Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

T a g u n g s b e r i c h t

Geometrie

25. September - 1.Oktober 1966

Die Oberwolfacher Geometrietagung stand diesmal unter der Leitung von Professor Dr.K.H. Weise (Kiel) und Professor Dr.K.Leichtweiß (Berlin). Typisch für die anregende und eifrige Atmosphäre, zu der die ausländischen Gäste wesentlich beitrugen, war das große Interesse, welches ein langer pointenreicher Vortrag fand, der außer der Reihe in den Abendstunden gehalten wurde. Wie immer streuten die angeschnittenen Fragen weit von der algebraischen Geometrie bis zur Konvexgeometrie. Verhältnismäßig häufig wurden Themen der Differentialgeometrie im Großen, überhaupt aus den Zwischengebieten von Topologie und anderen geometrischen Disziplinen behandelt.

Allen, die zum Gelingen der Tagung beitrugen, insbesondere denen, die in bewährter Weise für das leibliche Wohl der Gäste sorgten, sei nochmals herzlich gedankt.

Teilnehmer:

Banchoff, Th.F., Amsterdam
Baum, D., Berlin
Benz, W., Bochum
Bieri, H., Bern
Bilinski, St., Zagreb/Jugosl.
Böhm, W., Braunschweig
Burau, W., Hamburg
Casati, U., Zürich
Decker, H., Darmstadt
Degen, W., Karlsruhe
Derry, D., Vancouver/Kanada
Doden, K., Kiel
Dombrowski, P., Bonn
Elster, K.-H., Halle
Ewald, G., Bochum
Ferus, D., Bonn
Giering, O., Stuttgart
Grimm, W., Karlsruhe
Gröbner, W., Innsbruck
Grotemeyer, K.P., Berlin
Hadwiger, H., Bern
Haupt, O., Erlangen
Heil, E., Darmstadt
Hoscheck, J., Darmstadt
Kunle, H., Karlsruhe
Laugwitz, D., Darmstadt
Leichtweiß, K., Berlin
Mani, P., Bern
Matsumoto, M., Kyoto/Japan
Münzner, H.F., Berlin

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Ostrom, T.G., Frankfurt
Reeb, Straßburg
Roether, D., Berlin
Ruh, X., Zürich
Schaal, H., Stuttgart
Schneider, R., Frankfurt/M.
Simon, U., Berlin
Strubecker, K., Karlsruhe
Tölke, J., Karlsruhe
Viesel, H., Karlsruhe
Vogel, W.O., Hannover
Volk, O., Würzburg
Voss, K., Zürich
Wagner, R., Würzburg
Walter, R., Freiburg
Weise, K.H., Kiel
Willmore, T.J., Durham/England

Vortragsauszüge:

GRÖBNER, W.: Die Hilbertfunktion (Postulationsformel) der Polynomideale

1. D e f i n i t i o n d e r H i l b e r t f u n k t i o n.
Es bedeute a ein homogenes Ideal (H-Ideal) in einem homogenen (graduierten) Polynomring

$$R = K[x_o, x_1, \ldots, x_n] = \sum R^{(t)},$$

wo $R^{(t)}$ den Vektorraum aller homogenen Polynome (Formen) des Grades t in $x_o, x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus K bedeutet; seine Dimension $\binom{t+n}{n}$. Der Durchschnitt $a \cap R^{(t)}$ ist ein Unterraum, dessen Dimension mit V(t;a) ("V o l u m e n" des Ideals a) bezeichnet wird. Die Hilbertfunktion H(t;a) des H-Ideals a ist gleich der Dimension des Komplementärraums:

(1.1) $$H(t;a) = \binom{t+n}{n} - V(t;a);$$

sie gibt die A n z a h l d e r l i n e a r e n B e d i n g u n g e n an, welche eine Form des Grades t erfüllen muß, um in a enthalten zu sein; daher heißt sie auch die e f f e k t i v e P o s t u l a t i o n der vom H-Ideal a repräsentierten algebraischen Mannigfaltigkeit V(a).

2. E i g e n s c h a f t e n d e r H i l b e r t f u n k t i o n.
(a) Die Hilbertfunktion H(t;a) ist für jedes H-Ideal a und für t = 0,1,2,... als eine nicht negative ganzwertige Funktion erklärt. Insbesondere hat man für das Nullideal (0):

$$V(t;(0)) = 0, \quad H(t;(0)) = \binom{t+n}{n};$$

für das Einheitsideal (1)

$$V(t;(1)) = \binom{t+n}{n}, \quad H(t;(1)) = 0.$$

(b) Für $a \subseteq b$ gilt: $V(t;a) \leq V(t;b)$ und $H(t;a) \geq H(t;b)$.

(c) Die bekannte Relation für die Dimension der Durchschnitts- und Verbindungsräume zweier Vektorräume liefert:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} V(t;\ a+b) + V(t;a\cap b) = V(t;a) + V(t;b), \\ H(t;\ a+b) + H(t;a\cap b) = H(t;a) + H(t;b). \end{cases}$$

(d) Wenn Φ eine Form des Grades τ ist, hat man

$$(2.2) \qquad V(t;a\Phi) = V(t-\tau;a) \text{ und } H(t;a\Phi) = \binom{t+n}{n} - \overline{\binom{t-\tau+n}{n}} + H(t-\tau;a)$$

insbesondere für $a = (1)$: $H(t;(\Phi)) = \binom{t+n}{n} - \overline{\binom{t-\tau+n}{n}}$ also:

$$(2.3) \qquad H(t;a\Phi) = H(t;(\Phi)) + H(t-\tau;a).$$

Hier sind die überstrichenen Binomialkoeffizienten durch die Zusatzbedingung

$$(2.4) \qquad \overline{\binom{m}{n}} = \begin{cases} \binom{m}{n} & \text{für } m \geq 0 \\ 0 & \text{für } m < 0 \end{cases}$$

definiert.

