + sq^{n+1+\frac{i+1}{2}} sq^{\frac{i+1}{2}} + \text{terms of higher excess} \quad (i = 1, 3, 7)$$

and let $R: \Sigma a_i \gamma_i + \Sigma s_j b_j = \epsilon$ be a factorization of ϵ (γ_i and s_j are relations). Then the tertiary operation associated to R detects the Whitehead product $[\alpha_n, \iota_n]$.

MOSS, M.: On Massey Products in the Adams Spectral Sequence

Let $a \in E_r^{s,t}$, $a' \in E_r^{s',t'}$ and $a'' \in E_r^{s'',t''}$ be elements of the Adams spectral sequence such that $aa' = 0$ and $a'a'' = 0$; then the Massey product $\langle a, a', a'' \rangle$ can be formed and lies in a quotient of $E_r^{s+s'+s''-r+1,\, t+t'+t''-r+2}$. If a, a' and a'' survive to E_∞ and are there realized by homotopy elements ψ, ψ' and ψ'' having $\psi\psi' = 0$ and $\psi'\psi'' = 0$, it might be expected that some elements of $\langle a, a', a'' \rangle$ survives to E_∞ and is there realized by an element of the Toda bracket $\{\psi, \psi', \psi''\}$. Mahowald has given an example to show that this result is false in general. However it is true if the following additional conditions are imposed on the spectral sequence:

$$E_{s+s'-i+1}^{i,\,s+s'-t-t'+i+1} \subset E_{s+s'-i+1,\infty} \quad \text{if } 0 \leq i \leq s+s'-r,$$

$$E_{s'+s''-i+1}^{i,\,s'+s''-t'-t''+i+1} \subset E_{s'+s''-i+1,\infty} \quad \text{if } 0 \leq i \leq s'+s''-r,$$

where $E_{r,\infty}$ denotes the set of elements in E_r that are forever cycles. This description of Massey product behaviour is also valid for Adams spectral sequences arising from other cohomology theories. The result can also be generalized to describe the secondary composition pairing of Adams spectral sequences.

ROBERTS, R.S.: Bundles of Grassmannians and Integrality Theorems

The interrelationship of various integrality theorems for differentiable manifolds will be discussed. In particular some results of K.H. Mayer which have appeared in Topology 4 (1965), will be proved inductively using the splitting principle. This will require the consideration of a bundle of Grassmannians of real oriented 2-planes and the result that these Grassmannians are homeomorphic to complex quadrics.

STAMMBACH, U.: Über die Homologiegruppen von Liealgebren
(zusammen mit M.A. KUUS)

Es sei L eine Liealgebra und $\bar{L}$ ein Lieideal von L. Aus der Hochschild-Serre-Spektralreihe für die Homologie der Liealgebren läßt sich eine exakte Sequenz herleiten, welche die natürlichen Homomorphismen $H_2(L) \to H_2(L/\bar{L})$ und $H_1(L) \to H_1(L/\bar{L})$ verbindet. Sie lautet:

$$H_2(L) \to H_2(L/\bar{L}) \to \bar{L}/[L,\bar{L}] \to H_1(L) \to H_1(L/\bar{L}) \to 0.$$

Diese Sequenz erlaubt Anwendungen, die die absteigende, bzw. aufsteigende Zentralreihe einer Liealgebra betreffen. Weiter ergibt sich daraus eine Formel für die 2.Homologiegruppe einer Liealgebra, die eine Präsentierung, d.h. eine Darstellung als Quotient einer freien Liealgebra verwendet. Schließlich lassen sich Aussagen über die Existenz von freien Lieunteralgebren von Liealgebren mit trivialer 2.Homologiegruppe machen.

TAKENS, F.: Isolated critical points of C^∞-functions

A point p of a n-manifold is called a critical point of a real function f if $(df)_p = 0$.

An isolated critical point p of f is called *tame* if p has a neighbourhood in $f^{-1}(f(p))$ which is homeomorphic with a cone.

Every isolated critical point of a real analytic function is tame; it will be shown that this is not the case for C^∞-functions on R^n if $n \geq 4$.

THOMEIER, S.: On the metastable homotopy of spheres

The following questions are discussed: What are the orders of the Whiteheadproducts $[\alpha, \iota_n]$, where $\alpha = \iota, \eta, \eta^2, \nu, \ldots$ runs through the generators of the stable groups in the 0, 1, 2, 3, ... - stem? Can these Whiteheadproducts be halved, quartered etc. in their groups? How often can these elements be desuspended? By attacking these problems one also obtains information on the structure of the metastable homotopy groups of spheres and on the action of the suspension homomorphism in the metastable range. It can be seen that in a wide range the iterated suspension

$E^m : \pi_{r+n}(S^n) \to G_r$ (G_r denotes the stable group in r-stem)

is epimorphic and that the metastable group $\pi_{r+n}(S^n)$ then is isomorphic to a direct sum of the stable group and a certain homotopy group of a Stiefel manifold:

$$\pi_{r+n}(S^n) \approx G_r \oplus \pi_{r+1}(V_{2n,n}).$$

Because of the periodicity in $\pi_i(V_{2n,n})$ this relation between metastable and stable groups is periodic modulo some power of 2. The given formula is especially true (with a few exceptions) for the last seven unstable groups in all stems; there one has a periodicity mod 8.

VASTERSAVENDTS, M.L.: Construction of the Postnikov system of SU(n) till dimension 2n+7

I am concerned with the Postnikov system of an H-space or the stable part of the Postnikov system of an m-connected space. Suppose

$H^*(\bar{P}_o^{n-1}, Z_2)$ is known and suppose the next step in the Postnikov system is:

$$K(Z_{2^r}, s) = P^{n}_{n-1} \xrightarrow{\bar{P}^{n}_{n-1,0}} \bar{P}^n_o \xrightarrow{\bar{P}^{n,n-1}_o} \bar{P}^{n-1}_o$$

with a certain k-invariant. If $Sq^{I_j} e^s$ $j = 1, \dots, r$ belongs to the kernel of the transgression and if $[Sq^{I_j} e^s]$ is a well determined corresponding class in $H^*(\bar{P}^n_o, Z_2)$ and if $a_1 Sq^{I_1} + \dots + a_r Sq^{I_r} = 0$ in $A^*/(A^*Sq^1 + \text{operations of excess} > s)$ then $\sum_j a_j [Sq^{I_j} e^s] = \bar{P}_o^{n,n-1} b$, $b \in H^*(\bar{P}_o^{n-1}, Z_2)$. I will tell something about b and I can give many examples taken from the calculation of $\pi_{2n+k}(SU(n))$ where this thing determines b completely.

J. Gamst (Kiel)

$H^*(P_{n-1}, Z_2)$ is [illegible] and suppose [illegible] the Postnikov system [illegible]

$$K(Z_2, n) = P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_{n-1}$$

with a certain K-invariant. If $Sq^{I_j} s_j$, $j = 1, \dots, r$ belong [illegible] kernel of the transgression and if $[Sq^{I_j}]$ is well determined [illegible] corresponding class in $H^*(P, Z_2)$ and if [illegible] $a_1 Sq^{I_1} + \dots + a_r Sq^{I_r} = 0$ in $A/(A\, Sq^1 + \dots)$ [illegible] that $\sum a_j [Sq^{I_j} s_j] = p_n^* b$, $b \in H^*(P_{n-1}, Z_2)$. I will tell something about b and I can give many examples taken from the calculation of $\pi_{2n+k}(S^n)$ where this [illegible] determines b completely.

J. [illegible] (Kiel)