(e) Setzt man in (2.1) $b = (\Phi)$ und beachtet $a \cap (\Phi) = (a:\Phi)\Phi$, so kommt:

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} H(t;a+(\Phi)) &= H(t;a) - H(t-\tau;a:\Phi) \\ &= H(t;a) - H(t-\tau;a) \quad \text{falls } a:\Phi = a \text{ ist.} \end{aligned}$$

Ist insbesondere Φ eine Linearform l mit $\tau = 1$, die relativ prim zu a ist, so gibt (2.5)

$$(2.6) \qquad H(t;a+(l)) = H(t;a) - H(t-1;a) = \Delta H(t;a).$$

(f) Durch Iteration beweist man die für HAUPTKLASSENIDEALE gültige Formel von MACAULAY:

$$(2.7) \qquad \frac{(1-x^{\tau_1})(1-x^{\tau_2})\ldots(1-x^{\tau_r})}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{t=o}^{\infty} H(t;a)x^t,$$

wenn $a = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r)$ den Rang r hat und τ_j der Grad der Form Φ_j ist.

3. D a r s t e l l u n g e n d e r H i l b e r t f u n k t i o n.

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} H(t;a) &= h_o\binom{t}{d} + h_1\binom{t}{d-1} + \ldots + h_{d-1}\binom{t}{1} + h_d \quad \text{(HILBERT)}; \\ &= k_o\binom{t+d}{d} + k_1\binom{t+d-1}{d-1} + \ldots + k_{d-1}\binom{t+1}{1} + k_d \quad \text{(SEVERI)}, \end{aligned}$$

((3.1) Fortsetzung)

$$H(t;a) = \binom{t+d}{d} + p_o\binom{t+d-1}{d} - p_1\binom{t+d-2}{d-1} + \ldots + (-1)^{d-1}\binom{t}{1} + (-1)^d p_d$$

(MARCHIONNA)

$$= \binom{t+n}{n} - \sum_{i=1}^{s_1}\binom{t-\tau_{1i}+n}{n} + \sum_{i=1}^{s_2}\binom{t-\tau_{11}-\tau_{2i}+n}{n} - + \ldots$$ (Syzygienformel von HILBERT).

Die rechten Seiten der drei ersten Formeln stellen ein P o l y n o m in t des Grades d dar, welches mit $\chi(t;a)$ bezeichnet wird und die v i r t u e l l e P o s t u l a t i o n des H-Ideals a bzw. der Varietät V(a) heißt. Die letzte Formel, welche aus einer endlichen Summe von verallgemeinerten Binomialkoeffizienten (2.4) besteht, liefert den genauen Wert der Hilbertfunktion für alle Werte $t = 0,1,2,\ldots$; sie stimmt mit den drei vorausgehenden erst von einem gewissen Wert T, der R e g u l a r i t ä t s s c h r a n k e an überein:

(3.2) $$\chi(t;a) = H(t;a) \quad \text{für} \quad t \geq T.$$

Aus der Hilbertfunktion kann man folgende Größen ablesen:

a) Grad d der Hilbertfunktion = Dimension des H-Ideals a, bzw. der zugeordneten Varietät V(a).

b) Die ersten Koeffizienten $h_o = k_o = 1+p_o$ = Ordnung des H-Ideals a, d.h. Anzahl der Schnittpunkte mit einem allgemeinen linearen Raum der komplementären Dimension n-d.

c) Das v i r t u e l l e a r i t h m e t i s c h e G e s c h l e c h t G(a) des H-Ideals a, bzw. der zugeordneten Varietät V(a):

(3.3) $$G(a) = (-1)^d(h_d-1) = (-1)^d(\chi(0;a)-1) = p_d.$$

Aus (2.1) leitet man unter der Voraussetzung Dim(a) = Dim(b) = Dim(a ∩ b) = d, Dim(a+b) = d-δ die Formel

(3.4) $$G(a \cap b) = G(a) + G(b) - (-1)^\delta\, G(a+b)$$

ab. Ist insbesondere b = (Φ) mit einer Form Φ des Grades τ, die relativ prim zu a ist, a: Φ=a, so findet man mit Hilfe von (2.5) die Formel von SEVERI:

(3.5) $$G(a+(\Phi)) = -G(a) + (-1)^d\chi(-\tau;a).$$

Bei der Berechnung der Hilbertfunktion des Schnittes einer Varietät V(a) mit einem linearen Raum in allgemeiner Lage zeigt sich auf Grund von (2.6) der Vorteil der Schreibweise von MARCHIONNA:

(3.6) $H(t;a+(I)) = \binom{t+d-1}{d-1}+p_o\binom{t+d-2}{d-1}-p_1\binom{t+d-3}{d-2}+-\ldots+(-1)^{d-1}p_{d-1}$;

daraus folgt, daß der Koeffizient p_{d-j} in der Formel von MARCHIONNA das virtuelle arithmetische Geschlecht des Schnittes der Varietät V(a) mit einem allgemeinen linearen Raum der Dimension n-j ist.

Die Koeffizienten der Hilbertfunktion stehen in einer gewissen, sehr nahen Beziehung zu den birationalen Invarianten der betrachteten Varietät. Das hat schon HILBERT gesagt (siehe S.520 von [1]): "... dann gibt der Grad d dieser charakteristischen Funktion die Dimension und der Koeffizient χ_d(= h_o in (3.1)) die Ordnung des algebraischen Gebildes an, während die übrigen Koeffizienten $\chi_o, \chi_1, \ldots, \chi_{d-1}$ mit den von M.NOETHER (Math.Ann.2 und 3) definierten und behandelten Geschlechtszahlen des Gebildes in engem Zusammenhange stehen".

Jedoch ist die Hilbertfunktion ohne weitere Zusätze sicher nicht charakteristisch für die Struktur eines bestimmten H-Ideals. Das folgt aus der Arbeit von E. SPERNER [4], wonach zu einer vorgegebenen Funktion $\chi(t)$, welche gewisse Bedingungen erfüllt, immer ein von Potenzprodukten erzeugtes H-Ideal konstruiert werden kann, das diese Hilbertfunktion besitzt.

Die Hilbertfunktion eines Hauptklassenideals kann leicht berechnet werden; für andere Gattungen hat man noch wenig Resultate. Für Veronesesche Ideale $v_{n,m}$ ist sie bekannt [6]:

$$H(t;v_{n,m}) = \binom{mt+n}{n},$$

doch ist die Umrechnung in die Gestalt (3.1) bisher noch nicht geleistet worden. Für Graßmannsche und Matrixideale hat man bisher nur die Ordnung, d.i. den ersten Koeffizienten der Hilbertfunktion mit den Methoden der abzählenden Geometrie berechnet. Die Hilbertfunktion für Graßmannsche Ideale hat W. BURAU vor kurzem angegeben (vgl. den anschließenden Vortrag).

LITERATUR

1. D.HILBERT, Über die Theorie der algebraischen Formen. Math.Ann. 36 (1890), 473-534.

2. D.G. NORTHCOTT, Hilbert's function in a local ring. Quart.J. Math., Oxford II.Ser.4 (1953) 67-80.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

3. SCHIFFELS, G., Graduierte Ringe und Moduln. Bonner Math. Schriften 1960.

4. SPERNER, E., Über einen kombinatorischen Satz von Macaulay und seine Anwendung auf die Theorie der Polynomideale. Abh. Math.Sem.Hamburg, Univ.7 (1930), 149-163.

5. WAERDEN, B.L. VAN DER, On Hilbert's Function. Proc.K.Akad. Wet.Amsterdam, 31/2 (1928), 749-770.

6. GRÖBNER, W., Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen. Arch.Math. XVI (1965), 257-264.

BURAU, W.: Die Hilbertfunktion der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten

Die Hilbertfunktion $\mathfrak{H}(t,M_d)$ der algebraischen Mannigfaltigkeit M_d läßt sich geometrisch so fassen: Es ist $\mathfrak{H}(t,M_d) = \dim\langle V^t(M_d)\rangle+1$. Dabei bedeutet $V^t(M_d)$ die M_d auf der Veroneseschen V_n^t des P_{n+t} zugeordnete Bildmenge, und $\langle W\rangle$ für $W \subset P_n$ ist der durch W aufgespannte Teilraum des P_N. Diese Tatsache wird benutzt, um $\mathfrak{H}(t,M_d)$ für die sogenannten $\mathfrak{J}$-Mannigfaltigkeiten zu berechnen.

Diese $\mathfrak{J}_{n;\overset{g_{n-1}}{n-1}\ldots\overset{g_1}{1}\,\overset{g_0}{0}}$ sind für ganze Zahlen $n > 0$, $g_i \geq 0 (i=0,\ldots n-1)$ erklärt und sind Punktmodelle für die Flaggen, d.h. Systeme von Räumen $P_{n_1} \subset P_{n_2} \subset \ldots \subset P_{n_r}$ des P_n $(0 \leq n_1 < \ldots < n_r \leq n-1)$ wie näher erläutert wird. Für $g_k = 1$, $g_i = 0$ $(i \neq k)$ fällt die $\mathfrak{J}_{n;\overset{0}{n-1}\ldots\overset{1}{k}\ldots\overset{0}{0}}$ mit der Grassmannschen $\mathfrak{G}_{n,k}$, der minimalen Bildmenge aller $P_k \subset P_n$ zusammen.

Die Räume $\langle\, \mathfrak{J}_{n;\overset{g_{n-1}}{n-1}\ldots\overset{g_0}{0}} \,\rangle$ gehören auch zu den irreduziblen Darstellungen der vollen projektiven Gruppe des P_n. Aus der Darstellungstheorie entnimmt man daher auch die Formel:

$$\dim\langle\, \mathfrak{J}_{n;\overset{g_{n-1}}{n-1}\ldots\overset{g_1}{1}\,\overset{g_0}{0}}\rangle+1 = (g_0+1)(g_1+1)\ \ldots\ (g_{n-1}+1).$$
$$(g_0+g_1+2)\ldots(g_{n-2}+g_{n-1}+2)\ldots(g_0+g_1+\ldots+g_{n-1}+n)\ \frac{1}{1!2!\ldots n!} =$$
$$= f(n;g_0,\ldots,g_{n-1}).$$

Daraus folgt leicht

$$\mathfrak{H}(t,\mathfrak{J}_{n;\overset{g_{n-1}}{n-1}\ \ldots\ \overset{g_0}{0}}) = f(n;tg_0,\ldots,tg_{n-1}).$$

Für den Fall der Grassmannschen $\mathfrak{G}_{n,k}$ ergibt sich daraus leicht:

$$\mathfrak{H}(t,\mathfrak{G}_{n,k}) = A_{n,k}(t+n)(t+n-1)\ldots(t+1)(t+n-1)\ldots(t+2)\ldots(t+n-k)\ldots(t+k+1).$$

Dabei ist

$$A_{n,k} = [(n-k)(k+1)]!\,\frac{k!(k-1)!\ldots 2!1!(n-k-1)!\ldots 2!1!}{n!(n-1)!\ldots 2!1!}$$

$A_{n,k}$ ist nach der allgemeinen Theorie der Hilbertfunktion die Ordnung von $\mathfrak{G}_{n,k}$, ein bekanntes, von Hermann Schubert mit Hilfe der abzählenden Geometrie zuerst hergeleitetes Ergebnis.

OSTROM, T.G.: <u>Net Extensions and Field Extensions</u>

Many projective planes, including (up to a duality) all of the known finite planes, can be represented in affine form as extensions of a certain kind of net. The nets in question arise naturally from finite dimensional vector spaces. The coordinate systems for the planes are algebraic structures which are algebraic extensions of the ground fields for the vector spaces. The term "algebraic extension" is used here in a generalized sense; the algebraic extension is not even a skew-field unless the plane is Desarguesian.

LEICHTWEISS, K.: <u>Zur verbandstheoretischen Charakterisierung des affinen Raumes</u>

Der n-dimensionale projektive Raum läßt sich dadurch charakterisieren, daß er die einzig mögliche Abschließung des n-dim.affinen Raumes darstellt, bei welcher an die Stelle des euklidischen Parallelenaxioms die uneingeschränkte Gültigkeit des Dimensionsaxioms tritt ($n \geq 2$). Die verbandstheoretische Durchführung dieses Gedankens führt zu einer Charakterisierung des affinen Raumes, welche sich durch den folgenden Satz formulieren läßt:

VORAUSSETZUNG: Sei $\mathfrak{V}$ ein Verband mit den Eigenschaften

1) $\mathfrak{V}$ ist längenendlich mit Dedekindscher Ketteneigenschaft sowie $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{V} = n \geq 3$;
2) $\mathfrak{V}$ ist "atomar geordnet", d.h. $A(a) \subseteq A(b) \Leftrightarrow a \leq b$, wenn $A(x) = \{\text{Atome} \subseteq x\}$;
3) $\mathfrak{V}$ genügt dem euklidischen Parallelenaxiom, wobei $a_1 \| b_1 \Leftrightarrow a_1 = b_1$ oder $\mathrm{Dim}\,(a_1 \cap b_1) = 1$ und $\mathrm{Dim}(a_1 \cup b_1 = 2$ $(\mathrm{Dim}(a_1) = \mathrm{Dim}(b_1) = 1)$;
4) es existiert ein längenendlicher, modularer, atomarer geordneter n-dim.Verband $\mathfrak{R}$, welcher $\mathfrak{V}$ derart erweitert, daß

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

a) $A(P_I) \cap A(a_n) = \begin{cases} A(a_I) \\ \emptyset \end{cases}$ und

b) es ein P_I mit $A(a_I) = A(P_I) \cap A(a_n)$ zu vorgegebenem a_I gibt. ($0 \leq I \leq n$, $P_I \in \mathfrak{R}$, $a_I \in \mathfrak{A}$, $a_n \in \mathfrak{A}$, $\mathrm{Dim}(P_I) = \mathrm{Dim}(a_I) = 2$, $\mathrm{Dim}(a_n) = n$.

BEHAUPTUNG:

1) $\mathfrak{A} \cong L_{A_n}$, wobei L_{A_n} = Verband der affinen Unterräume des n.-dim. affinen Raumes über einem geeigneten Schiefkörper K.

2) K ist durch $\mathfrak{A}$ (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.

Der Beweis dieser Behauptungen benutzt die bekannte verbandstheoretische Charakterisierung eines endlichdimensionalen projektiven Raumes. Die angegebenen Voraussetzungen erscheinen einfacher als diejenigen, welche von K. MENGER angegeben wurden ("New foundations of projective and affine geometry", Ann. of Math. 1936).

BILINSKI, S.: Über ein Modell der zweidimensionalen hyperbolischen Geometrie in der Torusebene

Die euklidische Ebene wird durch unendlich ferne Punkte auf solche Weise erweitert, daß sie den topologischen Zusammenhang des Torus erhält. In dieser anisotropen "Torusebene" wird dann eine Geometrie, die "H-Geometrie" erklärt, welche sich als isomorph mit der Geometrie der hyperbolischen Ebene erweist. Die Grundelemente dieser H-Geometrie sind die orientierten "h-Geraden", welche durch jene Punkte der Torusebene dargestellt werden, welche außerhalb einer gewissen "absoluten Geraden" liegen. Ein "h-Punkt" ist dabei eine gleichseitige Hyperbel, deren imaginäre Achse die absolute Gerade ist. Es werden auch andere Grundbegriffe der H-Geometrie in der Torusebene erklärt, und die Metrik dieser Geometrie erläutert. Aus den angeführten Sätzen werden einige einfache Folgerungen gezogen und einige einfache Konstruktionen der H-Geometrie gegeben.

MATSUMOTO, M.: A method of differential geometry of tangent bundles

Recently, the differential geometry of the tangent bundle has been studied by several authors. I will show how to establish the differential geometry of tangent bundles from the standpoint of

Finsler connection.

Let P be the bundle of frames over a differentiable manifold $\mathfrak{M}$ and let B be the tangent bundle over $\mathfrak{M}$. Then, we have the induced bundle $Q = \tau^{-1}P$ from P by the natural projection $\tau : B \to \mathfrak{M}$. The Finsler connection (Γ^h, Γ^v) is by definition a pair of distributions on Q, which satisfy some conditions. Next, we can construct the bundle homomorphism $(\Phi, \varphi): Q \to P'$, where P' is the bundle of frames over B. Therefore we have the connection $\Gamma' = \Phi(\Gamma^h \oplus \Gamma^v)$ in P'. Prof. Yano and Davies have already given a Riemannian metric $\bar{G}$ on B from a Finsler metric G on $\mathfrak{M}$, and furthermore, Prof. Dombrowski has found an almost complex structure J on B. Those structures $\bar{G}$ and J will be obtained by a more elegant way, from the standpoint of Finsler connections. Many interesting and important theorems about those three structures $(\Gamma', \bar{G}, J)$ will be established. Some of those theorems are generalizations of theorems, which have been already given by other authors.

WALTER, R.: <u>Über die Differentialgeometrie der parabolischen Flächen des P_4</u>

Die mit einer 2-dimensionalen Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ des 4-dimensionalen projektiven Raumes verbundene quadratische Differentialform

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_{uv})du^2 + (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_{vv})du\,dv + (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_{vv})dv^2$$

mit der Determinante Δ definiert im Falle $\Delta \neq 0$ ein konjugiertes Netz, im parabolischen Fall $\Delta = 0$ dagegen eine einparametrige Schar von Asymptotenlinien. Das Problem, in jedem Punkt einer parabolischen Fläche eine zweite projektiv invariante Richtung auszuzeichnen, wird hier - in Verallgemeinerung der BOLschen Kurventheorie - dadurch gelöst, daß der Ortsvektor geeignet normiert und der Koeffizient a_1 in der Grundgleichung

$$\mathfrak{x}_{uu} = a_0\mathfrak{x} + a_1\mathfrak{x}_u + a_2\mathfrak{x}_v$$

zum Verschwinden gebracht wird. Unter Berücksichtigung der Dualität läßt sich ein Bezugssystem angeben, das mit Eigenschaften der begleitenden asymptotischen Regelfläche in Verbindung steht. Die v-Richtung ist dual invariant und von vierter Differentiationsordnung. Geometrisch ist sie gekennzeichnet als Polarenrichtung der Schmiegrichtung bezüglich der fünf Richtungen, in denen

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Flächenkurven mit bistationären Schmiegebenen existieren. Auf Grund des Zusammenhanges zwischen parabolischen Geradenkongruenzen und Flächen enthalten die Überlegungen auch eine Theorie der parabolischen Kongruenzen des P_4.

ROETHER, D.: Über Paare von Regelflächen im P_3

Obwohl die Figur eines Paares von Regelflächen und die damit zusammenhängenden Fragen für eine differentialgeometrische Untersuchung sehr reizvoll sind, scheinen bisher nur spezielle Probleme näher untersucht worden zu sein. Auch dieser Vortrag konnte und sollte nur eine Einführung in die Problemstellung geben. (Unter einem Regelflächenpaar soll hier ein Paar von schiefen Regelflächen verstanden werden, deren (windschiefe) Erzeugende durch gleiche Parameterwerte einander zugeordnet sind).

Ausgangspunkt ist ein mit dem Paar invariant verknüpftes und (bis auf Konstanten) fest normiertes Bezugssystem. Die feste Normierung zeichnet gewisse Doppelverhältnisscharen aus, die mit den von H. Prade betrachteten Projektivschraubungen zusammenhängen. Durch die Gegenkanten des Bezugssystems wird man auch sofort auf zwei weitere Paare von Regelflächen ("adjungiertes" und "transformiertes" Paar) geführt. Neben den schon erwähnten Doppelverhältnisscharen sind noch weitere geometrisch ausgezeichnet. Ihre Beziehungen untereinander sowie die Fortsetzung der "Transformation" werfen ein Fülle reizvoller Probleme auf.

HOSCHEK, J.: Über eine Verallgemeinerung der natürlichen Geometrie der Strahlflächen

Herr St. Bilinski hat auf der Geometrietagung 1962 (s.a.Mh.Math., 1963, S. 289-304) eine Erweiterung der Kurventheorie des dreidimensionalen euklidischen Raumes angegeben, die nun mit Hilfe der "natürlichen Geometrie der Strahlflächen" von Kruppa auf die Differentialgeometrie der Regelflächen übertragen wird. Als Anwendungen lassen sich verallgemeinerte Bertrand- und Mannheimflächenpaare und Verallgemeinerungen der Cesarokurven angeben. Die Theorie von Bilinski kann auch auf die Differentialgeometrie der Streifen und allgemeinen Flächen erweitert werden.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

SCHAAL, H.: Über die durch Bewegung eines Streifens erzeugbaren Flächen

Bei der Erzeugung einer Beweisfläche Φ im euklidischen R_3 wurde bisher entweder eine starre Kurve oder aber eine starre Fläche als das erzeugende Gebilde betrachtet, das im Verlauf einer kontinuierlichen Bewegung die Bewegfläche Φ als Orts- bzw. als Hüllfläche beschreibt. Solche Bewegflächen wurden zwar unter zahlreichen speziellen Gesichtspunkten eingehend studiert, doch wurde der beide Betrachtungsweisen einschließende Gedanke einer Flächenerzeugung durch Bewegung eines Streifens Σ, dessen Trägerkurve die von der Streifentorse umhüllte Fläche Φ beschreibt, noch nicht geäußert, obwohl damit viele bekannte Sonderfälle erfaßt werden. Die Bestimmung aller streifenerzeugten Bewegflächen Φ stützt sich auf die Diskussion der erzeugenden Streifen Σ und die Charakterisierung der erzeugten Bewegungen mit Hilfe jener linearen Strahlmannigfaltigkeiten, in denen die Streifennormalen liegen. Diese Methode wird auf einige Beispiele angewendet, die neue Ergebnisse und Beziehungen zu bekannten Sätzen liefern.

GIERING, O.: Erweiterung des Problems der Cesàrokurven auf Streifen

Die Frage nach jenen im begleitenden Dreibein einer Raumkurve festen Geraden, die Torsen beschreiben, wenn das Dreibein die Raumkurve durchläuft, hat zuerst E. CESÀRO aufgeworfen und behandelt. H. BRAUNER hat diese Fragestellung bei Raumkurven von Torsen auf Strahlflächen konstanten Dralls d verallgemeinert. Die Braunersche Verallgemeinerung wird auf Streifen erweitert. Dabei ergibt sich eine in den drei Streifenvarianten quadratische "Cesàrobedingung" ohne Absolutglied, die notwendig erfüllt sein muß, damit im begleitenden Streifendreibein feste Geraden ("d-Geraden") existieren, die eine konstant gedrallte Strahlfläche überstreichen. Die Bedingung ist jedoch nicht hinreichend. Ihre Diskussion liefert die bei jedem Streifen existierenden "uneigentlichen" d-Geraden und bei den "Cesàrostreifen" (welche die Cesàrobedingung nichttrivial erfüllen) überdies "eigentliche" d-Geraden, deren Konfiguration im begleitenden Dreibein besonders studiert werden.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

SIMON, U.: Bemerkungen zur Integralformelmethode der Differentialgeometrie im Großen

Im Anschluß an eine Arbeit von CHERN (J.Math.Mech.8, 1959) werden die dort aufgeführten Integralformeln erweitert; gleichzeitig wird eine Methode angegeben, wie man mit Hilfe von Ungleichungen für gemischte Diskriminanten neue Integralsätze gewinnt; Ziel ist eine gewisse Systematisierung der Integralformelmethode.

Als Beispiele werden Ergebnisse von R. SCHNEIDER (Arch.Math. 17, 1966) sowie weitere Sätze angegeben, in denen Ungleichungen für die Krümmungsfunktionen eines Flächenpaares eine wesentliche Rolle spielen.

CASATI, U.: Geschlossene Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung in Räumen konstanter Krümmung

Sei F ein Flächenstück mit konstanter mittlerer Krümmung H in einem dreidimensionalen Raum konstanter Krümmung. F sei wenigstens dreimal stetig differenzierbar, O sei ein Nabelpunkt auf F. (F enthalte nicht nur Nabelpunkte). Dann ist O ein isolierter Nabelpunkt, und sein Index ist negativ. Dieser "lokale" Satz besitzt nun folgenden "globalen" Satz als Korollar:

Unter allen geschlossenen Flächen vom Geschlecht O, also vom topologischen Typus der Kugel, in einem Raum mit konstanter Krümmung sind die Kugeln die einzigen mit konstanter mittlerer Krümmung.

MÜNZNER, H.F.: Über Flächen mit einer Weingartenschen Ungleichung

Folgender Satz wird bewiesen:

a) Es seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{a}$ analytische Abbildungen einer geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit vom Geschlecht Null in den dreidimensionalen euklidischen Raum E^3. $\mathfrak{x}$ sei eine Immersion. Ferner bestehe eine Beziehung $\mathfrak{a}_i = A_i^1 \mathfrak{x}_1$ mit $\det(A_i^1) \leq 0$. Dann ist $\mathfrak{a}$ konstant. Als Anwendungen ergeben sich u.a. ein Kongruenzsatz von A.D. Aleksandrov und ein Satz von K. Voss:

b) Jede geschlossene analytische Fläche vom Geschlecht Null im E^3,

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

deren Hauptkrümmungen der Ungleichung $(k_1 - c)(k_2 - c) \leq 0$ für eine Konstante c genügen, ist eine Kugel.

Für nicht analytische Flächen gilt b) nicht; jedoch lassen sich in diesem Fall Aussagen über die Verteilung der Nabelpunkte gewinnen.

WILLMORE, T.J.: Integral Theorems involving mean Curvature

Let S be a closed orientable surface, differentiable of class C^∞, and let $f: S \to E^3$ be a C^∞-embedding of S into euclidean space of three dimensions. Let H be the mean curvature of f(S) considered as a hypersurface of E^3. We define $\tau_1(f)$ by

$$\tau_1(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{f(s)} H^2 dS.$$

THEOREM 1: $\tau_1(f) \geq \chi(S)$, where $\chi(S)$ is the Euler characteristic of S.

THEOREM 2: Let f(S) be a convex surface with surface area V. Then

$$2 \leq \tau_1(f) \leq \frac{MV}{2\pi}$$

where $M = \sup_{P \in f(S)} (K - \frac{1}{4K} \Delta K)$, and K is the Gaussian curvature.

OPEN PROBLEM Calculate $\tau(S) = \inf_{f \in \mathfrak{J}} \tau_1(f)$ for surfaces S of genus $p \geq 1$, where the infimum is taken over the space $\mathfrak{J}$ of all C^∞-embeddings.

SCHNEIDER, R.: Über Minimalflächen mit einer Jordankurve als Rand

Im dreidimensionalen euklidischen Raum sei Γ eine Jordankurve und M eine von Γ berandete verallgemeinerte (d.h. nicht notwendig überall reguläre) Minimalfläche vom Typ der Kreisscheibe. Die Ordnungen m_i eventuell auf M vorkommender Verzweigungspunkte (= singulärer Stellen) und die Totalkrümmung der Minimalfläche lassen sich abschätzen durch die Totalkrümmung $\varkappa(\Gamma)$ der Randkurve:

$$2\pi(1 + \Sigma m_i) + \int_M |K| \, dO \leq \varkappa(\Gamma).$$

Diese für eine analytische Kurve Γ von Sasaki (1959) gefundene Ungleichung wird für beliebige Jordankurven bewiesen(wobei die Totalkrümmung $\varkappa(\Gamma)$ im Sinne von Milnor zu verstehen ist). Der Beweis verwendet eine von Milnor gegebene Darstellung von $\varkappa(\Gamma)$

als sphärischer Mittelwert und ein Lemma von T. Radó über harmonische Funktionen. Aus der Ungleichung folgt u.a.: Ist Γ aus der Klasse C^2, so enthält M höchstens endlich viele Singularitäten.

FERUS, D.: Absolute Totalkrümmung Riemannscher Immersionen

Die absolute Totalkrümmung $\tau(f)$ einer Riemannschen Immersion $f: M \to \mathbb{R}^n$ ist das (normierte) Integral über den Absolutbetrag der Lipschitz-Killing-Krümmung von f, genommen über das Einheitsnormalenbündel von f. Chern, Lashof und Kuiper haben (neben anderen Autoren) Zusammenhänge zwischen dem Wert von $\tau(f)$ und geometrischen Eigenschaften von M und f aufgezeigt, die kurz skizziert werden.

Milnors Resultat, daß aus $\tau(f:S^1 \to \mathbb{R}^n) \leq 4$ die Unverknotetheit von $f(S^1)$ folgt, gestattet eine Verallgemeinerung auf höherdimensionale Sphären.

BANCHOFF, T.: Global Extrinsic Geometry of Polyhedra

Many classical results from differential geometry in the large have analogues for polyhedra embedded in Euclidean space. An index of singularity of a height function can be defined in analogy with the Morse index, and total curvature can be expressed following the ideas of A.D. Alexandroff and N. Kuiper. The critical point theorem (Σ indices = $\varkappa(M)$), the Gauss-Bonnet theorem (total curvature of M = $2\pi\,\varkappa(M)$), and the Theorema Egregium (extrinsic curvature = intrinsic curvature) are proved, for polyhedral c o m p l e x e s of any dimension in Euclidean n-space.

However, minimal total absolute curvature = "tightness" can also be defined for polyhedra, and the results differ from the smooth case: Isometric tight polyhedra are n o t necessarily congruent. Although Kuiper has shown that a tight smooth surface in E^n must lie in a 5-dimensional subspace, there is no bound on n in the polyhedral case.

MANI, P.: Über Richtungszuteilungen

Es werden zwei Vermutungen von H. Hadwiger bewiesen, von denen die eine einen kombinatorischen Kern des Brouwerschen Fixpunktsatzes für die Kugel darstellt und die andere folgendermaßen lautet:

$A^k \subset E^k$ sei ein konvexes zentralsymmetrisches Polyeder im euklidischen Raum und $\mathfrak{A}^k$ eine symmetrische Zerlegung von A^k in konvexe Zellen. φ: $\mathfrak{A}^k_o \to S^{k-1}$ bedeute eine Richtungszuteilung, das heißt, eine Abbildung der Menge der Eckpunkte von Polyedern aus $\mathfrak{A}^k$ in die Sphäre, welche folgender Randbedingung genügt: Liegt der Punkt $p \in \mathfrak{A}^k_o$ auf dem Rand von A^k, so gilt $\varphi(-p) = -\varphi(p)$. Dann gibt es in $\mathfrak{A}^k$ ein Polyeder, dessen zugeordnete Richtungen nicht alle in der gleichen Hemisphäre liegen.

Aus diesen Sätzen lassen sich eine Reihe von Ziffernsätzen, wie das Spernersche Lemma und das Theorem von Tucker-Ky Fan, ableiten. Als topologische Folgerungen gewinnt man so verschiedene mit dem Theorem von Borsuk-Ulam verwandte Aussagen und weiter die Sätze über die Invarianz von Gebiet und Dimensionszahl auf elementarem Weg.

DERRY, D.: Inflektionshyperebenen der Polygone

Es sei π: $A_1A_2\ldots A_m$ ein geschlossenes Polygon im reellen projektiven Raum L_n der Dimension n; seine Eckpunkte $A_1,\ldots,A_m$ seien in allgemeiner Lage. Da π geschlossen ist, definiert man $A_{k+tm} = A_k$ für alle ganzen Zahlen t. Als Ordnung von π definiert man das Maximum der Kardinalzahlen von Mengen der Form $\pi \cap L_{n-1}$, wobei L_{n-1} alle Hyperebenen mit $A_i \notin L_{n-1}$ $(1 \leq i \leq m)$ durchläuft.
Für eine Hyperebene I_{n-1}: $[A_{i+1}, A_{i+2} \ldots A_{i+n}]$ sei g die Anzahl der Schnittpunkte von I_{n-1} mit der Teilstrecke $A_{i+n+1}A_{i+n+2}\ldots A_{i+m}$ von π. Ist m gerade (ungerade), so heißt I_{n-1} Inflektionshyperebene von π, wenn g+n+1 gerade (ungerade) ist. Ist für $n > 1$ L_1 eine Gerade mit $L_1 \cap [A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{i+n-2}] = \emptyset$, so sei r die Anzahl der Schmiegräume der Dimension n-2 von π, die L_1 schneiden. Es gilt: Ist q die Anzahl der Inflektionshyperebenen von π, so ist q+r eine gerade Zahl. Als eine Anwendung dieses Resultats zeigt man, daß n+3 Punkte in allgemeiner Lage im L_n immer die Eckpunkte eines einzigen Polygons n-ter Ordnung im L_n sind.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

HADWIGER, H.: Überdeckung der euklidischen Sphäre mit kongruenten Punktmengen

Es werden einige elementar nachweisbare Überdeckungssätze für die n-dimensionale euklidische Sphäre S_n besprochen, die im gemeinsamen Grenzgebiet zwischen metrischer Geometrie und Topologie liegen. Etwa: Ist $n \geq 2$ und S_n mit zwei abgeschlossenen und kongruenten Punktmengen A und B überdeckt, so daß also $A \cup B = S_n$, $A \simeq B$ gilt, so enthält der Durchschnitt $A \cap B$ ein Kontinuum K, das durch keine kongruente Abbildung in S_n von sich getrennt werden kann; für jede Isometrie $\varphi: S_n \rightarrow S_n$ muß demnach $K \cap \varphi K \neq \emptyset$ (leer) ausfallen.

VOSS, K.: Schnitte von Punktmengen mit linearen Räumen (Charakterisierung der konvexen Mengen)

Es sei A eine abgeschlossene Menge im dreidimensionalen affinen Raum R^3, $B = R^3 - A$. Es wird folgender Satz bewiesen:

Falls es eine Gerade g gibt, für welche $g \cap A$ und $g \cap B$ nicht zusammenhängend ist, so existiert eine Ebene durch g, deren Schnitt mit A oder B nicht zusammenhängend ist. Daraus folgt: Falls jeder ebene Schnitt mit A und B zusammenhängend ist, so ist A oder B konvex. (Zum Beweis werden einige einfache Hilfssätze benötigt).

Im R^n, $n \geq 3$, genügt es nicht, nur den Zusammenhang von $R^p \cap A$, $R^p \cap B$ für ein gewisses $p < n$ (und alle $R^p \subset R^n$) zu fordern, wie Beispiele für $n = 4$, $p = 3$ zeigen. Setzt man jedoch zusätzlich das Verschwinden der Homologiegruppen $H_i(B)$ für $i = 1,\dots,p-2$ voraus, so folgt, daß A oder B konvex ist. Im Spezialfall kompakter Mengen A wurde dies von G. Aumann 1935 bewiesen.

BIERI, H.: Ergänzungen zur Theorie der ebenen konvexen Bereiche

Ein ebener konvexer Bereich wird durch die Maßzahlen Dicke Δ, Durchmesser D, Umfang L und Flächeninhalt F charakterisiert. Es bestehen Ungleichungen. Man kennt alle Maxima von F und die Extrema von L. Bezüglich der Minima von F bestehen Lücken, nämlich dann, wenn das Dreieck nicht extremal sein kann. Es werden Vermutungen geäußert, und bezüglich einer interessanten "Extremalfigur" werden Teilbeweise dargelegt.

Literatur: Bonnesen-Fenchel: Konvexe Körper.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

BENZ, W.: Zur Linearität relativistischer Transformationen

Die Abbildung

$$(*) \qquad x' = \frac{1-\alpha}{2}\,\overline{ct+x} + \frac{1-\alpha}{2}\,\overline{ct-x}$$

$$ct' = \frac{1-\alpha}{2}\,\overline{ct+x} - \frac{1-\alpha}{2}\,\overline{ct-x}\,, \quad c > 0,\ \alpha = \frac{c}{v}$$

mit

$$c \neq v > 0,\quad \overline{\xi} = \begin{cases} \xi & \text{für } \xi \leq 0 \\ \alpha\xi & \xi > 0 \end{cases}$$

ist bijektiv von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf sich. Sie ist stetig, führt die Weltlinien (0,t), (-vt', t') und (vt,t), (0,t') je ineinander über und genügt dem Prinzip:

(**) Es gibt ein Signal S, dessen Geschwindigkeit c dieselbe ist in Bezug auf K: {(x,t)} wie auf K': {(x',t')}, ganz gleich, in welcher Richtung S gesandt wird. (s.R. Nevanlinna: Raum, Zeit und Relativität, Basel 1964).

Die Abbildung (*) ist aber n i c h t l i n e a r , entgegen R. Nevanlinna, loc.cit.

Alle Transformationen, die auf s o l c h e W e i s e zwei Inertialsysteme relativistisch verknüpfen, werden angegeben, und die linearen Transformationen unter diesen werden ausgesondert durch die Forderung:

(***) Für die in K bzw. in K' fixierte Weltlinie (x,t) bzw. (x',t') des Ursprungs von K existiert $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t'}{t}$.

Unser Beweis benötigt dabei keine Differential- und Integralrechnung, entgegen R. Nevanlinna, loc.cit. ("Der Beweis dieser Behauptung erfordert Differential- und Integralrechnung ...").

H.F. Münzer

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft